Analisi Matematica III - Quinto Appello

3 Settembre 2007

Esercizio 1. La norma di una matrice reale 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

è la quantità $\|A\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$. La distanza tra due matrici A e B definita da $\mathrm{dist}(A, B) = \|A - B\|$. Sia Σ l'insieme delle matrici reali 2×2 con determinante nullo. Determinare le matrici in Σ che hanno distanza minima dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Risoluzione. Minimizzare la distanza è equivalente a minimizzare il suo quadrato. Posto

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

si ha

$$\mathrm{dist}(B, A)^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2 + (t - 2)^2.$$

Occorre trovare il minimo di questa funzione di 4 variabili con il vincolo

$$xt - yz = 0.$$

Un modo è osservare preliminarmente che tale minimo deve esistere per il Teorema di Weierstrass: il vincolo è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^4$ e la funzione f da minimizzare è coerciva (ossia $\{u \in \mathbb{R}^4 \mid f(u) \leq c\}$ è compatto per ogni $c \in \mathbb{R}$). Una volta stabilita l'esistenza del minimo, questo si può determinare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

In alternativa si può ragionare nel modo seguente. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(B, A)^2 &= y^2 + z^2 + 1 - 2x + x^2 + (t - 2)^2 \\ &\geq \pm 2yz + 1 - 2x + 2|x|(2 - t) = 4|x| - 2x + 2(\pm yz - |x|t) + 1. \end{aligned}$$

Dato che $\det B = 0$, possiamo scegliere i segni in modo che $\pm yz - |x|t = 0$. Dato che $4|x| - 2x \geq 0$, troviamo che

$$\text{dist}(B, A)^2 \geq 1,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $4|x| - 2x = 0$, $|x| = 2 - t$, $y = \pm z$, e $\det B = xt - yz = 0$. Questo produce

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma

$$\omega(x, y) = \frac{(y - x^3)(3x^2dx + dy)}{(x^6 + y^2)^\alpha} + \frac{(y + x^3)(3x^2dx - dy)}{(x^6 + y^2)^\alpha}$$

è esatta sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^3\}$ e nel caso determinarne una primitiva.

Risoluzione. Con il cambio di variabile $u = y - x^3$ e $v = y + x^3$, osservando che $du = dy - 3x^2dx$ e $dv = dy + 3x^2dx$, otteniamo il problema equivalente con la forma

$$\widetilde{\omega}(u, v) = \frac{1}{2^\alpha} \frac{(udv - vdu)}{(u^2 + v^2)^\alpha}$$

sul dominio $\widetilde{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u < 0\}$. Imponendo le condizioni di chiusura si ha

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{(u^2 + v^2)^\alpha} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{(u^2 + v^2)^\alpha} \right)$$

che equivale a

$$(u^2 + v^2)^{-\alpha-1}(v^2 + (1 - 2\alpha)u^2) = -(u^2 + v^2)^{-\alpha-1}(u^2 + (1 - 2\alpha)v^2)$$

per ogni $v \in \mathbb{R}$ e $u < 0$. Ciò implica $\alpha = 1$. Una primitiva di $\widetilde{\omega}$ su $\widetilde{\Omega}$ è

$$\widetilde{P}(u, v) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{v}{u} \right)$$

pertanto una primitiva di ω su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^3\}$ è

$$P(x, y) = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{y + x^3}{y - x^3} \right).$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_Q (x^3 + x^2y - xy^2 - y^3)(x+y)\sin(2z)\,dx\,dy\,dz$$

ove si è definito

$$Q = \Big\{(x,y,z)\Big|0 < x+y < \min\{\frac{1}{\cos z}, \frac{1}{\sin z}\},\ 0 < z < \frac{\pi}{2},\ 0 < x-y < 1\Big\}.$$

Risoluzione. La continuità e la limitatezza dell'integranda sul dominio limitato Q garantiscono l'integrabilità. Sia I il valore dell'integrale da calcolare. Con il cambio di variabile $u = (x+y)$, $v = (x-y)$, si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_{\widetilde{Q}} u^3\, v\, \sin(2z) du dv dz$$

ove $\widetilde{Q} = \Big\{(u,v,z)\Big|0 < u < \min\{\frac{1}{\cos z}, \frac{1}{\sin z}\},\ 0 < z < \frac{\pi}{2},\ 0 < v < 1\Big\}$. Ne segue che

$$I = \frac{1}{4}\int_{\widetilde{Q}_1} u^3\, \sin(2z) du dz$$

ove $\widetilde{Q}_1 = \Big\{(u,z)\Big|0 < u < \min\{\frac{1}{\cos z}, \frac{1}{\sin z}\},\ 0 < z < \frac{\pi}{2}\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 4I &= \int_0^{\pi/4} \sin(2z) \int_0^{1/\cos z} u^3\,du\,dz + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(2z)\int_0^{1/\sin z} u^3\,du\,dz \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin z}{\cos^3 z}\,dz + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos z}{\sin^3 z}\,dz = \frac{1}{4}(\cos z)^{-2}\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{4}(\sin z)^{-2}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

quindi $I = 1/8$.