Analisi Matematica IV - Primo Compitino - 27/03/2007

1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & -3x + 2y - z \\ z' = & -5x + 5y - 2z \end{cases}$$

   (a) Determinarne una base di soluzioni.

   (b) Stabilire se l'origine è stabile, asintoticamente stabile o instabile.

   (c) Stabilire se esistono orbite contenute nel piano $\{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ e nel caso tracciarne un grafico qualitativo.

   (d) Tracciare il grafico delle orbite del sistema

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$x'(t) = e^{x(t)} - t^2.$$

   (a) Tracciare dei grafici qualitativi delle soluzioni, evidenziando punti di massimo e minimo locali o globali.

   (b) Stabilire se esistono soluzioni estendibili su $\mathbb{R}$.

   (c) Provare che ogni intervallo massimale di una soluzione è un intorno di $-\infty$.

   (d) Stabilire se esistono soluzioni non estendibili su $\mathbb{R}$.

3. Sia $f : [0, +\infty[\times[0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq K|u - v| \quad \forall x \geq 0,\ t \geq 0,\ u, v \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Mostrare che se $\tau > 0$ è sufficientemente piccolo, esiste unica $u : [0, \tau] \to \mathbb{R}$ continua che risolve l'equazione

$$u(x) = \int_0^x f(x, t, u(t))\, dt, \quad \forall x \in [0, \tau]. \tag{2}$$

   (b) Mostrare con un esempio che se la (1) non vale l'equazione (2) può avere più di una soluzione.

   (c) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ l'insieme delle funzioni u analitiche in un intorno di 0 che risolvono l'equazione

$$u(x) = \lambda + \frac{\log(1 + x)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^x u(t)\, dt.$$