Analisi Matematica IV - Secondo Compitino

1. Si consideri l'insieme
$$M = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \,|\, w^2 + x^2 = 1,\ y^2 + z^2 = 4\}.$$
   (a) Verificare che M è una sottovarietà di classe C^∞ di $\mathbb{R}^4$ e che il suo spazio tangente in $(1,0,2,0)$ è il piano generato dai vettori canonici $e_2 = \partial_x$ e $e_4 = \partial_z$.
   (b) Determinare l'orientazione $o : M \to \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ di M tale che $o(1,0,2,0) = e_2 \wedge e_4$.
   (c) Data la 2-forma
$$\omega = \frac{wy\,dx \wedge dz - wz\,dx \wedge dy - xy\,dw \wedge dz + xz\,dw \wedge dy}{w^2y^2 + w^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2},$$
   calcolare l'integrale
$$\int_{M^o} \omega.$$

2. Si consideri la sfera tri-dimensionale in $\mathbb{R}^4$,
$$S = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \,|\, w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$
   (a) Calcolare la misura tri-dimensionale $V_3(S)$.
   (b) Mostrare che la 3-forma
$$\omega = \frac{w\,dx \wedge dy \wedge dz - x\,dy \wedge dz \wedge dw + y\,dz \wedge dw \wedge dx - z\,dw \wedge dx \wedge dy}{(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2}$$
   è chiusa.
   (c) Dato l'aperto $A = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \,|\, w^2 + x^4 + y^6 + z^8 < 1$, calcolare
$$\int_{\partial A^+} \omega.$$

3. Si consideri il problema
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \alpha\, u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0,T) \\ u(0,\cdot) = g \in L^2(0,T) \end{cases} . \tag{1}$$
   Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,
   (a) determinare la soluzione $u(t,x)$ del problema,
   (b) provare che tale soluzione appartiene a $C^\infty\big(\mathbb{R}^+ \times (0,T)\big)$,
   (c) provare che $u(t,\cdot) \to g$ in $L^2(0,T)$ per $t \to 0^+$.

   Suggerimento. Rappresentare la soluzione con la serie
$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k(t)\, e^{ik\omega x}, \qquad \text{ove} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$