Analisi Matematica IV - Primo Appello
19 Giugno 2007

Esercizio 1. Si consideri il sistema non lineare piano

$$\begin{cases} \dot{x} = & -2y - 2xy, \\ \dot{y} = & 3x^2 + y^2 - 4x. \end{cases}$$

a) Tracciare le orbite delle soluzioni assieme al loro verso di percorrenza.

b) Stabilire l'esistenza di orbite periodiche e non periodiche.

c) Stabilire se i punti di equilibrio sono stabili, asintoticamente stabili o instabili.

d) Stabilire se esistono orbite limitate che non possono essere interamente percorse in un intervallo di tempo finito.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$u^{(4)}(t) + \beta\, u(t) = 1 + \cos^2 t.$$

Stabilire se esistono e, nel caso, si determinino i valori reali di β tali che:

a) non esistono soluzioni π-periodiche

b) esiste un'unica soluzione π-periodica e nel caso la si determini

c) esistono infinite soluzioni π-periodiche e nel caso le si determinino

d) si ha una soluzione 2π-periodica che non sia π-periodica e nel caso la si determini

e) si ha un'unica soluzione 2π-periodica che non sia π-periodica

Esercizio 3. Su $\mathbb{R}^{2n}$ munito delle coordinate $(q,p) = (q^1, q^2, \dots, q^n, p^1, p^2, \dots, p^n)$ si consideri la 2-forma

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dp^j \wedge dq^j.$$

a) Mostrare che se J è la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

dove I indica la matrice identità $n \times n$, risulta

$$\omega[u,v] = Ju \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

b) Calcolare il prodotto esterno di ω per sè stessa ripetuto n volte.

c) Data una funzione $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, mostrare che

$$X_H(q,p) = (\partial_p H(q,p), -\partial_q H(q,p)) = J\nabla H(q,p)$$

è l'unico campo vettoriale tale che

$$\omega[X(q,p), u] = -dH(q,p)[u] \quad \forall u \in \mathbb{R}^{2n}.$$

d) (Facoltativo) Supponiamo che le curve integrali del campo X_H siano definite per tutti i tempi. Mostrare che se $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ è il flusso del campo X_H, ossia

$$\partial_t \phi_t(x) = X_H(\phi_t(x)), \quad \phi_0(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n},$$

allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta

$$\phi_t^* \omega = \omega.$$

[Suggerimento: si derivi rispetto a t l'espressione sopra]. Dedurre che ϕ_t conserva il volume $2n$-dimensionale.