Analisi Matematica IV - Terzo Appello

3 Settembre 2007

Esercizio 1. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= y + x(1 - x^2 - y^2), \\
\frac{dy}{dt} &= -x + y(1 - x^2 - y^2)
\end{aligned}
$$

1. Mostrare che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione $(x(t), y(t))$ tale che $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$ è definita per tutti i $t \in \mathbb{R}^+$.

2. Discutere il comportamento delle soluzioni per $t \to +\infty$.

Risoluzione. In coordinate polari (r, θ) il sistema è equivalente a

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}r^2 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 2(1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 2r^2(1 - r^2), \\
\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan\frac{y}{x} &= \frac{x^2}{x^2 + y^2}\frac{xy' - yx'}{x^2} = -1.
\end{aligned}
$$

Dato che $2r^2(1 - r^2)$ si annulla per $r = 0$ e $r = 1$, è positivo per $0 < r < 1$ e negativo per $r > 1$, deduciamo che:

1. $(x, y) = (0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio;

2. il cerchio $r = 1$ è invariante e corrisponde ad un'orbita periodica;

3. se la condizione iniziale verifica $0 < r < 1$, l'orbita ha norma crescente tendente ad 1;

4. se la condizione iniziale verifica $r > 0$, l'orbita ha norma decrescente tendente ad 1.

In particolare le soluzioni sono limitate per tempi positivi, quindi esistono per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Le informazioni sopra, insieme all'equazione per θ mostrano che tutte le soluzioni diverse dall'equilibrio $(0, 0)$ ruotano in senso orario con velocità angolare costante 2π e per $t \to +\infty$ si avvicinano asintoticamente all'orbita 2π-periodica $r = 1$.

Esercizio 2. Siano date p uno-forme

$$\omega^i = \sum_{j=1}^{p} f_j^i dg^j, \quad i = 1, \dots, p,$$

dove f_j^i e g^j sono funzioni di classe C^1 su $\mathbb{R}^n$. Si supponga che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ i covettori $\omega^1(x), \dots, \omega^p(x)$ siano linearmente indipendenti.

1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ i covettori $dg^1(x), \dots, dg^p(x)$ sono linearmente indipendenti, e che la matrice $(f_j^i(x))_{i,j=1\dots p}$ è invertibile.

2. Determinare delle uno-forme θ_j^i tali che

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{p} \theta_j^i \wedge \omega^j, \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Risoluzione.

(a) La relazione data mostra che ogni covettore $\omega^i(x)$ è combinazione lineare dei p covettori $dg^j(x)$, $j = 1, \dots, p$. Quindi la dimensione del sottospazio vettoriale generato dagli $\omega^i(x)$ non supera la dimensione del sottospazio generato dai $dg^j(x)$. Per l'ipotesi di indipendenza, la prima di queste dimensioni è p, quindi anche la seconda dimensione è p ed i covettori $dg^j(x)$ sono linearmente indipendenti. I numeri $f_j^i(x)$ sono i coefficienti della matrice del corrispondente cambiamento di base, quindi tale matrice è invertibile.

(b) Differenziando le ω^i troviamo

$$d\omega^i = \sum_{k=1}^{p} df_k^i \wedge dg^k.$$

Inoltre per la distributività del prodotto esterno,

$$\sum_{j=1}^{p} \theta_j^i \wedge \omega^j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} f_k^j \theta_j^i \wedge dg^k = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} f_k^j \theta_j^i \right) \wedge dg^k.$$

La relazione sopra è verificata se

$$df_k^i = \sum_{j=1}^{p} f_k^j \theta_j^i.$$

Questa relazione può anche leggersi nel modo seguente: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $(df_k^i(x))$ è il prodotto tra le matrici $(f_k^j(x))$ e $(\theta_j^i(x))$. Indicando con (h_k^j) la matrice inversa di $(f_k^j(x))$, è sufficiente scegliere

$$\theta_k^i := \sum_{j=1}^{p} h_k^j df_j^i.$$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} x^2\, e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} \cos(\beta x + \gamma y + 1)\, dx\, dy\, dz$$

al variare di $\alpha > 0$ e $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. La decrescenza esponenziale immediatamente garantisce la convergenza dell'integrale. Sia I il suo valore. Osserviamo che

$$I = \operatorname{Re}\left[e^{-i}\, \mathcal{F}(x^2\, e^{-\alpha|w|^2})(\beta, \gamma, 0)\right]$$

ove $\mathcal{F}$ indica la trasformata di Fourier e abbiamo posto $(x, y, z) = w$. Definiamo inoltre $\xi = (\beta, \gamma, \theta)$ e notiamo che

$$\mathcal{F}(x^2\, e^{-\alpha|w|^2})(\xi) = -\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}\mathcal{F}(e^{-\alpha|w|^2})(\xi) = -\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}\left(\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-|\xi|^2/4\alpha}\right).$$

Calcolando la derivata parziale seconda e sostituendo nelle precedenti espressioni, si ottiene

$$I = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-(\beta^2+\gamma^2)/4\alpha} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) \cos(1).$$