Analisi IV - Anno 2006/07 - Programma dettagliato

A. Abbondandolo - V. Magnani

- **Equazioni differenziali: teoria generale.** Funzioni localmente Lipschitziane. Teorema di esistenza e unicità della soluzione locale del problema di Cauchy con campo localmente Lipschitziano nella variabile spaziale. Intervallo massimale di esistenza. Il grafico di una soluzione massimale abbandona ogni compatto. Lemma di Gronwall. I campi a crescita lineare danno esistenza globale. Equazioni di ordine superiore e riduzione dell'ordine. Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali (dimostrazione facoltativa).

- **Equazioni differenziali lineari.** Il Wronskiano di un sistema lineare omogeneo e le sue proprietà. Differenziale della funzione determinante. Equazione di Liouville per il determinante del Wronskiano. Formula risolutiva per i sistemi non omogenei. L'esponenziale di una matrice. Calcolo dell'esponenziale mediante la forma di Jordan. Formula risolutiva per sistemi lineari a coefficienti costanti. Teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali (dimostrazione facoltativa). Il flusso di un campo con divergenza nulla conserva il volume: il caso di un campo Hamiltoniano.

- **Questioni di stabilità.** Sistemi lineari stabili e asintoticamente stabili. Un sistema lineare autonomo è asintoticamente stabile se ogni autovalore ha parte reale negativa. Un sistema lineare autonomo è stabile se e solo se ogni autovalore ha parte reale non positiva, e gli autovalori immaginari puri hanno molteplicità algebrica pari a quella geometrica. Stabilità e asintotica stabilità per punti di equilibrio di sistemi non lineari. Prodotti scalari adattati. Se un punto di equilibrio di un sistema non lineare è linearmente asintoticamente stabile, allora è asintoticamente stabile. Teorema del raggio spettrale (dimostrazione facoltativa).

- **Teoria dell'integrazione di Legesgue.** Misura interna e misura esterna. Insiemi misurabili. Misura di Lebesgue: definizione e sue proprietà. Esistenza di insiemi non misurabili. Insieme di Cantor generalizzato. Funzioni semplici. Funzioni misurabili. Integrale di funzioni non negative e sue proprietà: teorema di convergenza monotona (Beppo-Levi), lemma di Fatou. Integrale di funzioni di segno qualsiasi. Teorema di convergenza dominata. Integrazione su spazi prodotto: teorema di Fubini (dimostrazione facoltativa). Formula di cambio di variabile (dimostrazione facoltativa). Integrali dipendenti da un parametro: continuità e differenziabilità. Misura della palla n-dimensionale.

- **Spazi L^p.** Lo spazio $L^p(E)$, $1 \le p < +\infty$, e la sua norma. Disuguaglianza di Hölder, disuguaglianza di Minkowski. Completezza di $L^p(E)$. Sistemi ortonormali completi in $L^2(E)$: caratterizzazioni. Il sistema trigonometrico è completo in $L^2(0, 2\pi)$.

- **Teoria delle forme differenziali.** Multi-covettori di ordine k in $\mathbb{R}^n$. Base canonica dello spazio $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ dei k-covettori in $\mathbb{R}^n$. Multi-vettori di ordine k in $\mathbb{R}^n$. Base canonica dello spazio $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ dei k-vettori in $\mathbb{R}^n$. Prodotto esterno. Accoppiamento di dualità tra k-covettori e k-vettori. Prodotto scalare canonico su $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ e su $\Lambda_k(\mathbb{R}^n)$. Multi-vettori e multi-covettori semplici. Pull-back di multi-covettori e push-forward di multi-vettori tramite applicazioni lineari. Forme differenziali di ordine k su aperti di $\mathbb{R}^n$. Il differenziale esterno e le sue proprietà. Pull-back di forme differenziali tramite applicazioni di classe C^1. Il differenziale commuta con il pull-back. Forme chiuse e forme esatte. L'operatore $*$ di Hodge (o aggiunto). Relazione tra prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$ e prodotto esterno. Divergenza di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$ come differenziale di una $(n-1)$-forma. Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ come differenziale di una 1-forma.

- **Integrazione su sottovarietà.** Applicazioni C^r tra sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ e loro differenziale. Jacobiano di una applicazione C^1 tra sottovarietà della stessa dimensione. Integrale di una funzione su una sottovarietà: definizione locale mediante sistema di coordinate e globale mediante partizioni dell'unità. Costruzione di partizioni dell'unità per sottovarietà compatte. Orientazione di una sottovarietà. Integrale di una k-forma su una k-sottovarietà orientata. L'integrale di una forma coincide con l'integrale del suo pull-back tramite un diffeomorfismo. Domini regolari. Il teorema della divergenza per domini regolari di $\mathbb{R}^n$. Sua riformulazione per campi vettoriali. Il teorema di Stokes per k-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. Caso paricolare $n = 3$, $k = 2$. Lemma di Poincarè: se $k \geq 1$, ogni k-forma chiusa su un aperto stellato è esatta (dimostrazione facoltativa).

- **Trasformata e serie di Fourier.** Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e suo annullamento all'infinito. Regolarità della trasformata e sommabilità della trasformanda. Spazi di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e relativa nozione di convergenza di funzioni. Formule per lo scambio della derivata con la trasformata in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Distribuzioni temperate. Le funzioni in L^p definiscono distribuzioni temperate per $1 \leq p \leq \infty$. Delta di Dirac. Teorema del "cambio dei cappucci". Trasformata di distribuzioni temperate. Convoluzione di funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e sua trasformata. Teorema di "inversione" in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Derivata distribuzionale e relazione con la trasformata distribuzionale. Teorema di "inversione" per distribuzioni temperate. Trasformata in L^2 e teorema di Plancherel. Calcolo delle soluzioni fondamentali per: il laplaciano in $\mathbb{R}^3$, l'equazione del calore in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ e l'equazione di Schrödinger in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Rappresentazione integrale delle soluzioni, assunzione dei dati iniziali e comportamento asintotico. Serie di Fourier temperate e loro convergenza nel senso delle distribuzioni. Distribuzioni temperate perdiodiche e loro rappresentazione in serie di Fourier temperata (senza dimostrazione). Ricerca di soluzioni perdiodiche per equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti non omogenee. Serie di Fourier per funzioni di quadrato sommabile e relativa formula di Plancherel (dimostrazione facoltativa).

Riferimenti bibliografici:

R. Courant, F. John, *Introduction to calculus and analysis II/2*, Springer 1989.

N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi matematica due*, Liguori Editore 1996.

W. Fleming, *Functions of several variables*, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

P. Majer, C. Carminati *Appunti del Corso 2004/05*, redatti da Giovanni Pizzi.
http://linuz.sns.it/ Emangusta/appunti/files0405/analisi3.pdf

G. Gilardi, *Analisi tre*, McGraw-Hill, 1994.