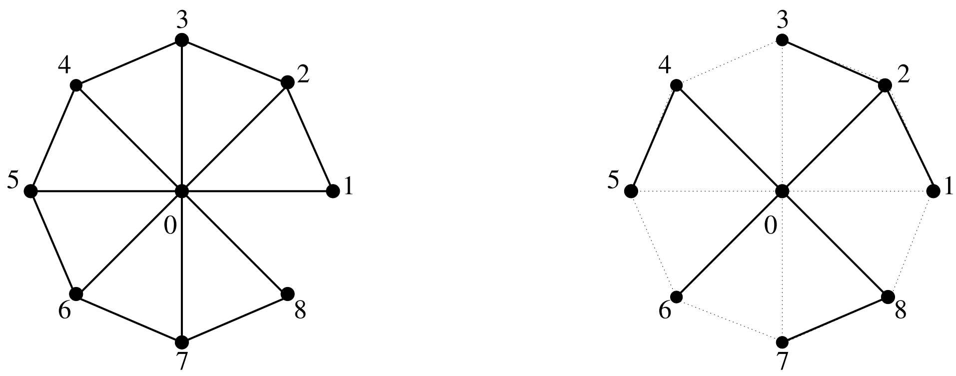
# Complementi di Analisi Matematica

## Primo Compitino - 3 Aprile 2008

**Problema A.** Sia $A(x) = \sum_{n\geq 0}(n^2+1)x^n$. Determinare esplicitamente i coefficienti $b_n$ della serie di potenze formale $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ che risolve l'equazione

$$A(x)\cdot B(x) = 1 - x + 2x^2.$$

**Problema B.** Sia $n \in \mathbb{N}_+$. Consideriamo il grafo (etichettato) $G$ con vertici $\{0, 1, \ldots, n\}$ ed i seguenti $2n-1$ lati: $\{0, k\}$, per $1 \leq k \leq n$, e $\{k, k+1\}$, per $1 \leq k \leq n-1$. La figura a sinistra raffigura $G$ per $n = 8$. Vogliamo determinare la cardinalità $a_n$ dell'insieme $\mathscr{A}_n$ dei *sottoalberi completi* di $G$, ossia di quei grafi (etichettati) $G'$ costituiti da *tutti* i vertici di $G$ ed *alcuni* dei lati di $G$, in modo che $G'$ risulti connesso e privo di cicli. Un elemento di $\mathscr{A}_8$ è raffigurato nella figura a destra.




1. Dato $h \in \mathbb{N}_+$ ed un vettore $(k_1, \ldots, k_h) \in \mathbb{N}_+^h$ tale che $k_1 + \cdots + k_h = n$, indichiamo con $\mathscr{S}(k_1, \ldots, k_h)$ l'insieme dei $G'$ in $\mathscr{A}_n$ tali che percorrendo il perimetro in senso antiorario partendo dal vertice 1, incontriamo nell'ordine componenti connesse composte da $k_1$, $k_2$, $\ldots$, $k_h$ vertici. Nella figura a destra è mostrato un elemento di $\mathscr{S}(3, 2, 1, 2)$ (sempre nel caso $n = 8$). Mostrare che

$$|\mathscr{S}(k_1, \ldots, k_h)| = k_1 \cdots k_h.$$

2. Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}_+$ vale la formula

$$a_n = \sum_{h\geq 1} \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_h)\in\mathbb{N}_+^h \\ k_1+\cdots+k_h=n}} k_1 \cdots k_h.$$

3. Motivare il fatto che la serie generatrice ordinaria associata alla successione

$$\Bigg( \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_h)\in\mathbb{N}_+^h \\ k_1+\cdots+k_h=n}} k_1 \cdots k_h \Bigg)_{n\geq 1}$$

è $S_h(x) = x^h/(1-x)^{2h}$.

4. Mostrare che la serie generatrice ordinaria associata alla successione $(a_n)_{n\geq 1}$ è
$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \frac{x}{1-3x+x^2}.$$

5. [Facoltativo] Determinare esplicitamente il numero $a_n$.

**Problema C.** In questo esercizio per *albero* si intende albero non etichettato piantato. Chiamiamo *genitori* quei nodi di un albero che hanno almeno un discendente (ossia che non sono foglie).

1. Determinare il numero degli alberi *planari* con esattamente $n$ genitori, ognuno dei quali ha 1 oppure 2 discendenti.

2. [Facoltativo] Studiare il caso non planare, fornendo una formula ricorsiva per la successione in questione.