Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Primo compitino - 13 Aprile 2010
Tutte le domande

1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge assolutamente per $x = 3$;
   (b) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (c) la serie di potenze non converge per $x = 4$.

2. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $x = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta:
   (a) la serie di potenze converge assolutamente per $-2 < x < 2$;
   (b) la serie di potenze converge assolutamente per $x = 2$;
   (c) la serie di potenze non converge per $x = -3$.

3. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza 1. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $f''(0) = a_2$;
   (b) $f''(0) = 2a_2$;
   (c) f non è necessariamente derivabile in 0.

4. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza 2. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $f'''(0) = 6a_3$;
   (b) $f'''(0) = a_3$;
   (c) f non è necessariamente derivabile in 0.

5. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze convergente su tutto $\mathbb{R}$. Supponendo che f sia una funzione pari, quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $a_n = 0$ per ogni n pari;
   (b) $a_n = 0$ per ogni n dispari;
   (c) $a_n \neq 0$ per ogni n pari.

6. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze convergente su tutto $\mathbb{R}$. Supponendo che f sia una funzione dispari, quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $a_n = 0$ per ogni n pari;
   (b) $a_n = 0$ per ogni n dispari;
   (c) $a_n \neq 0$ per ogni n dispari.

7. Sia $g : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x^5$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando g ad una funzione 2π-periodica. Quali delle seguenti affermazioni è corretta:
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\sin(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (b) la serie di Fourier di f converge a -1 per $x = -1$;
   (c) la serie di Fourier di f converge a π^5 per $x = \pi$.

8. Siano u e v vettori di $\mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti disuguaglianze è sempre vera?

   (a) $u \cdot v \leq |u|\,|v|$;

   (b) $|u \cdot v| < |u|\,|v|$;

   (c) $|u \cdot v| \geq |u|\,|v|$.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 3$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) f è continua in $(1,0)$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} < r$ e $(x,y) \neq (1,0)$ allora $f(x,y) > 0$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} < r$ e $(x,y) \neq (1,0)$ allora $f(x,y) = 3$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = -1$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) esiste $r > 0$ tale che se $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} < r$ e $(x,y) \neq (2,0)$ allora $f(x,y) > 0$;

    (b) esiste $r > 0$ tale che se $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} < r$ e $(x,y) \neq (2,0)$ allora $f(x,y) < 0$;

    (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x-2| < r$ e $|y| < r$ e $(x,y) \neq (2,0)$ allora $f(x,y) < 0$.

11. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) f possiede massimo;

    (b) esiste $(x,y) \in A$ tale che $f(x,y) = \frac{f(0,0)+f(1/2,1/2)}{2}$;

    (c) esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

12. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq 2\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) f possiede minimo;

    (b) esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$;

    (c) esiste $(x,y) \in A$ tale che $f(x,y) = \frac{f(1,1)+f(-1,3/2)}{2}$.

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) posto $g(x) = f(x,3)$, si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = g'(1)$;

    (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1,3+h)-f(1,3)}{h}$;

    (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x,3)-f(1,3)}{x}$.

14. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) posto $g(y) = f(y,3)$, si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = g'(1)$;

    (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h,3)-f(1,3)}{h}$;

    (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = \lim\limits_{y\to 3} \frac{f(1,y)-f(1,3)}{y-3}$.

15. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(3,1+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)\Big)$;

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1)$ è la derivata parziale rispetto ad x di $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(3,1)$;

(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,1)$ è la derivata parziale rispetto ad y di $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(1,3)$.

16. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali prime rispetto alla x e rispetto alla y in ogni punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) f è continua in $(0,0)$;

(b) se esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, questi due numeri sono uguali;

(c) la funzione $g(t) = f(t,0)$ é continua.

Risposte: 1b, 2a, 3b, 4a, 5b, 6a, 7b, 8a, 9b, 10c, 11b, 12c, 13a, 14c, 15b, 16c.

Tutti i problemi

A. Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n,$$

e se $0 < \rho < +\infty$, si discuta anche la convergenza per $x = \rho$ e per $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma della suddetta serie di potenze.

B. Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n,$$

e se $0 < \rho < +\infty$, si discuta anche la convergenza per $x = \rho$ e per $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma della suddetta serie di potenze.

C. Si sviluppi in serie di potenze la funzione

$$f(x) = x^2 e^{3x-1},$$

indicando l'intervallo della retta reale sul quale vale lo sviluppo. Quanto vale la derivata di ordine 50 di f in 0?

D. Si sviluppi in serie di potenze la funzione

$$f(x) = x^3 e^{2x+1},$$

indicando l'intervallo della retta reale sul quale vale lo sviluppo. Quanto vale la derivata di ordine 100 di f in 0?

E. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi], \\ 0 & \text{se } x \in]-\pi/2, \pi/2[, \end{cases}$$

e prolungata ad una funzione 2π-periodica. Si determini lo sviluppo di Fourier di f, specificando per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ tale serie converge a $f(x)$.

F. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in]-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi[, \\ 0 & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \cup \{-\pi, \pi\}, \end{cases}$$

e prolungata ad una funzione 2π-periodica. Si determini lo sviluppo di Fourier di f, specificando per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ tale serie converge a $f(x)$.