Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Appello straordinario - 7 Maggio 2010

Tutte le domande

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile rispetto alla x e rispetto alla y e tale che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $f(1+h, 2-h) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h - \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h + o(h)$ per $h \to 0$;
   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{x\to 1} \dfrac{f(x,2) - f(1,2)}{x}$;
   (c) se esistono le derivate parziali $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, queste coincidono.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile rispetto alla x e rispetto alla y e tale che $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}^2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h,2) - f(3,2)}{h}$;
   (b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\Big(f(3+h, 2-h) - f(3,2) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(3,2)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)h\Big) = 0$;
   (c) se esistono le derivate parziali $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, queste coincidono.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e sia
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$
   Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) se f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, allora $f(A)$ è un intervallo;
   (b) se f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, allora la restrizione di f ad A possiede massimo e minimo;
   (c) se f possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, allora la restrizione di f ad A possiede massimo e minimo.

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione e sia
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}.$$
   Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) se f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, allora $f(A)$ è un intervallo;
   (b) se f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, allora la restrizione di f ad A possiede massimo e minimo;
   (c) se f possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, allora la restrizione di f ad A possiede massimo e minimo.

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x,y) un punto tale che $\nabla f(x,y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$ di f in (x,y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) se $D < 0$ e $T < 0$, allora (x,y) è un punto di massimo locale;

(b) se entrambi gli autovalori di $D^2 f(x,y)$ sono negativi, allora (x,y) è un punto di massimo locale;

(c) se (x,y) è un punto di minimo locale, allora $D > 0$ e $T > 0$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x,y) un punto tale che $\nabla f(x,y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$ di f in (x,y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) se entrambi gli autovalori di $D^2 f(x,y)$ sono negativi, allora (x,y) è un punto di minimo locale;

   (b) se (x,y) è un punto di massimo locale, allora $D > 0$ e $T < 0$.

   (c) se $D < 0$ e $T < 0$, allora (x,y) non è un punto di massimo locale;

7. Sia ω una forma differenziale chiusa definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(2,0)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) ω è esatta;

   (b) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, è nullo;

   (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (t,0)$, $0 \le t \le 1$, è nullo.

8. Sia ω una forma differenziale chiusa definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(0,0)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, è nullo;

   (b) gli integrali di ω sulla curve $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\pi \le t \le 2\pi$, e $\gamma_2(t) = (t, \sin t)$, $\pi \le t \le 2\pi$, coincidono.

   (c) ω è esatta.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia A la regione del piano delimitata da una curva semplice γ orientata in senso antiorario. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) $\int_\gamma (\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy) = 0$;

   (b) $\int_\gamma f(x,y)\, ds = 0$;

   (c) $\int_A f(x,y)\, dxdy = \int_\gamma (\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy)$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia A la regione del piano delimitata da una curva semplice γ orientata in senso antiorario. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\int_\gamma (f dx + f dy) = 0$;

    (b) $\int_\gamma f(x,y)\, ds = 0$;

    (c) $\int_A (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y})\, dxdy = \int_\gamma (f dy - f dx)$.

11. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + ay(t) = 0. \tag{1}$$

    Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) Se $a < 0$, tutte le soluzioni di (1) sono periodiche.

    (b) Se $a > 0$, tutte le soluzioni di (1) sono periodiche ed hanno lo stesso periodo.

    (c) Se $a = 0$, tutte le soluzioni di (1) sono limitate.

12. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - ay(t) = 0. \tag{2}$$

    Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) Se $a < 0$, tutte le soluzioni di (2) sono periodiche.
(b) Se $a > 0$, tutte le soluzioni di (2) sono periodiche ed hanno lo stesso periodo.
(c) Se $a = 0$, tutte le soluzioni di (2) sono limitate.

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e si consideri l'equazione differenziale
$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{3}$$
Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
(a) esiste ed è unica una funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che risolve (3) e vale 1 per $x = 0$;
(b) l'equazione (3) possiede un'unica soluzione;
(c) se $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono soluzioni di (3) tali che $y_1(0) = y_2(0)$, allora $y_1(x) = y_2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

14. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e si consideri l'equazione differenziale
$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{4}$$
Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
(a) esiste $a > 0$ ed una funzione $y :]-a, a[\to \mathbb{R}$ che risolve (4) e vale 1 per $x = 0$;
(b) l'equazione (4) possiede un'unica soluzione;
(c) se $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono soluzioni di (4) tali che $y_1(0) = -y_2(0)$, allora $y_1(x) = -y_2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

15. Sia Γ la curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ y = f(x)\}$, dove $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1. Quale delle seguenti formule per la lunghezza L di Γ è corretta?
(a) $L = \int_a^b f(x)\, dx$;
(b) $L = \int_a^b |\nabla f(t)|\, dt$;
(c) $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$.

16. Sia Γ la curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leq x \leq b,\ y = f(x)\}$, dove $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1. Quale delle seguenti formule per la lunghezza L di Γ è corretta?
(a) $L = \int_a^b f(x)\, dx$;
(b) $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$.
(c) $L = \int_a^b |\nabla f(x)|\, dx$.

17. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio 1 e 2 centrate in $(0, 0)$. Quale delle seguenti formule per il valore F dell'integrale della funzione $f(x, y) = x^2$ su A è corretta?
(a) $F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cos^2\theta\, dr$;
(b) $F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^3 \cos^2\theta\, dr$;
(c) $F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \sin^2\theta\, dr$.

18. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio 1 e 2 centrate in $(0, 0)$. Quale delle seguenti formule per il valore F dell'integrale della funzione $f(x, y) = y^2$ su A è corretta?
(a) $F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^3 \sin^2\theta\, dr$;

(b) $F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \cos^2 \theta \, dr$;

(c) $F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 \sin^2 \theta \, dr$.

19. La temperatura di una piastra quadrata $Q \subset \mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$ non è uniforme ed è descritta da una funzione $T = T(x,y)$. Quale delle seguenti formule per la temperatura media $\overline{T}$ di Q è corretta?

   (a) $\overline{T} = \iint_Q T(x,y) \, dxdy$;

   (b) $\overline{T} = \int_{\partial Q} |\nabla T| \, ds$;

   (c) $\overline{T} = \frac{1}{4} \iint_Q T(x,y) \, dxdy$.

20. La temperatura di una piastra quadrata $Q \subset \mathbb{R}^2$ di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ non è uniforme ed è descritta da una funzione $T = T(x,y)$. Quale delle seguenti formule per la temperatura media $\overline{T}$ di Q è corretta?

   (a) $\overline{T} = \iint_Q T(x,y) \, dxdy$;

   (b) $\overline{T} = \int_{\partial Q} |\nabla T| \, ds$;

   (c) $\overline{T} = \frac{1}{4} \iint_Q T(x,y) \, dxdy$.

Risposte. 1a, 2b, 3b, 4a, 5b, 6c, 7b, 8b, 9a, 10c, 11b, 12a, 13c, 14a, 15c, 16b, 17b, 18a, 19c, 20a.

Tutti i problemi

A. Si risolva il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2\big(1 + y(x)^2\big), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

B. Si risolva il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = x^3\big(1 + y(x)^2\big), \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

C. Calcolare

$$\iint_A |x - y| \, dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1, \ x^2 \le y \le 1\}.$$

D. Calcolare

$$\iint_A |x + y| \, dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \le x \le 0, \ x^2 \le y \le 1\}.$$

E. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = 2x^3 \log(x^4 + y^2) \, dx + y \log(x^4 + y^2) \, dy, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Dimostrare che ω è chiusa.

(b) Dire se ω è esatta ed in caso affermativo determinarne una primitiva.

(c) Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(2x^3 \log(x^4 + y^2), y \log(x^4 + y^2)\big).$$

Esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che $F(x,y) = \nabla f(x,y)$?

(d) Determinare il lavoro di F sulla curva

$$\Gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ y = \cos x\Big\}.$$

F. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = x \log(x^2 + y^4)\, dx + 2y^3 \log(x^2 + y^4)\, dy, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0).$$

(a) Dimostrare che ω è chiusa.

(b) Dire se ω è esatta ed in caso affermativo determinarne una primitiva.

(c) Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y) = \big(x \log(x^2 + y^4), 2y^3 \log(x^2 + y^4)\big).$$

Esiste una funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che $F(x,y) = \nabla f(x,y)$?

(d) Determinare il lavoro di F sulla curva

$$\Gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ y = \cos x\Big\}.$$