Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Appello Straordinario - 15 Aprile 2011

Tutte le domande

1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, ma non assolutamente, per $x = -2$. Quale delle seguenti affermazioni sul suo raggio di convergenza ρ è corretta?
   (a) $\rho < 2$;
   (b) $\rho = 2$;
   (c) $\rho > 2$.

2. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per $x = -2$. Quale delle seguenti affermazioni sul suo raggio di convergenza ρ è corretta?
   (a) $\rho < 2$;
   (b) $\rho = 2$;
   (c) $\rho \geq 2$.

3. Sia $f(x) = \log[1/(1 - x^2)]$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n^2}$.

4. Sia $f(x) = -\log(1 - x^2)$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2n}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{n^2}$.

5. Sia $f(x) = e^{\sin^2 x}$ e sia
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
il suo sviluppo di Fourier. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, $b_n = 0$;
   (b) per ogni $n \geq 0$, $a_n = 0$;
   (c) per ogni $n \geq 1$, $a_n = 0$.

6. Sia $f(x) = 1 + \arctan \sin x$ e sia
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
il suo sviluppo di Fourier. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, $b_n = 0$;
   (b) per ogni $n \geq 0$, $a_n = 0$;

(c) per ogni $n \geq 1$, $a_n = 0$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(1,1) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y-1| < r$ allora $f(x,y) \geq 2$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x-2| < r$, $|y-2| < r$ allora $f(x,y) > 0$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y-1| < r$ allora $f(x,y) < 3$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(2,2) = 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y-1| < r$ allora $f(x,y) \geq 2$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x-2| < r$, $|y-2| < r$ allora $f(x,y) > 0$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y-1| < r$ allora $f(x,y) < 3$.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f è continua in (x,y);

   (b) $f(1+h, 2+h^2) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h + o(h)$ per $h \to 0$;

   (c) $f(1+h, 2+h^2) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h^2 + o(h^2)$ per $h \to 0$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x,y);

    (b) $f(1+h^2, 2+h) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h^2 + o(h)$ per $h \to 0$;

    (c) $f(1+h^2, 2+h) = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h + o(h^2)$ per $h \to 0$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x,y) un punto tale che $\nabla f(x,y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$ di f in (x,y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $D > 0$ allora (x,y) è un punto di massimo locale oppure di minimo locale;

    (b) se $T > 0$ allora (x,y) è un punto di minimo locale;

    (c) se (x,y) è un punto di massimo locale, allora $D > 0$ e $T < 0$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x,y) un punto tale che $\nabla f(x,y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$ di f in (x,y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $T < 0$ allora (x,y) non è un punto di massimo locale;

    (b) se $D < 0$ allora (x,y) non è un punto di massimo locale;

    (c) se (x,y) è un punto di massimo locale, allora $D > 0$ e $T < 0$.

13. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Quale delle seguenti formule fornisce la lunghezza del grafico di f?

    (a) $\int_0^1 f(x)\,dx$;

    (b) $\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$;

    (c) $f(1) - f(0)$.

14. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Quale delle seguenti formule fornisce la media di f?

   (a) $\int_0^1 f(x)\,dx$;

   (b) $\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$;

   (c) $f(1) - f(0)$.

15. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ e supponiamo che la funzione differenziabile $f : D \to \mathbb{R}$ assuma massimo nel punto $(0,1)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) $\nabla f(0,1) = 0$;

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$;

   (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$;

16. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ e supponiamo che la funzione differenziabile $f : D \to \mathbb{R}$ assuma massimo nel punto $(1,0)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) $\nabla f(1,0) = 0$;

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$;

   (c) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$;

17. Sia ω una forma chiusa definita sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > 1\}$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) se l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, è nullo, allora ω è esatta;

   (b) se l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, è nullo, allora ω è esatta;

   (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, non è nullo.

18. Sia ω una forma chiusa definita sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > 1\}$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) se l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, è nullo, allora ω è esatta;

   (b) se l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$, è nullo, allora ω è esatta;

   (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, non è nullo.

19. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

   (a) $\int_\gamma x\,dy$;

   (b) $\int_\gamma ds$;

   (c) $\int_\gamma y\,dy$.

20. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso orario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

   (a) $\int_\gamma x\,dx$;

   (b) $\int_\gamma ds$;

   (c) $\int_\gamma y\,dx$.

Risposte: 1b, 2c, 3b, 4b, 5a, 6c, 7c, 8b, 9a, 10a, 11a, 12b, 13b, 14a, 15b, 16c, 17b, 18a, 19a, 20c.

Tutti i problemi

A. Si determini il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{3n}$$

e, nel caso $\rho < +\infty$, si discuta la convergenza per $x = \rho$ e $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma di questa serie di potenze.

B. Dati gli insiemi

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq y\right\}, \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\},$$

si determini il baricentro della regione $A \cap B$.

C. Si consideri il campo vettoriale

$$X(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

(a) Si dimostri che X è conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

(b) Si determini il lavoro di X sulle curve di equazione parametrica:

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2, & \alpha(t) &= (2\cos t, 3\sin t), \\ \beta : [0, 10\pi] &\to \mathbb{R}^2, & \beta(t) &= (e^t \cos t, e^t \sin t). \end{aligned}$$