Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Primo appello - 5 Giugno 2010

Tutte le domande

1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge assolutamente per $x = 3$;
   (b) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (c) la serie di potenze non converge per $x = 4$.

2. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ non converge assolutamente per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge per $x = 3$;
   (b) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (c) la serie di potenze non converge per $x = 4$.

3. Sia $f(x) = \sin x^2$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} x^{4n}$.

4. Sia $f(x) = \cos x^2$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} x^{4n+2}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} x^{4n}$.

5. Sia $g : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x + x^4$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando g ad una funzione 2π-periodica. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\cos(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (b) la serie di Fourier di f converge a 2 per $x = 1$;
   (c) la serie di Fourier di f non converge per $x = \pi$.

6. Sia $g : [-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x + x^5$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando g ad una funzione 2π-periodica. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\cos(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (b) la serie di Fourier di f converge a 2 per $x = -1$;
   (c) la serie di Fourier di f converge per $x = \pi$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(1, 0)$ tale che $f(1, 0) = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) f è differenziabile in $(1, 0)$;
   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > 2$;

(c) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > 3$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(1, 0)$ tale che $f(1, 0) = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) f è continua in $(1, 0)$;
   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) < 3$;
   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > 3$.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue nel punto $(5, 2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x, y);
   (b) $f(5 + h, 2 + h^2) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(5, 2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(5, 2)h^2 + o(h)$ per $h \to 0$;
   (c) $f(5, 2 + h) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(5, 2)h + o(h)$ per $h \to 0$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue nel punto $(5, 2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x, y);
    (b) $f(5 + h, 2 + h^2) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(5, 2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(5, 2)h^2 + o(h^2)$ per $h \to 0$;
    (c) $f(5, 2 + h) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(5, 2)h + o(h)$ per $h \to 0$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x, y) un punto tale che $\nabla f(x, y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x, y)$ di f in (x, y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $D < 0$ e $T < 0$, allora (x, y) è un punto di massimo locale;
    (b) se $D > 0$ allora (x, y) è un punto di massimo locale oppure di minimo locale;
    (c) se (x, y) è un punto di minimo locale, allora $D > 0$ e $T > 0$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x, y) un punto tale che $\nabla f(x, y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x, y)$ di f in (x, y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $D < 0$ allora (x, y) non è un punto di massimo locale;
    (b) se $D \geq 0$ allora (x, y) è un punto di massimo locale oppure di minimo locale;
    (c) se (x, y) è un punto di minimo locale, allora $D > 0$ e $T > 0$.

13. Sia $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$, sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare con versore normale ν. Quale delle seguenti formule per il lavoro di F lungo γ è corretta?

    (a) $\int_\gamma \omega$;
    (b) $\int_\gamma F \cdot \nu \, ds$;
    (c) $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

14. Sia $F(x, y) = \nabla f(x, y)$, dove f è una funzione su $\mathbb{R}^2$, sia $\omega = \frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare con versore normale ν. Quale delle seguenti formule per il lavoro di F lungo γ è corretta?

(a) $\int_\gamma \omega$;

(b) $\int_\gamma F \cdot \nu \, ds$;

(c) $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

15. Sia ω una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$ privato dell'insieme $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 2\}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) ω non è necessariamente esatta;

    (b) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (0, t)$, $-1 \leq t \leq 1$, è nullo;

    (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, è nullo.

16. Sia ω una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$ privato dell'insieme $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1/4 \leq x \leq 1/2\}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) ω non è necessariamente esatta;

    (b) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (0, t)$, $-1 \leq t \leq 1$, è nullo;

    (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, è nullo.

17. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

    (a) $\iint_A dxdy$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y \, dy$.

18. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per la lunghezza di ∂A è corretta?

    (a) $\iint_A dxdy$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y \, dy$.

19. Sia A un dominio del piano e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Che cosa rappresenta la grandezza

$$\frac{\iint_A f(x, y) \, dxdy}{\iint_A dxdy} \quad ?$$

    (a) l'area di A;

    (b) il volume del dominio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in A,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$;

    (c) la media della funzione f su A.

20. Sia A un dominio del piano e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Che cosa rappresenta la grandezza

$$\iint_A f(x, y) \, dxdy \quad ?$$

    (a) l'area di A;

    (b) il volume del dominio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in A,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$;

    (c) la media della funzione f su A.

Risposte: 1b, 2c, 3b, 4c, 5b, 6a oppure 6c (entrambe corrette), 7b, 8a, 9b, 10c, 11b, 12a, 13a, 14c, 15c, 16a, 17a, 18b, 19c, 20b.

Tutti i problemi

A. Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{3^n} x^n,$$

e se $0 < \rho < +\infty$, si discuta anche la convergenza per $x = \rho$ e per $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma della suddetta serie di potenze.

B. Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n}{2^n} x^n,$$

e se $0 < \rho < +\infty$, si discuta anche la convergenza per $x = \rho$ e per $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma della suddetta serie di potenze.

C. Si determini il baricentro di una lamina di densità $\rho(x, y) = 2 + x$ che occupa la regione limitata del piano compresa tra l'asse delle x e la parabola $y = 1 - x^2$.

D. Si determini il baricentro di una lamina di densità $\rho(x, y) = 1 + y$ che occupa la regione limitata del piano compresa tra l'asse delle x e la parabola $y = 1 - x^2$.

E. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

(a) Si dimostri che F è conservativo.

(b) Si determini il lavoro di F sulle curve

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \beta(t) &= \big(t, 1 - (t-2)^2\big), & 1 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$

F. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(x(x^2 + y^2)^{1/2}, y(x^2 + y^2)^{1/2} \right), \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

(a) Si dimostri che F è conservativo.

(b) Si determini il lavoro di F sulle curve

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos t, \sin t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \beta(t) &= \big(t, 1 - (t-2)^2\big), & 1 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$