Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Secondoo appello - 26 Giugno 2010
Tutte le domande

1. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza 2. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (b) la serie di potenze converge assolutamente per $x = 2$;
   (c) la funzione f è continua sull'intervallo $]-2, 2[$.
2. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza 2. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (b) la serie di potenze converge assolutamente per $x = 1$;
   (c) la funzione f è continua sull'intervallo $[-2, 2]$.
3. Sia $f(x) = \log(1 + x)$. Quale dei seguenti valori per la derivata 100-esima di f in $x = 0$ è corretta?
   (a) $99!$;
   (b) $-99!$;
   (c) $100!$.
4. Sia $f(x) = \log(1 - x)$. Quale dei seguenti valori per la derivata 100-esima di f in $x = 0$ è corretta?
   (a) $99!$;
   (b) $-99!$;
   (c) $100!$.
5. Sia $f(x) = 1/(2 + \cos x)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\cos(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (b) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\sin(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (c) il coefficiente di Fourier a_0 è nullo.
6. Sia $f(x) = 1/(1 + \sin^2 x)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\cos(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (b) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\sin(nx)$ nella serie di Fourier di f è nullo;
   (c) il coefficiente di Fourier a_0 è nullo.
7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(1, 1)$ tale che $f(1, 1) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) f è differenziabile in $(1, 1)$;
   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y - 1| < r$ allora $f(x, y) > 1$;
   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 2| < r$, $|y - 2| < r$ allora $f(x, y) > 1$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(2,2)$ tale che $f(2,2) = 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) f è differenziabile in $(2,2)$;
   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x-1| < r$, $|y-1| < r$ allora $f(x,y) < 2$;
   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x-2| < r$, $|y-2| < r$ allora $f(x,y) < 2$.
9. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile infinite volte. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$;
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile infinite volte. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$;
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
11. Sia $(0,0)$ un punto di massimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, che supponiamo differenziabile infinite volte. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) < 0$;
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) > 0$.
12. Sia $(0,0)$ un punto di massimo locale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, che supponiamo differenziabile infinite volte. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$;
   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \leq 0$;
   (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \geq 0$.
13. Sia ω una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) l'integrale di ω su una qualunque curva è nullo;
   (b) la funzione $f(x,y) = \int_\gamma \omega$, dove γ è una curva che va da $(2,1)$ a (x,y), è una primitiva di ω;
   (c) ω non possiede necessariamente una primitiva.
14. Sia ω una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) ω non possiede necessariamente una primitiva;
   (b) l'integrale di ω su una qualunque curva è nullo;
   (c) la funzione $f(x,y) = \int_\gamma \omega$, dove γ è una curva che va da $(2,1)$ a (x,y), è una primitiva di ω.
15. Siano f e g due funzioni regolari definite sul piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine, tali che $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Sia X il campo vettoriale $X = (f,g)$ e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) il lavoro di X su γ potrebbe non essere nullo;

(b) il lavoro di X su γ è sicuramente nullo;

(c) il lavoro di X su γ è sicuramente diverso da zero.

16. Sia $F = (F_1, F_2) = \nabla f$ il gradiente di una funzione regolare definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine e sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\pi \le t \le \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di ω su γ potrebbe non essere nullo;

    (b) l'integrale di ω su γ è sicuramente nullo;

    (c) l'integrale di ω su γ è sicuramente diverso da zero.

17. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$ una lamina di densità non uniforme $\rho(x, y)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) il baricentro di A è un punto di A;

    (b) il baricentro di A potrebbe essere un punto di A;

    (c) il baricentro di A appartiene al cerchio di raggio 1 e centro $(0, 0)$.

18. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1/2 \le x^2 + y^2 \le 1\}$ una lamina di densità non uniforme $\rho(x, y)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) il baricentro di A è un punto di A;

    (b) il baricentro di A non è un punto di A;

    (c) il baricentro di A appartiene al cerchio di raggio 1 e centro $(0, 0)$.

19. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Sia X un campo vettoriale su A e sia $f = \operatorname{div} X$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di f su A coincide con il lavoro di X lungo γ;

    (b) l'integrale di f su A vale $\int_\gamma X \cdot \nu \, ds$, dove ν indica il versore normale esterno a ∂A;

    (c) l'integrale di f su A è nullo.

20. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Sia X un campo vettoriale su A e sia $f = \operatorname{div} X$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di f su A coincide con il flusso di X attraverso ∂A;

    (b) l'integrale di f su A vale $\int_\gamma X \cdot \tau \, ds$, dove τ indica il versore tangente a ∂A;

    (c) l'integrale di f su A è nullo.

Risposte: 1c, 2b, 3b, 4b, 5b, 6b, 7b, 8c, 9b, 10a, 11a, 12b, 13b, 14c, 15a, 16b, 17b, 18c, 19b, 20a.

Tutti i problemi

A. Esprimere la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

mediante una serie di potenze. Determinare il raggio di convergenza ρ della suddetta serie di potenze e, se $0 < \rho < \infty$, discutere la convergenza per $x = \rho$ e $x = -\rho$.

B. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = (x^2 + y)\, dx + xy\, dy$$

sulla curva $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

C. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ la corona circolare compresa tra i cerchi di raggio 1 e 3, entrambi centrati in $(0, 0)$. Sia B l'insieme costituito dagli $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $y \ge 0$ e $y \ge \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Calcolare

$$\iint_{A \cap B} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy.$$