Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Terzo appello - 20 Luglio 2010
Tutte le domande

1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, ma non assolutamente, per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni sul suo raggio di convergenza ρ è corretta?
   (a) $\rho < 3$;
   (b) $\rho = 3$;
   (c) $\rho > 3$.

2. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni sul suo raggio di convergenza ρ è corretta?
   (a) $\rho < 3$;
   (b) $\rho = 3$;
   (c) $\rho \geq 3$.

3. Sia $f(x) = e^{-x^2}$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$;
   (c) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2}$.

4. Sia $f(x) = e^{x^3}$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{n+3}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{3n}$.

5. Sia $f(x) = 1 + \sin(2x) + \sin(5x)$ e sia
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
   il suo sviluppo di Fourier. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, $b_n = 0$;
   (b) per ogni $n \geq 6$, $b_n = 0$;
   (c) per ogni $n \geq 0$, $a_n = 0$.

6. Sia $f(x) = 1 + \cos(2x) + \cos(5x)$ e sia
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
   il suo sviluppo di Fourier. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, $a_n = 0$;

(b) per ogni $n \geq 6$, $a_n = 0$;

(c) $a_0 = 0$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(1, 2)$ tale che $f(1, 2) = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y - 2| < r$ allora $f(x, y) > 2$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y - 2| < r$ allora $f(x, y) > 3$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 2| < r$, $|y - 1| < r$ allora $f(x, y) > 3$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(2, 1)$ tale che $f(2, 1) = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 2| < r$, $|y - 1| < r$ allora $f(x, y) > 3$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y - 2| < r$ allora $f(x, y) > 3$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 2| < r$, $|y - 1| < r$ allora $f(x, y) > 2$.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x, y);

   (b) $f(1 + h, 2 + h^2) = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)h^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)h + o(h)$ per $h \to 0$;

   (c) $f(1 + h, 2 + h^2) = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)h^2 + o(h^2)$ per $h \to 0$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x, y);

    (b) $f(2 + h, 3 + h^2) = f(2, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)h^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)h + o(h)$ per $h \to 0$;

    (c) $f(2 + h, 3 + h^2) = f(2, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)h + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)h^2 + o(h^2)$ per $h \to 0$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x, y) un punto tale che $\nabla f(x, y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x, y)$ di f in (x, y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $D > 0$ e $T < 0$, allora (x, y) è un punto di massimo locale;

    (b) se $T > 0$ allora (x, y) è un punto di massimo locale oppure di minimo locale;

    (c) se (x, y) è un punto di minimo locale, allora $D > 0$ e $T > 0$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x, y) un punto tale che $\nabla f(x, y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x, y)$ di f in (x, y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $T < 0$ allora (x, y) non è un punto di minimo locale;

    (b) se $D \geq 0$ allora (x, y) è un punto di massimo locale oppure di minimo locale;

    (c) se (x, y) è un punto di minimo locale, allora $D > 0$ e $T > 0$.

13. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Quale delle seguenti formule fornisce la lunghezza del grafico di f?

    (a) $\int_0^1 f(x)\, dx$;

(b) $\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$;

(c) $f(1)-f(0)$.

14. Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Quale delle seguenti formule fornisce la media di f?

    (a) $\int_0^1 f(x)\,dx$;

    (b) $\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$;

    (c) $f(1)-f(0)$.

15. Sia $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ una funzione pari (ossia $f(-x,-y)=f(x,y)$ per ogni (x,y) nel dominio di f) di classe C^1 e sia $F=\nabla f$. Consideriamo la curva $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le\pi$, ed indichiamo con ν il suo versore normale e con τ il suo versore tangente. Sia L il lavoro di F lungo γ. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $L=0$;

    (b) $L=\int_\gamma f\tau\,ds$;

    (c) $L=\int_\gamma F\cdot\nu\,ds$.

16. Sia $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ una funzione pari (ossia $f(-x,-y)=f(x,y)$ per ogni (x,y) nel dominio di f) di classe C^1 e sia $F=\nabla f$. Consideriamo la curva $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le\pi$, ed indichiamo con ν il suo versore normale e con τ il suo versore tangente. Sia L il lavoro di F lungo γ. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $L=\int_\gamma f\tau\,ds$;

    (b) $L=\int_\gamma F\cdot\nu\,ds$;

    (c) $L=0$.

17. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Sia X un campo vettoriale su A. Quale delle seguenti formule fornisce il lavoro di X lungo ∂A?

    (a) $\iint_A \mathrm{div}X\,dxdy$;

    (b) $\int_\gamma X\cdot\tau\,ds$, dove τ indica il versore tangente a ∂A;

    (c) $\int_{\partial A} X\,ds$.

18. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Sia X un campo vettoriale su A. Quale delle seguenti formule fornisce il flusso di X attraverso ∂A?

    (a) $\iint_A \mathrm{div}X\,dxdy$;

    (b) $\int_\gamma X\cdot\tau\,ds$, dove τ indica il versore tangente a ∂A;

    (c) $\int_{\partial A} X\,ds$.

19. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

    (a) $\int_\gamma x\,dy$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y\,dy$.

20. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso orario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

   (a) $\int_\gamma x\,dx$;

   (b) $\int_\gamma ds$;

   (c) $\int_\gamma y\,dx$.

Risposte: 1b, 2c, 3b, 4c, 5b, 6b, 7a, 8c, 9a, 10a, 11a, 12a, 13b, 14a, 15a, 16c, 17b, 18a, 19a, 20c.

Tutti i problemi

A. Siano r e s le semirette passanti per l'origine del piano $\mathbb{R}^2$ che dividono il primo quadrante

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$$

in tre parti uguali. Sia A una lamina che occupa la regione del piano limitata compresa tra le semirette r e s ed il ramo di iperbole di equazione $xy = 1$ che giace nel primo quadrante. Supponendo che A abbia densità $\rho(x,y) = xy$, se ne determini il baricentro.

B. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{\sin x}{\sin^2 x + y^2}\,dy - \frac{y\cos x}{\sin^2 x + y^2}\,dx.$$

   (a) Qual è il dominio della forma ω?

   (b) Mostrare che ω è chiusa.

   (c) Determinare l'integrale di ω sulle curve

$$\alpha(t) = (t, \cos t), \quad \beta(t) = (t, 4t^2 - \pi^2), \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

   (d) Dire se ω è esatta.