Analisi Matematica II - Ingegneria Edile

Quarto appello - 11 Settembre 2010

Tutte le domande

1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, ma non assolutamente, per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni sul suo raggio di convergenza ρ è corretta?
   (a) $\rho < 3$;
   (b) $\rho = 3$;
   (c) $\rho > 3$.

2. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni sul suo raggio di convergenza ρ è corretta?
   (a) $\rho < 3$;
   (b) $\rho = 3$;
   (c) $\rho \geq 3$.

3. Sia $f(x) = \sin(x^2)$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+3}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n}$.

4. Sia $f(x) = \cos(x^3)$. Quale delle seguenti formule è corretta?
   (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n}$;
   (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+3}$;
   (c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{n+3}$.

5. Sia $f(x) = 1 + \sin x \cos x$ e sia
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
   il suo sviluppo di Fourier. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, $b_n = 0$;
   (b) $b_0 = 1$, $a_2 = 1/2$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli;
   (c) $a_0 = 1$, $b_2 = 1/2$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli.

6. Sia $f(x) = \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x$ e sia
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
   il suo sviluppo di Fourier. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) per ogni $n \geq 0$, $a_n = 0$;

(b) $b_1 = 1$, $a_2 = 1$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli;

(c) $a_1 = 1$, $b_2 = 1$ e tutti gli altri coefficienti sono nulli.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(1, 0)$ tale che $f(1, 0) = -1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) f è differenziabile in $(1, 0)$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) < 0$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > -1$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(1, 0)$ tale che $f(1, 0) = -1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) f è continua in $(1, 0)$;

   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) < -1$;

   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > -1$.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x, y) un punto tale che $\nabla f(x, y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x, y)$ di f in (x, y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) se $D < 0$ e $T < 0$, allora (x, y) è un punto di massimo locale;

   (b) se $D > 0$ e $T < 0$, allora (x, y) è un punto di massimo locale;

   (c) se (x, y) è un punto di minimo locale, allora $D > 0$ e $T > 0$.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia (x, y) un punto tale che $\nabla f(x, y) = 0$. Siano D e T il determinante e la traccia della matrice Hessiana $D^2 f(x, y)$ di f in (x, y). Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) se $D > 0$ e $T < 0$,, allora (x, y) è un punto di minimo locale;

    (b) se (x, y) è un punto di massimo locale, allora $D > 0$ e $T < 0$.

    (c) se $D < 0$ e $T < 0$, allora (x, y) non è un punto di massimo locale;

11. Sia ω una forma differenziale chiusa definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(2, 0)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) ω è esatta;

    (b) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, è nullo;

    (c) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, è nullo.

12. Sia ω una forma differenziale chiusa definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(0, 0)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di ω sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, è nullo;

    (b) gli integrali di ω sulla curve $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\pi \leq t \leq 2\pi$, e $\gamma_2(t) = (t, \sin t)$, $\pi \leq t \leq 2\pi$, coincidono.

    (c) ω è esatta.

13. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia A la regione del piano delimitata da una curva semplice γ orientata in senso antiorario. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\int_\gamma (\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy) = 0$;

(b) $\int_\gamma f(x,y)\,ds = 0$;

(c) $\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_\gamma (\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy)$.

14. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia A la regione del piano delimitata da una curva semplice γ orientata in senso antiorario. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) $\int_\gamma (f dx + f dy) = 0$;

   (b) $\int_\gamma f(x,y)\,ds = 0$;

   (c) $\int_A (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y})\,dxdy = \int_\gamma (f dy - f dx)$.

15. Siano f e g due funzioni regolari definite sul piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine, tali che $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Sia X il campo vettoriale $X = (f,g)$ e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\pi \le t \le \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) il lavoro di X su γ potrebbe non essere nullo;

   (b) il lavoro di X su γ è sicuramente nullo;

   (c) il lavoro di X su γ è sicuramente diverso da zero.

16. Sia $F = (F_1, F_2) = \nabla f$ il gradiente di una funzione regolare definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine e sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $-\pi \le t \le \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) l'integrale di ω su γ potrebbe non essere nullo;

   (b) l'integrale di ω su γ è sicuramente nullo;

   (c) l'integrale di ω su γ è sicuramente diverso da zero.

17. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$ una lamina di densità non uniforme $\rho(x,y)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) il baricentro di A è un punto di A;

   (b) il baricentro di A potrebbe essere un punto di A;

   (c) il baricentro di A appartiene al cerchio di raggio 1 e centro $(0,0)$.

18. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1/2 \le x^2 + y^2 \le 1\}$ una lamina di densità non uniforme $\rho(x,y)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) il baricentro di A è un punto di A;

   (b) il baricentro di A non è un punto di A;

   (c) il baricentro di A appartiene al cerchio di raggio 1 e centro $(0,0)$.

19. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Sia X un campo vettoriale su A e sia $f = \operatorname{div} X$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) l'integrale di f su A coincide con il lavoro di X lungo γ;

   (b) l'integrale di f su A vale $\int_\gamma X \cdot \nu\, ds$, dove ν indica il versore normale esterno a ∂A;

   (c) l'integrale di f su A è nullo.

20. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Sia X un campo vettoriale su A e sia $f = \operatorname{div} X$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) l'integrale di f su A coincide con il flusso di X attraverso ∂A;

   (b) l'integrale di f su A vale $\int_\gamma X \cdot \tau\, ds$, dove τ indica il versore tangente a ∂A;

   (c) l'integrale di f su A è nullo.

Tutte le risposte: 1b, 2c, 3b, 4a, 5c, 6b, 7b, 8a, 9b, 10c, 11b, 12b, 13a, 14c, 15a, 16b, 17b, 18c, 19b, 20a.

Tutti i problemi

A. Si determini la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)3^{-n}.$$

B. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il disco di raggio 4 di centro l'origine e sia

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ |y^2 - x^2| \leq 9\}.$$

Dopo aver tracciato un disegno approssimativo dell'insieme $A \cap B$, si calcoli l'integrale

$$\iint_{A\cap B} xy\, dxdy.$$

C. Si consideri il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \Big(\frac{ye^x}{e^{2x} + y^2}, -\frac{e^x}{e^{2x} + y^2}\Big).$$

(a) Si mostri che F è conservativo.

(b) Si determini il lavoro di F sulla curva

$$\alpha(t) = \big(\sin(\pi t), t\big), \quad 0 \leq t \leq 1.$$