Analisi Matematica II - Ingegneria Edile
Quinto appello - 5 Febbraio 2011
Tutte le domande

1. Una serie di potenze converge, ma non assolutamente, per $x = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) il raggio di convergenza della serie è minore di 2;
   (b) il raggio di convergenza della serie è 2;
   (c) la serie converge per $x = -2$.

2. Una serie di potenze converge, ma non assolutamente, per $x = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretto?
   (a) il raggio di convergenza della serie è minore di 3;
   (b) il raggio di convergenza della serie è maggiore di 3;
   (c) la serie converge per $x = -2$.

3. Sia $f(x) = 1/(1-x)$. Quale dei seguenti valori per la derivata 67-esima di f in $x = 0$ è corretto?
   (a) 1;
   (b) 67;
   (c) 67!.

4. Sia $f(x) = 1/(1-x)$. Quale dei seguenti valori per la derivata 76-esima di f in $x = 0$ è corretta?
   (a) 76!;
   (b) 1;
   (c) 76.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e 2π-periodica. Sia

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

   il suo sviluppo di Fourier e sia

$$p_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{k} b_n \sin(nx).$$

   Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) tra tutti i polinomi trigonometrici p di grado k, p_k rende minima la quantità

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - p(x)|^2 \, dx;$$

   (b) tra tutti i polinomi trigonometrici p di grado k, p_k rende minima la quantità

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - p(x)|;$$

(c) per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_{k\to\infty} p_k(x) = f(x)$.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e 2π-periodica. Sia

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

il suo sviluppo di Fourier e sia

$$p_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{k} b_n \sin(nx).$$

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) tra tutti i polinomi trigonometrici p di grado k, p_k rende minima la quantità

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - p(x)|\, dx;$$

(b) tra tutti i polinomi trigonometrici p di grado k, p_k rende minima la quantità

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p(x)|;$$

(c) per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_{k\to\infty} p_k(x) = f(x)$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(1, 0)$ tale che $f(1, 0) = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) f è differenziabile in $(1, 0)$;

(b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > 2$;

(c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > 3$.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(1, 0)$ tale che $f(1, 0) = 3$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) f è continua in $(1, 0)$;

(b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) < 3$;

(c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y| < r$ allora $f(x, y) > 3$.

9. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $f(0, 0) = 0$ e $f(1, 2) = 0$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) f possiede massimo;

(b) l'equazione $f(x, y) = 1$ ha soluzione;

(c) esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

10. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0, 0) = 0$ e $f(1, 2) = 2$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

(a) f possiede massimo;

(b) l'equazione $f(x, y) = 1$ ha soluzione;

(c) esiste la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue nel punto $(5, 2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x, y);

    (b) $f(5 + h, 2 + h^2) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(5, 2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(5, 2)h^2 + o(h)$ per $h \to 0$;

    (c) $f(5, 2 + h) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(5, 2)h + o(h)$ per $h \to 0$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue nel punto $(5, 2)$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f è differenziabile in (x, y);

    (b) $f(5 + h, 2 + h^2) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(5, 2)h + \frac{\partial f}{\partial y}(5, 2)h^2 + o(h^2)$ per $h \to 0$;

    (c) $f(5, 2 + h) = f(5, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(5, 2)h + o(h)$ per $h \to 0$.

13. Siano γ una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) la quantità $\int_\gamma f\, dx$ non dipende né dalla parametrizzazione né dal verso di γ;

    (b) la quantità $\int_\gamma f\, ds$ non dipende dalla parametrizzazione di γ;

    (c) se $\hat{\gamma}$ indica la curva γ percorsa in direzione opposta, risulta $\int_{\hat{\gamma}} f\, ds = -\int_\gamma f\, ds$.

14. Siano γ una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) la quantità $\int_\gamma f\, dx$ non dipende né dalla parametrizzazione né dal verso di γ;

    (b) la quantità $\int_\gamma f\, ds$ cambia se si cambia la parametrizzazione di γ;

    (c) se $\hat{\gamma}$ indica la curva γ percorsa in direzione opposta, risulta $\int_{\hat{\gamma}} f\, dy = -\int_\gamma f\, dy$.

15. Sia $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$, sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare con versore normale ν. Quale delle seguenti formule per il lavoro di F lungo γ è corretta?

    (a) $\int_\gamma \omega$;

    (b) $\int_\gamma F \cdot \nu\, ds$;

    (c) $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

16. Sia $F(x, y) = \nabla f(x, y)$, dove f è una funzione su $\mathbb{R}^2$, sia $\omega = f dx + f dy$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare con versore normale ν. Quale delle seguenti formule per il lavoro di F lungo γ è corretta?

    (a) $\int_\gamma \omega$;

    (b) $\int_\gamma F \cdot \nu\, ds$;

    (c) $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

17. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di A è corretta?

    (a) $\iint_A dxdy$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y\, dy$.

18. Sia A un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice γ, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per la lunghezza di ∂A è corretta?

    (a) $\iint_A dxdy$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y\,dy$.

19. Sia f una funzione continua sul dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia

$$M = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

    Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) la quantità M è compresa tra il massimo e il minimo di f su D;

    (b) la quantità M non è più grande del massimo di f moltiplicato per l'area di D;

    (c) la quantità M coincide con l'area di D.

20. Sia f una funzione continua sul dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia

$$M = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

    Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) la quantità $M/\text{Area}\,(D)$ è compresa tra il minimo e il massimo di f su D;

    (b) la quantità M non è più grande del massimo di f.

    (c) la quantità M coincide con l'area di D.

Risposte: 1b, 2c, 3c, 4a, 5a, 6c, 7b, 8a, 9c, 10b, 11b, 12c, 13b, 14c, 15a, 16c, 17a, 18b, 19b, 20a.

Tutti i problemi

A. Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-n}{e^n} x^n,$$

e se $0 < \rho < +\infty$, si discuta anche la convergenza per $x = \rho$ e per $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma della suddetta serie di potenze.

B. Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-n}{\pi^n} x^n,$$

e se $0 < \rho < +\infty$, si discuta anche la convergenza per $x = \rho$ e per $x = -\rho$. Si determini esplicitamente la somma della suddetta serie di potenze.

C. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| - 1 \leq y \leq 1\}$.

D. Determinare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^3 - y^2$$

sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| - 1 \leq x \leq 1\}$.

E. Si considerino i due insiemi

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}, \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}.$$

Si determini l'area di $A \cap B$.

F. Si considerino i due insiemi

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1\right\}, \quad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}.$$

Si determini l'area di $A \cap B$.