**Analisi Matematica II - Ingegneria Edile**
**Sesto appello - 23 Febbraio 2011**

**Tutte le domande**

1. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge per $x = \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge assolutamente per $x = \pi$;
   (b) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (c) la serie di potenze non converge per $x = 4$.

2. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ non converge assolutamente per $x = \pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) la serie di potenze converge per $x = \pi$;
   (b) la serie di potenze converge per $x = -2$;
   (c) la serie di potenze non converge per $x = 4$.

3. Sia $g : [-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x + x^4$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando $g$ ad una funzione $2\pi$-periodica. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\cos(nx)$ nella serie di Fourier di $f$ è nullo;
   (b) la serie di Fourier di $f$ converge a 2 per $x = 1$;
   (c) la serie di Fourier di $f$ non converge per $x = \pi$.

4. Sia $g : [-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x + x^5$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando $g$ ad una funzione $2\pi$-periodica. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) per ogni $n \geq 1$, il coefficiente di $\cos(nx)$ nella serie di Fourier di $f$ è nullo;
   (b) la serie di Fourier di $f$ converge a 2 per $x = -1$;
   (c) la serie di Fourier di $f$ converge per $x = \pi$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(1, 1)$ tale che $f(1, 1) = 2$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $f$ è differenziabile in $(1, 1)$;
   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y - 1| < r$ allora $f(x, y) > 1$;
   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 2| < r$, $|y - 2| < r$ allora $f(x, y) > 1$.

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $(2, 2)$ tale che $f(2, 2) = 1$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $f$ è differenziabile in $(2, 2)$;
   (b) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 1| < r$, $|y - 1| < r$ allora $f(x, y) < 2$;
   (c) esiste $r > 0$ tale che se $|x - 2| < r$, $|y - 2| < r$ allora $f(x, y) < 2$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che possiede derivate parziali prime rispetto alla $x$ e rispetto alla $y$ in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?
   (a) $f$ è continua in $(0, 0)$;
   (b) se esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, questi due numeri sono uguali;

(c) la funzione $g(t) = f(t, 0)$ è continua.

8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione le cui derivate parziali prime rispetto alla $x$ e rispetto alla $y$ risultano continue su tutto $\mathbb{R}^2$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

   (a) $f$ è continua in $(0, 0)$;

   (b) se esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$, questi due numeri sono uguali;

   (c) la funzione $g(t) = f(t, 0)$ è derivabile due volte.

9. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, una curva semplice regolare. Quali delle seguenti formule esprime correttamente la lunghezza di $\gamma([a, b])$?

   (a) $\int_a^b \big(x'(t) + y'(t)\big)\, dt$;

   (b) $\int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\, dt$;

   (c) $\int_\gamma ds$.

10. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, una curva semplice regolare. Quali delle seguenti formule esprime correttamente la lunghezza di $\gamma([a, b])$?

    (a) $\int_a^b \big(x'(t) + y'(t)\big)\, dt$;

    (b) $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$;

    (c) $\int_\gamma dx$.

11. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio 1. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) in un punto di massimo $(x, y) \in D$ della restrizione di $f$ a $D$ risulta $\nabla f(x, y) = 0$;

    (b) se la restrizione di $f$ a $D$ assume massimo in $(1, 0)$ allora $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0$;

    (c) se la restrizione di $f$ a $D$ assume massimo in $(1, 0)$ allora $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$.

12. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il disco chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio 1. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) in un punto di massimo $(x, y) \in D$ della restrizione di $f$ a $D$ risulta $\nabla f(x, y) = 0$;

    (b) se la restrizione di $f$ a $D$ assume massimo in $(0, 1)$ allora $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 0$;

    (c) se la restrizione di $f$ a $D$ assume massimo in $(0, 1)$ allora $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0$.

13. Sia $\omega$ una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(0, 0)$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\omega$ è esatta sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$;

    (b) l'integrale di $\omega$ sulla curva $\gamma(t) = (t, 0)$, $1 \le t \le 2$, è nullo;

    (c) l'integrale di $\omega$ sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, 2 + \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, è nullo.

14. Sia $\omega$ una forma differenziale chiusa su $\mathbb{R}^2$ privato del punto $(0, 0)$. Quali delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) $\omega$ è esatta sull'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$;

    (b) l'integrale di $\omega$ sulla curva $\gamma(t) = (t, 0)$, $1 \le t \le 2$, è nullo;

    (c) l'integrale di $\omega$ sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, è nullo.

15. Siano $f$ e $g$ due funzioni regolari definite sul piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine, tali che $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Sia $X$ il campo vettoriale $X = (f, g)$ e sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) il lavoro di $X$ su $\gamma$ potrebbe non essere nullo;

    (b) il lavoro di $X$ su $\gamma$ è sicuramente nullo;

    (c) il lavoro di $X$ su $\gamma$ è sicuramente diverso da zero.

16. Sia $F = (F_1, F_2) = \nabla f$ il gradiente di una funzione regolare definita sul piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine e sia $\omega = F_1 dx + F_2 dy$. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di $\omega$ su $\gamma$ potrebbe non essere nullo;

    (b) l'integrale di $\omega$ su $\gamma$ è sicuramente nullo;

    (c) l'integrale di $\omega$ su $\gamma$ è sicuramente diverso da zero.

17. Sia $A$ un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice $\gamma$, orientata in senso antiorario. Quali delle seguenti formule per l'area di $A$ è corretta?

    (a) $\int_\gamma x\, dy$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y\, dy$.

18. Sia $A$ un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice $\gamma$, orientata in senso orario. Quali delle seguenti formule per l'area di $A$ è corretta?

    (a) $\int_\gamma x\, dx$;

    (b) $\int_\gamma ds$;

    (c) $\int_\gamma y\, dx$.

19. Sia $A$ un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice $\gamma$, orientata in senso antiorario. Sia $X$ un campo vettoriale su $A$ e sia $f = \operatorname{div} X$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di $f$ su $A$ coincide con il lavoro di $X$ lungo $\gamma$;

    (b) l'integrale di $f$ su $A$ vale $\int_\gamma X \cdot \nu\, ds$, dove $\nu$ indica il versore normale esterno a $\partial A$;

    (c) l'integrale di $f$ su $A$ è nullo.

20. Sia $A$ un dominio regolare del piano delimitato da una curva chiusa semplice $\gamma$, orientata in senso antiorario. Sia $X$ un campo vettoriale su $A$ e sia $f = \operatorname{div} X$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

    (a) l'integrale di $f$ su $A$ coincide con il flusso di $X$ attraverso $\partial A$;

    (b) l'integrale di $f$ su $A$ vale $\int_\gamma X \cdot \tau\, ds$, dove $\tau$ indica il versore tangente a $\partial A$;

    (c) l'integrale di $f$ su $A$ è nullo.

**Risposte:** 1b, 2c, 3b, 4a/c (entrambe corrette), 5b, 6c, 7c, 8a, 9c, 10b, 11c, 12b, 13c, 14a, 15a, 16b, 17a, 18c, 19b, 20a.

## Tutti i problemi

A. Si determino i valori reali $x$ per i quali la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{n!} x^{3n}$$

converge assolutamente e per tali valori si determini esplicitamente la somma della serie.

B. Si determini l'integrale

$$\iint_A \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy,$$

dove $A$ è il sottoinsieme del piano

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ (x^2+y^2)^2 < x^2 - y^2\}.$$

C. Si verifichi che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = (2xy^2 - y^2 \sin x)\, dx + (2y\cos x + 2x^2 y - e^y)\, dy$$

è chiusa e se ne determini l'integrale sul grafico della funzione

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x,$$

orientato nel verso delle $x$ crescenti.