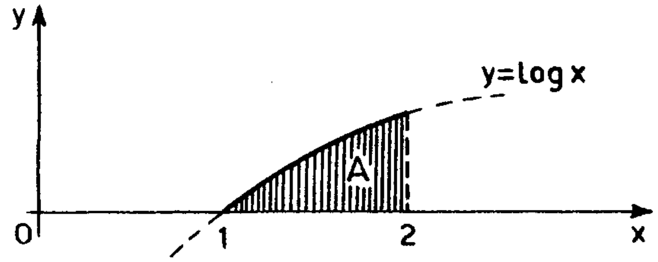
3 Calcolo di integrali doppi e tripli.

X **Esercizio 1** — *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A e^{x+y}\, dxdy$$

dove $A = \left\{(x,y):\ 1 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant \log x\right\}$.



L'insieme A è normale rispetto all'asse y, quindi

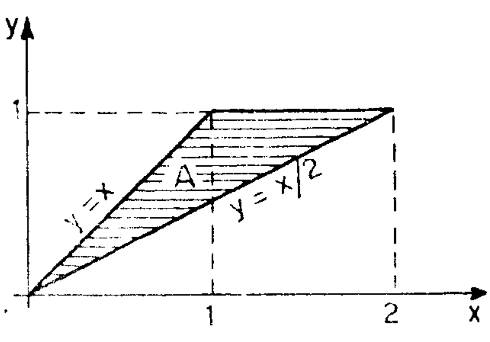
$$\iint_A e^{x+y}\, dxdy = \int_1^2 dx \int_0^{\log x} e^{x+y}\, dy =$$

$$= \int_1^2 e^x dx \int_0^{\log x} e^y dy = \int_1^2 e^x [e^y]_0^{\log x} dx = \int_1^2 (x-1)\, e^x\, dx = e$$

Esercizio 2 — *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A \sqrt{x+y}\, dxdy$$

dove A *è il triangolo di vertici* (0,0), (1,1), (2,1).



L'insieme A è normale sia rispetto all'asse y che rispetto all'asse x. Conviene considerarlo normale rispetto all'asse x:

$$A = \{(x,y) \colon 0 \leqslant y \leqslant 1 \ \ , \ y \leqslant x \leqslant 2y\}$$

Si ha pertanto

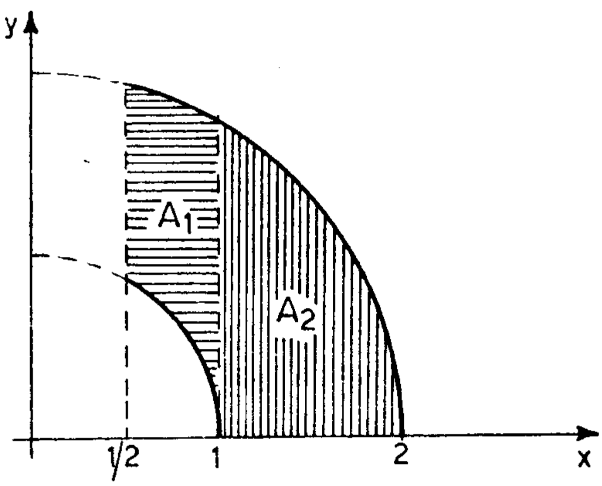
$$\iint_A \sqrt{x+y}\ dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} \sqrt{x+y}\ dx = \frac{2}{3}\int_0^1 \left[(x+y)^{3/2}\right]_y^{2y} dy =$$

$$= \frac{2}{3}(3^{3/2} - 2^{3/2}) \int_0^1 y^{3/2}\ dy = \frac{4}{15}(3^{3/2} - 2^{3/2})$$

Esercizio 3 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove $A = \{(x,y) \colon x \geqslant \frac{1}{2}\ ,\ y \geqslant 0\ ,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.



Decomponiamo A nei due insiemi normali rispetto all'asse y

$$A_1 = \left\{(x,y): \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \ , \ \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\right\}$$

$$A_2 = \left\{(x,y): 1 \leqslant x \leqslant 2 \ , \ o \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\right\}$$

Si ha

$$(3.1) \qquad \iint_A \ldots = \iint_{A_1} \ldots + \iint_{A_2} \ldots$$

$$(3.2) \qquad \iint_{A_1} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dxdy = \int_{1/2}^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy$$

$$(3.3) \qquad \iint_{A_2} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dxdy = \int_{1}^{2} dx \int_{o}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dy$$

E poichè

$$\forall x \neq o \qquad \int \frac{x}{x^2+y^2}\, dy = \operatorname{arctang} \frac{y}{x} + c$$

$$\forall x \neq o \qquad \int \frac{y}{x^2+y^2}\, dy = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + c$$

$$\forall x \neq o \quad e \quad \alpha^2 - x^2 \geqslant o \quad \int \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}\, dx =$$

$$= x \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x} - \sqrt{\alpha^2-x^2} + c$$

dalle (3.2) e (3.3) segue che

$$\iint_{A_1} \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy = \int_{1/2}^{1}\left[\operatorname{arctang}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_{1/2}^{1}\left[\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arctang}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \log 2\right] dx =$$

$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctang}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\sqrt{15} + \frac{\sqrt{15}-3\sqrt{3}+\log 2}{2}$$

Similmente

$$\iint_{A_2} \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy = \int_{1}^{2}\left[\operatorname{arctang}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)\right]_{o}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$= \int_{1}^{2}\left[\operatorname{arctang}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + \log 2 - \log x\right] dx =$$

$$= 1 + \sqrt{3} - \log 2 - \operatorname{arctang}\sqrt{3}$$

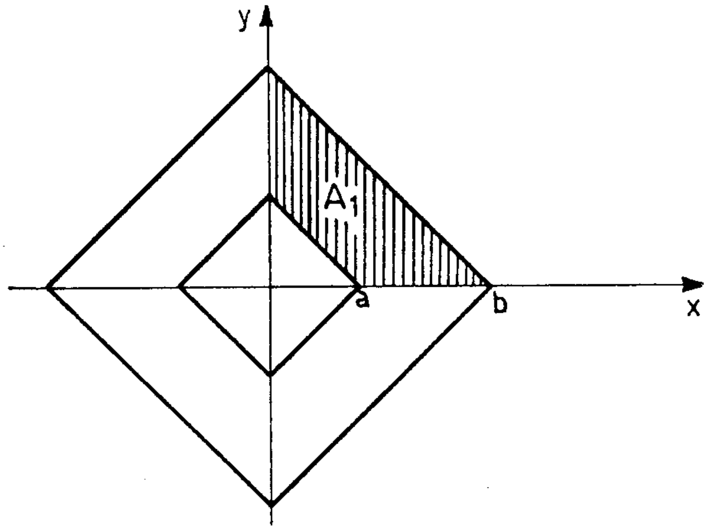
E quindi, per (3.1),

$$\iint_{A} \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{arctang}\sqrt{3} - \operatorname{arctang}\sqrt{15} + \sqrt{15} - \sqrt{3} + 2 - \log 2\right\}$$

Esercizio 4 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_{A} \frac{1}{(|x|+|y|)^{\alpha}}\, dxdy \quad , \qquad \alpha > o$$

dove $A = \left\{(x,y):\ a \leqslant |x| + |y| \leqslant b\ ,\ a > o\right\}$.



Osserviamo innanzitutto che [1]

$$\iint_A \frac{1}{(|x|+|y|)^\alpha}\,dxdy = 4\iint_{A_1} \frac{1}{(|x|+|y|)^\alpha}\,dxdy$$

dove $\quad A_1 = \left\{(x,y):\ a \leqslant x + y \leqslant b\ ,\ xy \geqslant o\right\}$. Posto

$$\varphi(x) = \begin{cases} a - x & \text{per} \quad o \leqslant x \leqslant a \\ o & \text{per} \quad a \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

l'insieme A_1 è normale rispetto all'asse y e si può definire in questo modo

$$A_1 = \left\{(x,y):\ o \leqslant x \leqslant b\ .\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant b - x\right\}$$

Allora

$$\iint_{A_1} \frac{1}{(|x|+|y|)^\alpha} = \int_o^b dx \int_{\varphi(x)}^{b-x} (x+y)^{-\alpha}\,dy = \int_o^b dx \int_{x+\varphi(x)}^{b} t^{-\alpha}\,dt =$$

[1] Il lettore giustifichi questa affermazione!

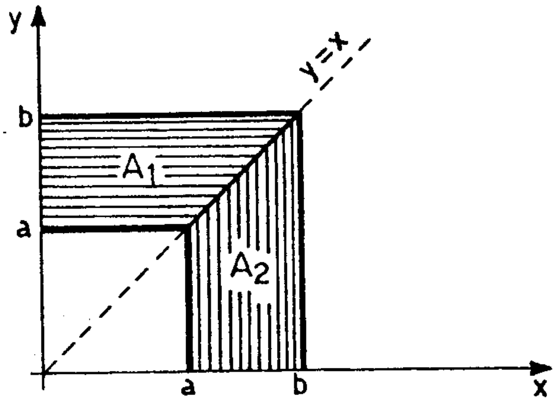
$$= \int_a^b t^{-\alpha}\, dt \int_0^t dx = \int_a^b t^{1-\alpha}\, dt = \begin{cases} \dfrac{b^{2-\alpha} - a^{2-\alpha}}{2-\alpha} & \text{Se } \alpha \neq 2 \\ \log b - \log a & \text{Se } \alpha = 2 \end{cases}$$

L'integrale esteso ad A si ottiene moltiplicando per 4 questo risultato.

Esercizio 5 – *Calcolare l'integrale doppio*[1]

$$\iint_A \max[x,y]\, dxdy$$

dove $A = \{(x,y):\ a \leqslant \max[x,y] \leqslant b\ ,\ a > 0\ ,\ xy > 0\}$.



Decomponiamo A negli insiemi A_1 e A_2 dove

$$A_1 = \{(x,y):\ a \leqslant y \leqslant b\ ,\ \ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

$$A_2 = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b\ ,\ \ 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

A_1 è normale rispetto all'asse x e in A_1

(1) – $\max[x,y]$ è la funzione che nel punto (x,y) assume come valore il più grande tra x e y .

$$\max[x,y] = y$$

A_2 è normale rispetto all'asse y e in A_2

$$\max[x,y] = x$$

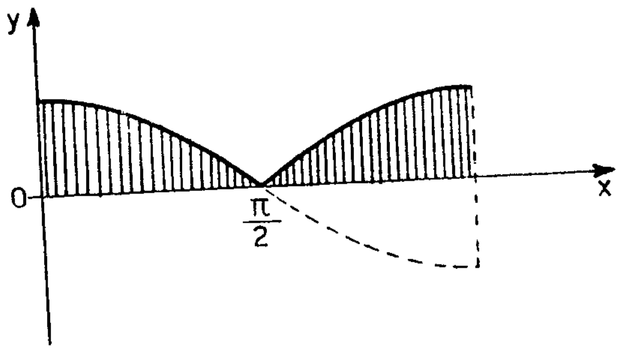
Quindi si ha

$$\iint_A \max[x,y]dxdy = \iint_{A_1} y\,dxdy + \iint_{A_2} x\,dxdy =$$

$$= \int_a^b y\,dy \int_o^y dx + \int_a^b x\,dx \int_o^x dy = 2\int_a^b t^2\,dt = \frac{2}{3}[b^3 - a^3].$$

Esercizio 6 – *Calcolare l'integrale doppio della funzione* f(x y) = xy senx *sull'insieme*

$$A = \{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant |\cos x|\}\ .$$



L'insieme A è normale rispetto all'asse y quindi

$$\iint_A xy \text{ sen } x\,dxdy = \int_o^{\pi} dx \int_o^{|\cos x|} x \text{ sen } x \cdot y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \left[y^2\right]_0^{|\cos x|} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}x \cos^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[- x \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx\right\} = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 7 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A y \, dx \, dy$$

dove $A = \left\{(x,y)\colon y^2 - x^3 (1-x)^3 \leqslant 0\right\}$.

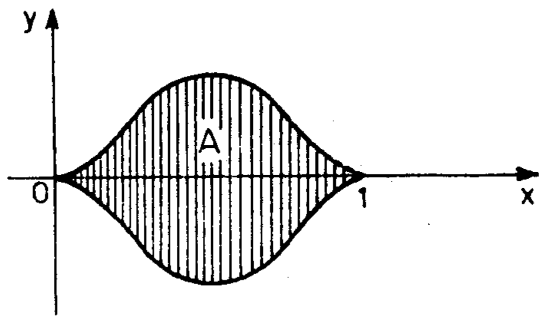
Precisiamo innanzitutto la natura dell'insieme A:

$$(x,y) \in A \Leftrightarrow y^2 \leqslant [x(1-x)]^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \geqslant 0 \\ |y| \leqslant [x(1-x)]^{3/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ |y| \leqslant [x(1-x)]^{3/2} \end{cases}$$

Quindi

$$A = \left\{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad , -[x(1-x)]^{3/2} \leqslant y \leqslant [x(1-x)]^{3/2}\right\}$$

e l'insieme A è normale rispetto all'asse y .



Quindi si ha

$$\iint_A y\,dxdy = \int_o^1 dx \int_{-[x(x-1)]^{3/2}}^{[x(1-x)]^{3/2}} y\,dy = \int_o^1 o\,dx = o$$

Esercizio 8 – *Calcolare l'integrale doppio*

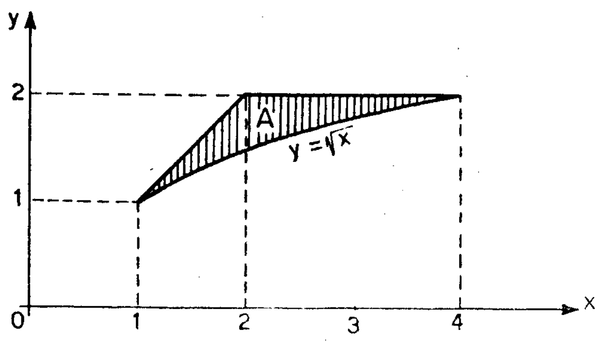
$$\iint_A y^2 \,\mathrm{sen}(xy)\,dxdy$$

dove A *è il triangolo di vertici* $(0,0)$, $(\sqrt{\pi},0)$, $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$. $\left[\Re\ \frac{2}{\pi}\right]$.

Esercizio 9 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A \mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2y}\,dxdy$$

dove A *è l'insieme misurabile del piano* (x,y) *tratteggiato in figura.*

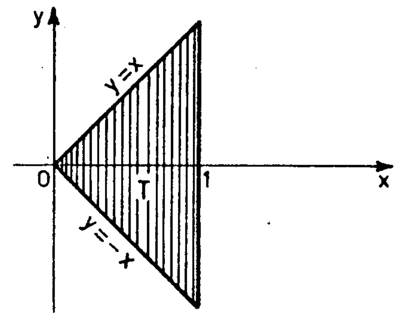


$\left[\Re.\ \frac{4(\pi+2)}{\pi^3}\right]$

Esercizio 10 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_T \frac{dxdy}{(x^2+y+1)^2}$$

dove $T = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ |y| \leqslant x\}$.



L'insieme T è normale rispetto all'asse y e risulta

$$\iint_T \frac{dxdy}{(x^2+y+1)^2} = \int_o^1 dx \int_{-x}^{x} \frac{1}{(x^2+y+1)^2}\,dy = -\int_o^1 \left[\frac{1}{x^2+y+1}\right]_{-x}^{x} dx =$$

$$= \int_o^1 \frac{2x}{x^4+x^2+1}\,dx$$

Mediante il cambiamento di variabili $x^2 = t$ si ottiene

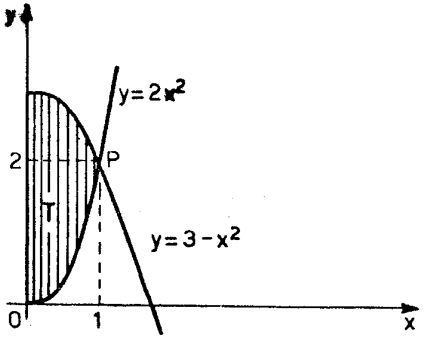
$$\int_o^1 \frac{2x}{x^4+x^2+1}\,dx = \int_o^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctang}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_o^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Esercizio 11 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_T x\sqrt{x+y}\ dxdy$$

dove T *è l'insieme tratteggiato in figura*



Le coordinate del punto P sono (1.2); l'insieme T è normale rispetto all'asse y per cui si ha

$$\iint_T x\ \sqrt{x+y}\ dxdy = \int_o^1 x\, dx \int_{3-x^2}^{2x^2} \sqrt{x+y}\ dx =$$

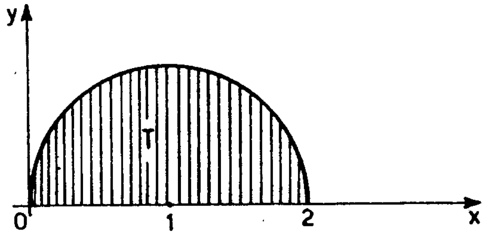
$$= \frac{2}{3}\int_o^1 x\left[(x+y)^{3/2}\right]_{3-x^2}^{2x^2} dx = \frac{2}{3}\int_o^1 [x(2x^2+x)^{3/2} - x(x+3-x^2)^{3/2}]dx.$$

Il lettore completi l'esercizio.

Esercizio 12 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_T (x^2 - y^2)\, dxdy$$

dove T *è il semicerchio di centro* (1,0) *e raggio* 1 *contenuto nel primo quadrante*



L'insieme T è normale rispetto all'asse y:

$$T = \{(x,y):(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\ ,\ y \geqslant 0\} =$$

$$= \{(x,y):\ 0 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}\}$$

Quindi si ha

$$\iint_T (x^2 - y^2)dxdy = \int_o^2 dx \int_o^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2 - y^2)dy = \frac{2}{3}\int_o^2 (2x^2 - x)\sqrt{2x-x^2}dx$$

Il lettore completi l'esercizio

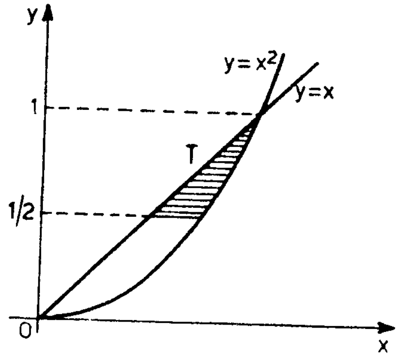
Esercizio 13 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_T \frac{x}{x^4 + y^4}\, dxdy$$

dove T *è l'insieme tratteggiato in figura.*

E' conveniente considerare l'insieme T normale rispetto all'asse x

$$T = \left\{(x,y):\ \frac{1}{2} \leq y \leq 1\ ,\ \sqrt{y} \leq x \leq y\right\}$$



Per cui si ha

$$\iint_T \frac{x}{x^4+y^4}\,dxdy = \int_{1/2}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{y} \frac{x}{x^4+y^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} dy \int_{y}^{y^2} \frac{1}{t^2+y^4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{y^4}\left[\text{arctang}\,\frac{t}{y^2}\right]_y^{y^2} dy = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{y^4}\left(\frac{\pi}{4} - \text{arctang}\,\frac{1}{y}\right) dy =$$

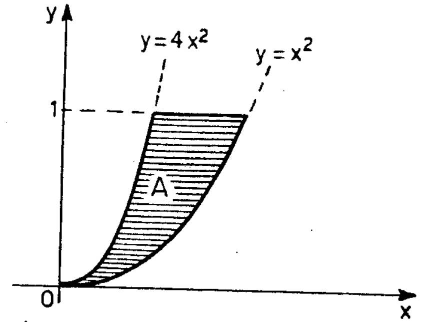
$$= \frac{\pi}{8}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{y^4}\,dy - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{y^4}\,\text{arctang}\,\frac{1}{y}\,dy\,.$$

Il primo integrale è elementare, il secondo integrale si riconduce, con una integrazione per parti, all'integrale di una funzione razionale.

Esercizio 14 — *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A \frac{x}{x+y}\,dxdy$$

dove A *è l'insieme tratteggiato in figura*



L'insieme A è normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y. E' più conveniente considerarlo come normale rispetto all'asse y. Posto

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

risulta

$$A = \left\{(x,y):\ 0 \leq x \leq 1\ ,\ x^2 \leq y \leq \varphi(x)\right\}$$

La funzione

$$(x,y) \to \frac{x}{x+y}$$

è continua e limitata in $A - \{0\}$; si può definire arbitrariamente nel punto 0

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} & (x,y) \in A - \{0\} \\ \alpha & (x,y) = 0 \end{cases}$$

e, comunque definita nel punto 0, la funzione f è integrabile in A e

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{\varphi(x)} \frac{dy}{x+y} = \int_0^1 x \Big[\log(x+y)\Big]_{x^2}^{\varphi(x)} dx =$$

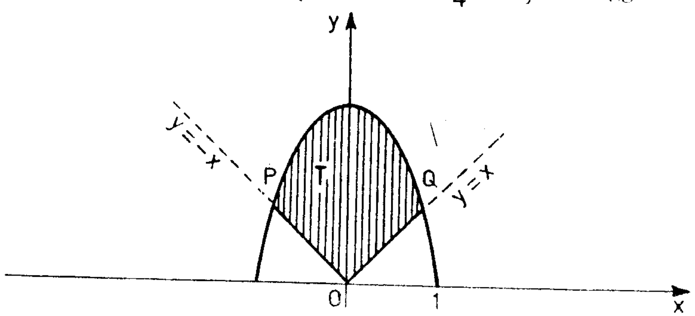
$$= \int_0^{1/2} x\,[\log(1+4x) - \log(1+x^2)]dx + \int_{1/2}^1 x\,[\log(1+x) - \log(x+x^2)]dx$$

Il lettore completi l'esercizio.

Esercizio 15 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_T y^2\,dxdy$$

dove T *è il settore dell'ellisse* $\left\{(x,y):\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ *tratteggiato in figura.*



Le ascisse dei punti P e Q sono rispettivamente $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ e

L'insieme T è normale rispetto all'asse y, si ha pertanto

$$\iint_T y^2\,dxdy = \int_{-\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{2}{\sqrt5}} dx \int_{|x|}^{2\sqrt{1-x^2}} y^2\,dy = \frac{1}{3}\int_{-\frac{2}{\sqrt5}}^{\frac{2}{\sqrt5}} [8(1-x^2)^{3/2} - x^2$$

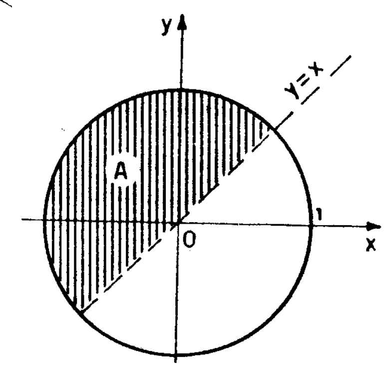
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{2}{\sqrt5}} [8(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - x^3]\,dx$$

Il lettore completi l'esercizio.

Esercizio 16 – *Calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_A (y-x)dxdy$$

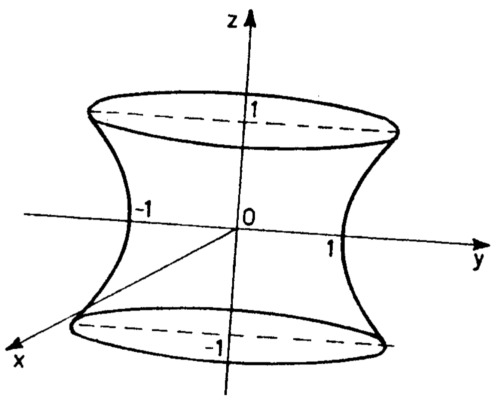
dove $A = \{(x,y):\ x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ y \geq x\}$



Esercizio 17 – *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A \frac{x^2\, e^z}{1+z^2}\, dxdydz$$

dove A *è l'insieme* $\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2 \leqslant z^2+1\ .\ |z| \leqslant 1\right\}$.



L'insieme A è un iperboloide di rotazione attorno all'asse z . Indichiamo con C(t) la proiezione sul piano (x,y) della sezione dell'insieme A con il piano z = t. C(t), $-1 \leqslant t \leqslant 1$, è un cerchio

$$C(t) = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \leqslant t^2+1\right\}$$

Per calcolare l'integrale proposto usiamo la formula di riduzione

$$\iiint_A \frac{x^2\, e^z}{1+z^2}\, dxdydz = \int_{-1}^{1} \frac{e^z}{1+z^2}\, dz \iint_{C(z)} x^2\, dxdy$$

E poichè

$$\iint_{C(z)} x^2\, dxdy = 2\int_{-\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} x^2 \sqrt{1+z^2-x^2}\, dx = 4(1+z^2)^2 \int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4}\,(1+z^2)^2$$

Si ha in definitiva

$$\iiint_A \frac{x^2\, e^z}{1+z^2}\, dxdydz = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} (1+z^2)e^z\, dz = \frac{\pi}{2}\left(e - \frac{3}{e}\right)$$

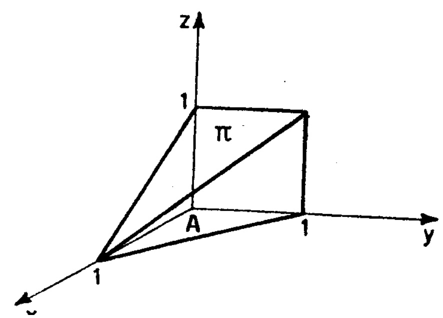
Esercizio 18 – *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_T \operatorname{sen}x\, e^z\, dxdydz$$

dove T *è il tetraedro di vertici* (o,o,o), (1,o,o), (o,1,o), (o,1,1), (o o,1) .

L'insieme T è normale rispetto all'asse z. Indichiamo con A il triangolo del piano (x,y) di vertici (o,o), (1,o), (o,1) e con π il piano passante per i punti (1,o,o), (o,o,1), (o,1,1). L'equazione del piano π è

$$z = 1 - x$$



si ha quindi

$$\iiint_T \operatorname{sen}x\, e^z\, dxdydz = \iint_A \operatorname{sen}x\, dxdy \int_0^{1-x} e^z\, dz =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \operatorname{sen}x(e^{1-x}-1)\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\cos(1-y) - \frac{1}{2}\cos(1-y)e^y - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1-y)e^y - 1 + \frac{e}{2}\right] dy$$

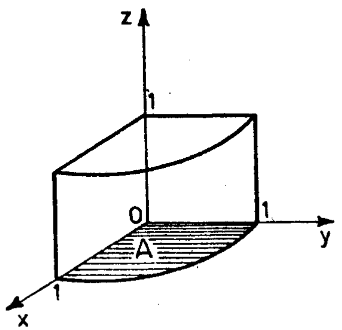
Il lettore completi l'esercizio.

Esercizio 19 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_T xy\, e^{yz}\, dxdydz$$

dove $T = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \leqslant 1,\ \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)\}$

L'insieme T è normale rispetto all'asse z. Indichiamo con A l'insieme del piano (x,y) definito dalla relazione



$$A = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} =$$

$$= \{(x,y)\colon 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}\}.$$

Si ha:

$$\iiint_T xy\, e^{yz}\, dxdydz = \iint_A xydxdy \int_0^1 e^{yz} dz = \iint_A x(e^y-1)\, dxdy =$$

$$= \int_0^1 (e^y-1)dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y^2)(e^y-1)dy = \frac{1}{6}$$

Esercizio 20 — *Nello spazio (x,y,z) consideriamo gli insiemi*

$$A = \{(x,y,z)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$$

$$B = \{(x,y,z)\colon z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$$

Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_{A\cap B} xyz\, dxdydz$$

L'insieme A è un parallelepipedo, l'insieme B è un cono circolare avente come vertice l'origine e situato nel semispazio $z \geqslant 0$. Se indichiamo con Q il quadrato $[0,1]\times[0,1]$ del piano (x,y), l'insieme $A\cap B$ può essere definito dalla relazione

$$A\cap B = \{(x,y,z)\colon (x,y)\in Q,\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2\}$$

In particolare $A\cap B$ è normale rispetto all'asse z. Si ha pertanto

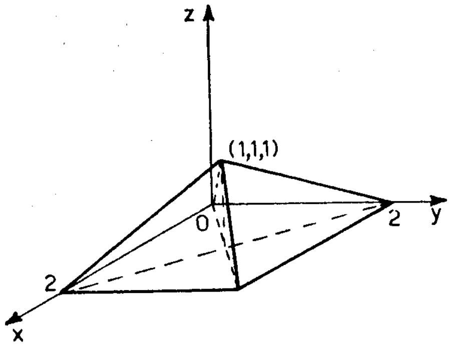
$$\iiint_{A\cap B} xyz\, dxdydz = \iint_Q xydxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 zdz = \frac{1}{2}\iint_Q xy(4-x^2-y^2)dxd$$

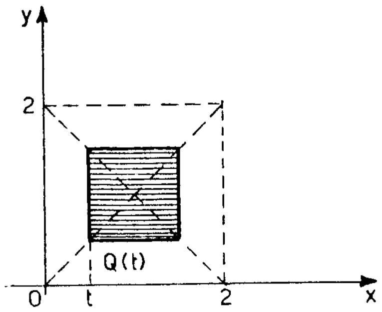
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 xy(4-x^2-y^2)\,dy = \frac{3}{8}$$

Esercizio 21 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A e^z \,dxdydz$$

dove A *è la piramide che ha come base il quadrato* $[0,2]\times[0,2]$ *del piano* (x,y) *e come vertice il punto* (1,1,1).





Indichiamo con Q(t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, la propiezione sul piano (x,y) della sezione della piramide A con il piano z = t. Q(t) è un quadrato di centro il punto (1,1) e lato $2(1-t)$.

Si ha pertanto

$$\iiint_A e^z \,dxdydz = \int_0^1 e^z \,dz \iint_{Q(z)} dxdy$$

E poichè

$$\iint_{Q(z)} dxdy = m[Q(z)] = 4(1-z)^2$$

si ha in definitiva

$$\iiint_{Q(z)} e^z \,dxdydz = 4\int_0^1 (1-z)^2 e^z \,dz$$

Il lettore completi l'esercizio

Esercizio 22 — *Sul piano* (y,z) *si consideri l'insieme* $B = \{(y,z):\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant z^2\}$. *Sia* A *l'insieme misurabile di* $\mathbf{R}^3$ *generato dalla rotazione di* B *attorno all'asse* z. *Sicalcoli l'integrale triplo*

$$\iiint_A (x+z)\,dxdydz$$

Esercizio 23 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A y\, e^z \,dxdydz$$

dove A *è il tetraedro di vertici* (o,o,o), (1,1,o), (o,1,o), (o,1,1).

Esercizio 24 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A \log(z+y+3)\,dxdydz$$

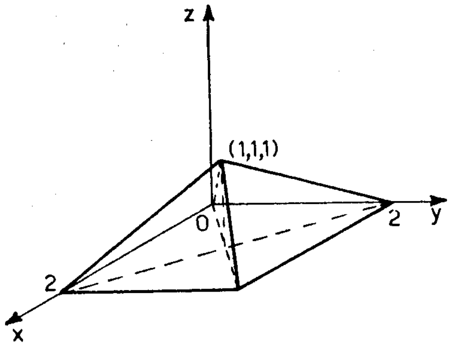
dove A *è il tetraedro di vertici* (o,o,o), (1,1,o) ,(o,1,o), (o,1,−1).

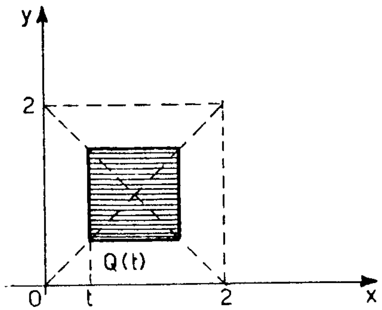
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 xy(4-x^2-y^2)\,dy = \frac{3}{8}$$

Esercizio 21 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A e^z\,dxdydz$$

dove A *è la piramide che ha come base il quadrato* [0,2]×[0,2] *del piano* (x,y) *e come vertice il punto* (1,1,1).





Indichiamo con Q(t), $0 \leqslant t \leqslant 1$, la propiezione sul piano (x,y) della sezione della piramide A con il piano z = t. Q(t) è un quadrato di centro il punto (1,1) e lato 2(1−t).

Si ha pertanto

$$\iiint_A e^z\,dxdydz = \int_0^1 e^z\,dz \iiint_{Q(z)} dxdy$$

E poichè

$$\iint_{Q(z)} dxdy = m[Q(z)] = 4(1-z)^2$$

si ha in definitiva

$$\iiint_{Q(z)} e^z\,dxdydz = 4\int_0^1 (1-z)^2 e^z\,dz$$

Il lettore completi l'esercizio

Esercizio 22 — *Sul piano* (y,z) *si consideri l'insieme* $B = \{(y,z):\ o \leqslant z \leqslant 1,\ o \leqslant y \leqslant z^2\}$. *Sia* A *l'insieme misurabile di* $\mathbf{R}^3$ *generato dalla rotazione di* B *attorno all'asse* z. *Sicalcoli l'integrale triplo*

$$\iiint_A (x+z)\,dxdydz$$

Esercizio 23 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A y\,e^z\,dxdydz$$

dove A *è il tetraedro di vertici* (o,o,o), (1,1,o), (o,1,o), (o,1,1).

Esercizio 24 — *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_A \log(z+y+3)\,dxdydz$$

dove A *è il tetraedro di vertici* (o,o,o), (1,1,o) ,(o,1,o), (o,1,−1).