6.— Massimi e minimi relativi per funzioni reali di più variabili.

Esercizio 1 — *Trovare i massimi e minimi relativi della funzione*

$$f(x,y) = (x-y)(x^2 + y^2 - 1) \qquad (x,y)\in\mathbf{R}^2$$

La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbf{R}^2$ quindi gli eventuali punti di massimo o minimo relativo sono da ricercarsi tra i punti stazionari della f.

cioè tra i punti nei quali si annullano entrambe le derivate prime (T.Cap. 3, n. 11):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^2 + y^2 - 1 + 2x(x-y) = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x^2 - y^2 + 1 + 2y(x-y) = 0$$

Questo sistema di equazioni ha le seguenti soluzioni

$$(6.1) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Per stabilire quali fra questi punti sono punti di massimo o minimo relativo, consideriamo la matrice Hessiana della funzione f

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2y & 2y-2x \\ 2y-2x & 2x-6y \end{pmatrix}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana nei punti (6.1) e troviamo i corrispondenti autovalori:

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{, autovalori: } \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ e } -\frac{4}{\sqrt{2}}$$

Un autovalore è positivo e uno è negativo quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ non è di massimo nè di minimo relativo per f.

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{, autovalori: } -\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ non è punto di massimo o minimo relativo per f.

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{, autovalori: } \frac{12}{\sqrt{6}} \text{ e } \frac{4}{\sqrt{6}}$$

infatti gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$\det\begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{6}}-\lambda & -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{6}}-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{8}{\sqrt{6}}-\lambda\right)^2 - \frac{8}{3} = 0$$

Gli autovalori sono entrambi positivi quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ è un punto di minimo relativo per f e

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

Infine

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \text{ autovalori: } -\frac{12}{\sqrt{6}} \text{ e } -\frac{4}{\sqrt{6}}$$

Gli autovalori sono entrambi negativi e il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ è punto di massimo relativo per f. Risulta

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

Esercizio 2 – *Trovare i punti di massimo e minimo relativo della funzione*

$$f(x,y) = (|x|+y)e^{-xy} \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

La funzione f è di classe C^1 sul semipiano $x > 0$ ed è di classe C^1 sul semipiano $x < 0$. Non è derivabile parzialmente nei punti dell'asse y.

Semipiano $x > 0$: Cerchiamo i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-xy} - y(x+y)e^{-xy} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-xy} - x(x+y)e^{-xy} = 0$$

Questo sistema ha come unica soluzione, nel semipiano $x > 0$, il punto

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana in questo punto; si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2ye^{-xy} + y^2(x+y)e^{-xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (xy-2)(x+y)e^{-xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-xy} + x^2(x+y)e^{-xy}$$

Quindi

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2e}} & -\frac{3}{\sqrt{2e}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2e}} & -\frac{1}{\sqrt{2e}} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono uno positivo e uno negativo

$$\lambda_1 = -2\sqrt{\frac{2}{e}} \qquad \lambda_2 = \sqrt{\frac{2}{e}}$$

quindi il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ non è di massimo o di minimo relativo per la funzione f.

Semipiano $x < 0$: Troviamo i punti stazionari della funzione $f(x,y) =$
$= (y-x)e^{-xy}$ risolvendo il sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-xy} - y(y-x)e^{-xy} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-xy} - x(y-x)e^{-xy} = 0$$

Questo sistema ha come unica soluzione, nel semipiano $x < 0$, il punto

$$x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana in questo punto; si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2ye^{-xy} + y^2(y-x)e^{-xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (xy-2)(y-x)e^{-xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-xy} + x^2(y-x)e^{-xy}$$

quindi

$$H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{e}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{e}} \end{pmatrix}$$

Anche questa matrice ha un autovalore negativo e uno positivo e quindi il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ non è nè di massimo nè di minimo relativo per la funzione f.

Analizziamo ora il comportamento della funzione f nell'intorno dei punti (0,y). Si tratta di fare una analisi diretta in quanto nell'intorno di questi punti la funzione f non è di classe C^1.

f ristretta all'asse y diventa

$$f(0,y) = y$$

E' chiaro quindi che i punti dell'asse y non sono punti di massimo nè di minimo relativo per la f. Infatti fissato uno di questi punti, $P=(0,y^\circ)$, risulta

$$\begin{array}{lll} f(0,y) > f(0,y^\circ) & \text{se} & y > y^\circ \\ f(0,y) < f(0,y^\circ) & \text{se} & y < y^\circ \end{array}$$

e quindi in ogni intorno di P ci sono punti nei quali il valore di f è maggiore di f(P) e punti nei quali il valore di f è minore di f(P).

Conclusione: La funzione f non ha punti di massimo o di minimo relativo in $\mathbf{R}^2$.

Esercizio 3 – *Trovare i punti di massimo e minimo relativo della funzione* $f(x,y) = \operatorname{sen} xy$ *nel quadrato aperto*

$$Q = \{(x,y): |x| < 2,\ |y| < 2\}$$

La funzione f è di classe C^∞ nel quadrato Q. Cerchiamo i punti stazionari

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y \cos xy = 0$$

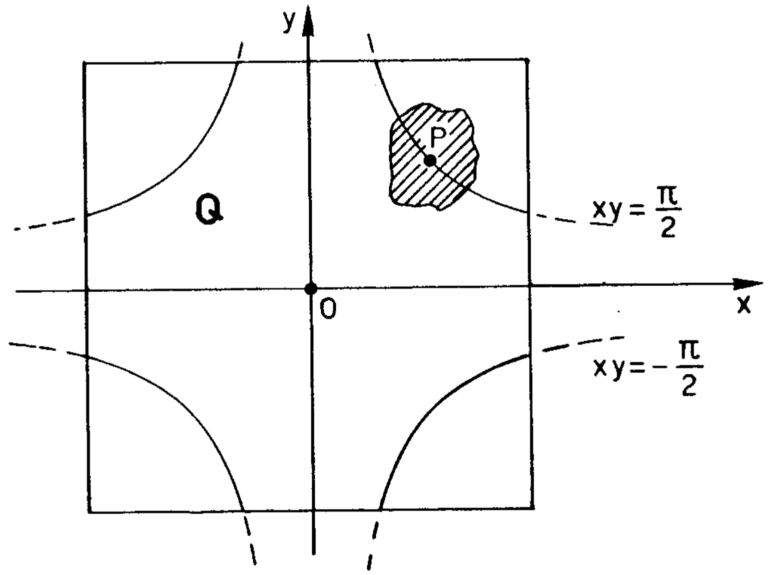
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x \cos xy = 0$$

Le soluzioni di questo sistema sono il punto(0,0) e i punti (x,y) del quadrato Q che appartengono alle iperbole di equazione

$$xy = \frac{\pi}{2} \qquad e \qquad xy = -\frac{\pi}{2}$$

Calcoliamo la matrice Hessiana in questi punti. Risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \operatorname{sen} xy\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy \operatorname{sen} xy\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \operatorname{sen} xy$$



Quindi

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{autovalori: } \lambda = 1 \ \text{ e } \ \lambda = -1$$

Il punto (0,0) non è di massimo nè di minimo relativo.

Nei punti dell'iperbole $xy = \frac{\pi}{2}$ che appartengono a Q risulta

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{4x^2} & -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & -x^2 \end{pmatrix} \qquad \text{autovalori: } \lambda=0 \text{ e } \lambda=-\left(\frac{\pi^2}{4x^2}+x^2\right)<0$$

In questi punti la matrice Hessiana è semidefinita negativa; questa è condizione necessaria ma non sufficiente perchè i punti in questione siano di massimo relativo. E' necessaria una indagine diretta: Sia $P \in Q \cap \{(x,y): : xy = \frac{\pi}{2}\}$; quando (x,y) varia in un intorno abbastanza piccolo di P, il numero xy varia in un intorno abbastanza piccolo di $\frac{\pi}{2}$ e in questo punto la funzione sent ha un massimo (come è ben noto).

Conclusione: se (x,y) varia in un intorno abbastanza piccolo di P è

$$\text{sen}xy \leqslant \text{sen}P = 1$$

quindi i punti $P \in Q \cap \{(x,y): xy = \frac{\pi}{2}\}$ sono punti di massimo relativo.

In modo del tutto analogo si prova che nei punti dell'insieme $Q \cap \{(x,y): xy = -\frac{\pi}{2}\}$ la matrice Hessiana ha come autovalori

$$0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\pi^2}{4x^2}+x^2\right) > 0$$

quindi è semidefinita positiva. Anche in questo caso è necessaria una indagine diretta e si prova che i punti di $Q \cap \{(x,y): xy = -\frac{\pi}{2}\}$ sono punti di minimo relativo per f in quanto $t \to \text{sen}t$ ha un minimo nel punto $t = -\frac{\pi}{2}$.