

Esercizi sulle serie di potenze

1. Mostrare che per ogni $x \in]-1, 1[$ vale:

$$\begin{aligned} \log \frac{1+x}{1-x} &= 2x \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \dots + \frac{x^{2m}}{2m+1} + \dots \right) \\ &= 2x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2m+1} \end{aligned}$$

2. a) Determinare il raggio di convergenza ρ della serie di potenze

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^{2m}$$

b) Posto $R_k(x) = \sum_{m \geq k} (m+1) x^{2m}$ si verifichi che

$$(1-x^2) R_k(x) = k x^{2k} + \frac{x^{2k}}{1-x^2} \quad \text{per } |x| < \rho$$

c) Si calcoli la somma della serie data.

3. Trovare una serie di potenze che su un opportuno intervallo abbia per somma $\frac{1}{(x+2)^2}$.

4. Trovare raggio di convergenza e somma di

$$\sum_{m \geq 0} e^{-m} x^{2m}$$

5. Sviluppare la funzione $x \mapsto \sin x$ in serie di potenze di centro $x = \frac{\pi}{2}$.

6. Determinare raggio di convergenza e somma di

$$\sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m(m+1)}$$

7. Sviluppare in serie di potenze la funzione

$$\log(x^2 - 3x + 2)$$

specificando per quali x valga lo sviluppo.

8. Risolvere per serie di potenze:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = -2 \sin x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

9. Determinare raggio di convergenza e somma di

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} x^{2m}, \quad \sum_{m=2}^{\infty} m^2 x^m, \quad \sum_{m=0}^{\infty} 2^m x^{3m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m}}{(m-1)!}$$

10. Dimostrare la formula

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

dove $a_m = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$, specificando

per quali x essa valga.