17. Determinare l'insieme di convergenza della serie:

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}.$$

$[x < 1,\ x > 3]$

Cap. IV
SERIE DI POTENZE

1. *Determinare l'***intervallo di convergenza** *delle seguenti serie di potenze:*

a) $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots$ $[-1 \leqslant x < 1]$

b) $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \dots \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \dots$ $[1 \leqslant x \leqslant 3]$

c) $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ [*Per ogni x*]

d) $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \dots + n!(x-5)^n + \dots$ $[x = 5]$

e) $1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \frac{x^9}{10^3} + \dots$ $[-\sqrt[3]{10} < x < \sqrt[3]{10}]$

f) $2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + \frac{8x^{15}}{5} + \frac{16x^{20}}{7} + \dots$ $\left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}} \leqslant x < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right]$

g) $\frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{3!} + \frac{(x+1)^3}{5!} + \dots$ [*Per ogni x*]

h) $(x-4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \dots$ $[3 \leqslant x < 5]$

i) $\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(x-1)^3}{2^3} + \dots$ $[-1 < x < 3]$

l) $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \dots + (nx)^n + \dots$ $[x = 0]$

m) $5x + \frac{5^2x^2}{2!} + \frac{5^3x^3}{3!} + \frac{5^4x^4}{4!} + \dots + \frac{5^nx^n}{n!} + \dots$ [*Per ogni x*]

n) $x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \dots$ (Porre $x^2 = t$). $[-1 < x < 1]$

o) $\frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{8^2 \cdot 5} + \frac{x^9}{8^3 \cdot 9} + \frac{x^{12}}{8^4 \cdot 13} + \dots$ $[-2 \leqslant x < 2]$

p) $\frac{x}{2+3} + \frac{x^2}{2^2+3^2} + \frac{x^3}{2^3+3^3} + \dots$ $[-3 < x < 3]$

q) $\frac{1}{2}\,\frac{x-1}{2} + \frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(\frac{x-1}{2}\right)^4 + \dots$ $[-1 < x < 3]$

r) $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \dots$ $[-1 \leqslant x \leqslant 1]$

s) $\sum_{1}^{\infty}{}_k \left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k (x-2)^{2k}$, $\left(\text{Usare la formula: } R = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\right)$. $[2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}]$

t) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$, (applicare il criterio di CAUCHY). $[0 \leqslant x \leqslant 2]$

u) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$, (applicare il criterio di d'ALEMBERT). $[\,|x| \leqslant 1]$

2. *Determinare il* **raggio di convergenza** *delle seguenti serie di potenze:*

a) $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, n x^n$. [1]

b) $\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{n x^n}{n+1}$. [1]

CONSIDERARE VAL. ASS. $|a_n|$

c) $\sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \frac{x^n}{n}$. $= 1$ [1]

d) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(2x)^n}{n^2}$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

e) $\sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n(5n+2)x^n$. $= 1$ [1]

f) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$. [2]

g) $\sum_{0}^{\infty}{}_n 3^n x^n$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

h) $\sum_{2}^{\infty}{}_n \frac{3^{n+1}x^n}{n^2-1}$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

i) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{n}{3n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$. [2]

l) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \ln(n+1)x^n$. [1]

m) $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, n! x^n$. [0]

n) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{n! x^n}{n^n}$. [*e*]

o) $\sum_{0}^{\infty}{}_n (2^n + 3^n)x^n$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

p) $\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$. [3]

$q)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{(x+5)^{2n+1}}{2n4^n}$. [2]

$r)$ $\sum_1^\infty {}_n\, n(n+1)x^n$. [1]

$s)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^n}{n!}$. [$+\infty$]

$\boxed{t)}$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

$u)$ $\sum_1^\infty {}_n \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot x^n$. [4]

$\boxed{v)}$ $\sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ [$+\infty$]

$w)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^n}{(2n-1)2^n}$. [2]

$z)$ $\sum_1^\infty {}_n\, n^n x^n$. [0]

$\alpha)$ $\sum_0^\infty {}_n\, 3^{n^2}\cdot x^{n^2}$. $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

$\beta)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$. [1]

$\gamma)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^n}{n^{n+3}}$. [$\infty +$]

$\delta)$ $\sum_1^\infty {}_n\, x^n e^{-n}$. [$e$]

$\varepsilon)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^n}{k^n n^2}$. [$k$]

3. *Applicando i teoremi di* **derivazione** *e* **integrazione** *per serie, calcolare la somma delle seguenti serie, dimostrando che è $R = 1$ e che risulta:*

$a)$ $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

[Si osservi che la serie data è la derivata della serie: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ che, per $|x| < 1$, ha come somma $\dfrac{1}{1-x}$, la cui derivata è $\dfrac{1}{(1-x)^2}$]

$b)$ $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots = -\ln(1-x)$.

[Integrare l'eguaglianza $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$ tra gli estremi 0 e $x\ldots$]

$c)$ $\sum_0^\infty {}_n (n+1)x^n = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$d)$ $\sum_1^\infty {}_n\, n(n+1)x^{n-1} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

$e)$ $\sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

$f)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

$g)$ $\sum_1^\infty {}_n (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg}x$.

$h)$ $\sum_1^\infty {}_n \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

$i)$ $\sum_0^\infty {}_n (-1)^n 2nx^{2n-1} = -2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

4. *Utilizzando gli sviluppi in serie di* MAC-LAURIN *delle funzioni e^x,* sen$x$, cos$x$, $\ln(1+x)$ *e* $(1+x)^m$, *dimostrare che valgono i seguenti* **sviluppi in serie** *di* MAC-LAURIN, *negli intervalli a fianco indicati:*

1) $3^x = 1 + x\ln 3 + \dfrac{x^2\ln^2 3}{2!} + \dfrac{x^3\ln^3 3}{3!} + \ldots$. $[-\infty < x < +\infty]$

2) $e^{-2x} = 1 - \dfrac{2x}{1!} + \dfrac{4x^2}{2!} - \dfrac{8x^3}{3!} + \ldots$. $[-\infty < x < +\infty]$

3) $\cos^2 x = 1 - \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{2^3}{4!}x^4 - \dfrac{2^5}{6!}x^6 + \ldots$. $[-\infty < x < +\infty]$

4) $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{2^3}{4!}x^4 + \dfrac{2^5}{6!}x^6 + \dfrac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$. $[-\infty < x < +\infty]$

5) $e^x \operatorname{sen}x = x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3!} - \dfrac{2^2x^5}{5!} - \dfrac{2^3x^6}{6!} - \dfrac{2^3x^7}{7!} + \ldots$. $[-\infty < x < +\infty]$

6) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)x^4 + \ldots$. $[|x| < 1]$

[*Considerare gli sviluppi di* $\ln(1+x)$ e $\dfrac{1}{1+x}$, *e moltiplicare secondo* CAUCHY ...].

7) $\ln\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{x^8}{4} + \ldots\right)$. $[|x| \leq 1]$

[*Si osservi che* $\ln\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$, *e porre* $x^2 = t, \ldots$].

8) $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\sum_0^\infty {}_n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. [Si ha $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x), \ldots$].

9) $\ln(1 + x - 2x^2) = \sum\limits_{1}^{\infty}{}_n \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n - 1}{n} \cdot x^n .$ $\left[-\dfrac{1}{2} < x \leqslant \dfrac{1}{2} \right]$

10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 1 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{14}{81}x^3 + \dots .$ $[\,|x| < 1]$

11) $\dfrac{3x-4}{(x-1)^2} = -\sum\limits_{0}^{\infty}{}_n (n+4)x^n.$ $[\,|x| < 1]$

$\left[\textit{Si osservi che: } \dfrac{3x-4}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{1-x} - \dfrac{1}{(1-x)^2}, \dots \right].$

12) $\dfrac{x}{25+x^2} = \sum\limits_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{25^{n+1}}.$ $[-5 < x < 5]$

$\left[\textit{Si osservi che: } \dfrac{x}{25+x^2} = \dfrac{x}{25} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{x}{5}\right)^2}, \dots \right].$

13) $xe^{-2x} = x + \sum\limits_{2}^{\infty}{}_n \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{(n-1)!} x^n.$ $[-\infty < x < +\infty]$

14) $(x+1)e^{-x} = 1 + \sum\limits_{2}^{\infty}{}_n (-1)^{n-1} \dfrac{n-1}{n!} x^n.$ $[-\infty < x < +\infty]$

15) $\dfrac{2x-3}{(x-1)^2} = -\sum\limits_{0}^{\infty}{}_n (n+3)x^n.$ $[\,|x| < 1]$

16) $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3} = -\sum\limits_{0}^{\infty}{}_n \left(1 + \dfrac{2}{3^{n+1}}\right) x^n.$ $[\,|x| < 1]$

17) $\cos 2x = 1 + \sum\limits_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}.$

18) $\operatorname{sen} 3x + x \cos 3x = 2 \sum\limits_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{(n+2)3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$ $[-\infty < x < +\infty]$

19) $\dfrac{x}{9+x^2} = \sum\limits_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}.$ $[-3 < x < 3]$

20) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots .$ $[-1 < x < 1]$

$\left[\textit{Risulta: } \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \textit{ e porre } -x^2 = t, \dots \right].$

21) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^2}{2^3} + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \dfrac{x^4}{2^5} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \dfrac{x^6}{2^7} + \dots$

$+ \dots \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n} \cdot \dfrac{x^{2n}}{2^{2n+1}} + \dots .$ $[-2 < x < 2]$

22) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots .$

$[\,|x| < 1]$

23) $\dfrac{a}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x}{p} = \dfrac{a}{2} \sum\limits_{0}^{\infty}{}_n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!\,p^{2n}}.$ $[-\infty < x < +\infty]$

24) $\ln(2+x) = \ln 2 + \sum\limits_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n \cdot 2^n}.$ $[-2 < x \leqslant 2]$

25) $\ln(3+5x) = \ln 3 + \sum\limits_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n+1} \dfrac{5^n}{3^n \cdot n} x^n.$ $\left[-\dfrac{3}{5} < x \leqslant \dfrac{3}{5} \right]$

26) $\ln(x^2+5x+4) = \ln 4 + \sum\limits_{1}^{\infty}{}_n (-1)^{n+1} \left(1 + \dfrac{1}{2^{2n}}\right) \dfrac{x^n}{n}.$ $[-1 < x \leqslant 1]$

27) $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots\right).$

$[-\infty < x < +\infty]$

28) $\cos(x+\alpha) = \sum\limits_{0}^{\infty}{}_n \operatorname{sen}\left(\alpha + \dfrac{n+1}{2}\pi\right) \dfrac{x^n}{n!}.$

29) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum\limits_{1}^{\infty}{}_n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n(2n+1) \cdot n!} x^{2n+1}.$ $[-1 \leqslant x \leqslant 1]$

$\left[\textit{Servirsi della formula: } \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, \textit{ e dello sviluppo in serie di } \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \dots \right].$

30) $\ln(x+a) = \ln a + \dfrac{x}{a} - \dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{x^3}{3a^3} - \dfrac{x^4}{4a^4} + \dots$ [con $a > 0$; $-a < x \leqslant a$]

31) $\sqrt{x+a} = \sqrt{a}\left[1 + \dfrac{x}{2a} - \dfrac{x^2}{(2a)^2 \cdot 2!} + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{(2a)^3 \cdot 3!} - \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^5}{(2a)^5 \cdot 4!} + \dots\right].$

[con $a > 0$; $-a < x \leqslant a$]

32) $\operatorname{ch}^2(x^2) = 1 + \dfrac{2}{2!}x^4 + \dfrac{2^3}{4!}x^8 + \dfrac{2^5}{6!}x^{12} + \dfrac{2^7}{8!}x^{16} + \dots .$ $[-\infty < x < +\infty]$

33) $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \dfrac{2x^3}{3!} - \dfrac{4x^5}{5!} + \dots + \sqrt{2^n} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{4} \dfrac{x^n}{n!} + \dots$.

$[-\infty < x < +\infty]$

34) $\dfrac{e^x - 1}{x} = 1 + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{3!} + \dots + \dfrac{x^{n-1}}{n!} + \dots$. $[-\infty < x < +\infty]$

35) $\ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = x + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$. $[-1 < x < 1]$

$\left[\textit{Servirsi della formula: } \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\int_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}, \dots \right]$.

36) $e^{-x} \cos \sqrt{3x} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n \dfrac{2^n \cos \dfrac{2n\pi}{3}}{n!} x^n$.

37) $e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{3x} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n \dfrac{2^n \operatorname{sen} \dfrac{2n\pi}{3}}{n!} x^n$.

38) $e^{-\frac{x}{4}} \cos \left(\dfrac{1}{4} x + \alpha \right) = \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n \dfrac{\cos \left(\dfrac{3\pi n}{4} + \alpha \right)}{2^{\frac{3n}{2}} n!} x^n$.

39) $e^{-\frac{x}{4}} \operatorname{sen} \left(\dfrac{1}{4} x + \alpha \right) = \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n \dfrac{\operatorname{sen} \left(\dfrac{3\pi n}{4} + \alpha \right)}{2^{\frac{3n}{2}} n!} x^n$.

5. Sviluppare in serie *di* Taylor, *di* **punto iniziale** *a fianco indicato, le seguenti funzioni*:

a) $f(x) = \cos x, \; x = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)^3 + \dots \right].$$

b) $f(x) = e^x, \;\; x = 2.$ $\left[e^2 + e^2(x-2) + \dfrac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \dfrac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \dots \right]$

c) $f(x) = e^x, \;\; x = -2.$ $\left[e^{-2} \left(1 + \displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}_n \dfrac{(x+2)^n}{n!} \right) \right]$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7, \;\; x = 1.$ $[-3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3]$

e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2, \;\; x = -4.$

$[-78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3]$

f) $f(x) = \ln x, \;\; x = 1.$ $\left[(x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 - \dfrac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \right]$

[Sostituire x con $x-1$ nello sviluppo di $\ln(1+x)$; per $0 < x \leqslant 2$]

g) $f(x) = \cos^2 x, \; x = \dfrac{\pi}{4}$. $\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{4^{n-1} \left(x - \dfrac{\pi}{4} \right)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right]$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \;\; x = 1.$ $\left[\displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n (x-1)^n; \text{ per } 0 < x < 2 \right]$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \;\; x = -1.$ $\left[\displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n (n+1)(x+1)^n, \text{ per } -2 < x < 0 \right]$

l) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}, \;\; x = -4.$

$\left[\displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n (2^{-n-1} - 3^{-n-1})(x+4)^n, \text{ per } -6 < x < -2 \right]$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 7}, \;\; x = -2.$

$\left[\displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}, \text{ per } -2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3} \right]$

n) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; x = 4.$

$\left[2 + \dfrac{x-4}{2^2} - \dfrac{1}{4} \dfrac{(x-4)^2}{2^4} + \dfrac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \dfrac{(x-4)^3}{2^6} + \dots; \text{ per } 0 \leqslant x \leqslant 8 \right]$

o) $f(x) = \operatorname{tg} x, \;\; x = \dfrac{\pi}{4}$. $\left[1 + 2 \left(x - \dfrac{\pi}{4} \right) + 2 \left(x - \dfrac{\pi}{4} \right)^2 + \dots \right]$

p) $f(x) = \ln x, \; x = \dfrac{1-x}{1+x}$. $\left[-2 \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}_n \dfrac{1}{2n+1} \left(\dfrac{1-x}{1+x} \right)^{2n+1}, \; 0 < x < +\infty \right]$

$\left[\text{Porre } \dfrac{1-x}{1+x} = t \text{ e sviluppare } \ln t, \dots \right]$

$q)$ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, $x = \dfrac{x}{1+x}$.

$$\left[\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^n, \text{ per } -\frac{1}{2} < x < +\infty\right]$$

6. *Trovare i primi termini (tre o quattro) dello sviluppo in serie di potenze delle seguenti funzioni, provando che risulta:*

$a)$ $\operatorname{tg}x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \ldots$.

$b)$ $e^{\cos x} = e\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{4x^4}{4!} - \dfrac{31x^6}{720} + \ldots\right)$.

$c)$ $e^{\operatorname{arctg}x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{7x^4}{24} + \ldots$.

$d)$ $\ln(1+e^x) = \ln 2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^4}{192} + \ldots$.

$e)$ $e^{\operatorname{sen}x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + \ldots$. $f)$ $(1+x)^x = 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{5}{6}x^4 - \ldots$.

$g)$ $\ln\cos x = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} - \ldots$. $h)$ $e^x\operatorname{sen}x = x + x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots$.

$i)$ $\operatorname{th}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \ldots$. $l)$ $\sec x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \ldots$.

7. *Con l'uso delle serie, calcolare le seguenti espressioni, con l'***approssimazione** *indicata nel risultato:*

$a)$ $\cos 10^0$; $\operatorname{sen}1^0$; $\operatorname{sen}18^0$; $\cos 1^0$; $\operatorname{sen}10^0$; $\cos 18^0$; $\operatorname{sen}9^0$; $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$; $\cos 1$.

[0,9848; 0,0175; 0,3090; 0,9998; 0,17365; 0,9511; 0,1564; 0,7071; 0,5403]

$b)$ $\sqrt{e}$; $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; $\dfrac{1}{e}$; e^2; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$. [1,64872; 0,60653; 0,3679; 7,389; 0,7788]

$c)$ $\ln 5$; $\log 5$; $\log e$; $\ln 0{,}98$; $\ln 1{,}1$; $\ln 3$; $\ln 10$.

[1,609; 0,699; 0,43429; $-$ 0,0202; 0,0953; 1,0986; 2,3026]

$d)$ $\sqrt[3]{30}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt[3]{500}$; $\sqrt[5]{250}$; $\sqrt{84}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{1{,}06}$.

[3,107; 4,121; 8,367; 3,017; 9,165; 1,2598; 1,0196]

$e)$ $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$; $\operatorname{ch}0{,}3$. [0,1973; 1,0453]

8. *Qual è l'errore commesso se si prende approssimativamente:*

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\,? \qquad \left[\,|R| < \frac{e}{5!} < \frac{1}{40}\right]$$

9. Con quale precisione si calcola il numero $\dfrac{\pi}{4}$ se si ricorre alla serie:

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

quando si prende la somma dei primi 5 termini, per $x = 1$? $\left[\,|R| < \dfrac{1}{11}\right]$

10. Determinare per quali valori dell'angolo x, si può sostituire a $\operatorname{sen}x$, la ridotta s_2 del suo sviluppo in serie, affinché l'errore che si commette sia minore di 0,0001. [$|x| < 14^o55'33''$]

11. Dimostrare che la *catenaria*, di equazione $f(x) = \operatorname{ch}\dfrac{x}{p}$ può essere approssimata, nell'intorno dell'origine, da una parabola.

12. Per quali valori di x, la formula approssimata:

$$\operatorname{sen}x \approx x,$$

dà un errore minore, rispettivamente, di 0,01 e 0,001?

[$|x| < 0{,}39$; $|x| < 0{,}18$]

13. *Con l'uso delle serie, calcolare i seguenti* **integrali**, *con l'approssimazione indicata nel risultato:*

$a)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx = 0{,}94608$. $b)$ $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}7468$.

$c)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x^2)dx = 0{,}1571$. $d)$ $\displaystyle\int_0^5 e^{\sqrt{x}}dx = 25{,}13$.

e) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\text{arctg}x}{x}\,dx = 0,487.$

f) $\displaystyle\int_0^{1} \cos\sqrt{x}\,dx = 0,764.$

g) $\displaystyle\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx = 0,071.$

h) $\displaystyle\int_0^{1} e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx = 0,9226.$

i) $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{\text{sen}x}{\sqrt{1-x}}\,dx = 0,0214.$

l) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = 0,494.$

m) $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{\text{sen}x}{x}\,dx = 0,1996.$

n) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}\,dx = 0,102.$

o) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0,3230.$

p) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0,4971.$

q) $\displaystyle\int_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx = 3,518.$

r) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3\,\text{arctg}x\,dx = 0,012.$

s) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\text{sen}x}{\sqrt{x}}\,dx = 0,621.$

t) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+x^3}\,dx = 0,2505.$

u) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\,e^x\,dx = 0,026.$

14. *Tenendo presenti le eguaglianze:*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^2}; \qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{(2n-1)^2}; \qquad \frac{\pi^2}{12} = \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

(*che verranno dimostrate al* cap. V, n. 5), *calcolare i seguenti* **integrali**, *provando che risulta*:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12};$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6};$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$

15. *Calcolare, mediante integrazione per serie, i seguenti integrali, provando che risulta:*

a) $\displaystyle\int_a^x \frac{e^x}{x}\,dx = \ln\frac{x}{a} + \sum_1^\infty{}_n \frac{x^n-a^n}{n!\cdot n}, \qquad (a>0).$

b) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = x + \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, \qquad |x|<1.$

c) $\displaystyle\int_0^x \text{sen}(x^2)\,dx = \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)}.$

d) $\displaystyle\int_1^a \sqrt{\ln x}\,dx = 2(\ln a)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\ln a}{1!} + \frac{1}{7}\cdot\frac{(\ln a)^2}{2!} + \frac{1}{9}\cdot\frac{(\ln a)^3}{3!} + \ldots\right],$

($a>1$. Si trasformi dapprima l'integrale ponendo $x = e^{t^2}$).

e) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx = x + \sum_1^\infty{}_n \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{x^{3n+1}}{3n+1}, \qquad |x|<1.$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\text{sen}x}\,dx = \frac{\pi+2}{2} + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{(2n+1)!}\,\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$

$g)\ \displaystyle\int_0^x \cos(x^2)dx = \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}{}_n\ (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}.$

$h)\ \displaystyle\int x^3(1+x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx = c + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^7}{7} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^{10}}{10} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{13}}{13}\dots,$

$\left(\text{Si trasformi dapprima l'integrale ponendo } x = t^{\frac{1}{3}}\right).$

$i)\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx = \frac{x^2}{2} + \overset{\infty}{\underset{1}{\Sigma}}{}_n\ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{3n+2}}{3n+2}, \qquad |x|<1.$

16. *Con l'uso delle serie, calcolare i seguenti* **limiti**, *provando che risulta:*

$a)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3} = \frac{1}{3};$ $\qquad b)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x} = 1;$

$c)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} = 1;$ $\qquad d)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{arctg}x}{x^3} = \frac{1}{6};$

$e)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3} = \frac{1}{6};$ $\qquad f)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x)-x^3}{x^5} = \frac{1}{4};$

$h)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)} = 1;$ $\qquad g)\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2};$

$i)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right) = \frac{2}{3};$ $\qquad l)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}\right) = \frac{1}{3};$

$m)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\operatorname{sen}x}-\frac{3}{x^4}\right) = \frac{1}{60};$ $\qquad n)\ \displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(1-e^{x-2})\operatorname{sen}(x-2)}{\operatorname{tg}(x-2)\ln(x-1)} = -1;$

$o)\ \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\ln x} = 3;$ $\qquad p)\ \displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1};$

$q)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\cos x-1} = -1;$ $\qquad r)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{(1+x)^{x^{-1}}}\right)^{x^{-1}} = e^{\frac{1}{2}};$

$s)\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\ln\left(\frac{2+x}{x}\right)}{3\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\frac{3}{x}} = -2;$

$t)\ \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\cdot\operatorname{sen}x\cdot(1-\operatorname{sen}x)}{\ln^3\left(\frac{2+2x-\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{2};$

$u)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x} = \frac{1}{3};$ $\qquad v)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2} = -\frac{1}{2};$

$w)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12};$ $\qquad z)\ \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\operatorname{sen}x - x(1+x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$

Serie a termini complessi:

17. *Mettere sotto forma trigonometrica ed esponenziale il numero complesso:*

$z = 3 + i\sqrt{3}.$ $\qquad \left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right);\ 2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}\right]$

18. *Mettere sotto forma esponenziale i numeri complessi:*

$a)\ z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$ $\qquad \left[2\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}\right]$

$b)\ z = \sqrt{3} + i.$ $\qquad \left[2e^{\frac{\pi}{6}i}\right]$

$c)\ z = -i.$ $\qquad \left[e^{-\frac{\pi}{2}i}\right]$

19. *Applicando le formule di* EULERO, *dimostrare che:*

$a)\ \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$

$b)\ \cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x.$

20. *Esprimere* $\operatorname{sen}^3 x$ *come combinazione lineare di* $\operatorname{sen} x$ *e* $\operatorname{sen} 3x$:

$$\left[\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x\right]$$

21. *Determinare il modulo* ρ *e l'argomento* φ *dei seguenti numeri complessi:*

a) e^i, $[\rho = 1,\ \varphi = 1]$. *b)* e^{2-3i}, $[\rho = e^2,\ \varphi = -3]$.

c) $-e^{1+i}$, $[\rho = e,\ \varphi = \pi + 1]$.

22. *Determinare la parte reale « a » e il coefficiente « b » dell'unità immaginaria, dei numeri complessi:*

1) $\operatorname{sen} i$. $\left[a = 0,\ b = \dfrac{e^2 - 1}{2e}\right]$ 2) $\cos i$. $\left[a = \dfrac{1 + e^2}{2e},\ b = 0\right]$

3) $\cos(3 + i)$. $\left[a = \dfrac{1 + e^2}{2e}\cos 3,\ b = \dfrac{1 - e^2}{2e}\operatorname{sen} 3\right]$

23. Provare che risulta:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i.$$

24. Applicando una formula di Eulero, provare che i^i ammette un numero infinito di valori, che sono tutti reali:

$$\left[i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right]$$

Esercizi di riepilogo.

25. Sia data la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

a) Calcolare le derivate d'ordine 1°, 2° e 3° e dedurre una legge per la derivata d'ordine n.

b) Scrivere lo sviluppo di Mac-Laurin d'ordine $(n + 1)$.

c) Calcolare in funzione di x e di n il resto di Lagrange dello sviluppo di cui il punto *b*). Dedurre, poi, il valore del numero θ in funzione di x e di n.

d) Applicazione numerica: per $x = \dfrac{31}{32}$, $n = 3$, calcolare θ.

$$\left[a)\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}};\quad b)\ \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{(1 - \theta x)^{n+2}};\right.$$

$$\left. c)\ \theta = \frac{1 - \sqrt[n+2]{1 - x}}{x};\quad d)\ \theta = \frac{16}{31}\right]$$

26. Scrivere lo sviluppo di Mac-Laurin, del 4° ordine della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x},$$

e calcolare il valore del numero θ che interviene in questo sviluppo per $x = -\dfrac{211}{243}$.

27. Sviluppare in serie di potenze la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}.$$

Qual è il suo raggio di convergenza R?

Usando la serie trovata calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x + x^2}\,dx.$$

$$\left[\text{Posto: } \frac{1}{1 + x + x^2} = (1 - x)\cdot\frac{1}{1 - x^3},\ \textit{si trova:}\right.$$

$$f(x) = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \dots + x^{3n} - x^{3n+1} + \dots;$$

$$\left. R = 1;\ \int_0^1 f(x)\,dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3n + 1} - \frac{1}{3n + 2} + \dots\right]$$

28. Calcolare l'integrale:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x},$$

sviluppando in serie la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$. Dedurre un valore approssimato dell'integrale I, a meno di 0,1.

$$\left[I = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n + 1} + \dots;\quad S_9 = \frac{1879}{2520}\right]$$

29. Sviluppare in serie di potenza le seguenti funzioni $f(x)$, trovando il raggio di convergenza. Calcolare, poi, l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

$$\left[1 - x + x^4 - x^5 + \dots; \int_0^1 f(x)dx = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right]$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x+x^2}$.

$$\left[1 + x - x^3 - x^4 + \dots; \int_0^1 f(x)dx = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots\right]$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x+x^2-x^3}$.

$$\left[1 + x + x^4 + x^5 + \dots; \int_0^1 f(x)dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots\right]$$

30. Calcolare modulo e argomento del seguente numero complesso:

$$z = \frac{e^{3+2i}}{(-1+i\sqrt{3})^2}. \qquad \left[\rho = \frac{e^3}{4};\ \varphi = 2 + \frac{2\pi}{3}\right]$$

31. Calcolare l'area limitata dalla curva $y^2 = x^3 + 1$, dell'asse y e dalla retta $x = \dfrac{1}{2}$, con un'approssimazione a meno di 0,001. [1,015]

32. Calcolare l'area della parte di piano limitata dalla curva $x^4 + y^4 = 1$, con un'approssimazione a meno di 0,01. [3,71]

[Non è conveniente calcolare l'area con la formula $S = 4\int_0^1 \sqrt[4]{1-x^4}dx$, perché per $x = 1$ la corrispondente serie converge lentamente. Conviene calcolare l'area del settore limitato dalla curva, dall'asse y e dalla bisettrice del primo quadrante, perché questo conduce a una serie rapidamente convergente].

33. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva $25y^2 = 4x^5$ tra la cuspide e il punto di intersezione con la parabola $5y = x^2$, a meno di 0,0001. [0,2505]

34. Calcolare la lunghezza dell'arco di sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ per un mezzo periodo, approssimata a meno di 0,001. [3,821]

35. La figura limitata dalla curva $y = \operatorname{arctg} x$, dall'asse x e dalla retta $x = \dfrac{1}{2}$ ruota attorno all'asse x. Calcolare il volume del solido di rivoluzione così generato, a meno di 0,001. [0,119]

36. Calcolare (a meno di 0,001) le coordinate del baricentro dell'arco di iperbole $y = \dfrac{1}{x}$, avente come estremi i punti di ascissa $x_1 = \dfrac{1}{4}$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

$[x_G = 0{,}347;\ \ y_G = 2{,}996]$

Cap. V
SERIE DI FOURIER

1. Dimostrare che se la funzione continua $f(x)$ soddisfa la condizione:

$$f(x+\pi) = -f(x),$$

allora i coefficienti *pari* della sua serie di Fourier sono eguali a zero, cioè:

$a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \dots = 0.$

2. Dimostrare che se la funzione continua $f(x)$ soddisfa la condizione:

$$f(x+\pi) = f(x),$$

allora i coefficienti *dispari* della sua serie di Fourier sono eguali a zero.

3. Dimostrare che se la funzione continua $f(x)$ soddisfa le condizioni:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{e} \quad f(x+\pi) = -f(x),$$

allora: $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0$ e $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0.$

4. Dimostrare che se la funzione continua $f(x)$ soddisfa le condizioni:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{e} \quad f(x+\pi) = -f(x),$$

allora: $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$ e $b_2 = b_4 = b_6 = \dots = 0.$

5. Dimostrare che se la funzione continua $f(x)$ soddisfa le condizioni:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{e} \qquad f(x+\pi) = f(x),$$

allora: $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 0 \qquad \text{e} \qquad a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0.$

6. Dimostrare che se la funzione continua $f(x)$ soddisfa le condizioni:

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{e} \qquad f(x+\pi) = f(x),$$

allora: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 0 \qquad \text{e} \qquad b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0.$

7. Sviluppare *le seguenti funzioni* **in serie di** Fourier, *nell'intervallo a fianco indicato*:

1) $f(x) = e^x, \quad [-\pi, \pi].$ $\quad \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n\,\mathrm{sen}\,nx)\right)\right]$

2) $f(x) = x^3, \quad [-\pi, \pi].$ $\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\mathrm{sen}\,nx\right]$

3) $f(x) = |x|, \quad [-1, 1].$ $\quad \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\right]$

4) $f(x) = \begin{cases} -h, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ h, & \text{per } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$ $\quad \left[\frac{4h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(2n+1)x}{2n+1}\right]$

$\left[\text{Considerare il } \textit{caso particolare}\text{: } h = \frac{\pi}{4}\right]$

5) $f(x) = \begin{cases} h, & \text{per } -\pi < x \leqslant 0 \\ k, & \text{per } 0 < x < \pi. \end{cases}$ $\quad \left[\frac{h+k}{2} - \frac{2(h-k)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n+1)x}{2n+1}\right]$

6) $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{per } -\pi < x \leqslant 0 \\ bx, & \text{per } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$ $\quad \left[\frac{b-a}{4}\pi - \frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + (a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\right]$

[Considerare i *casi particolari*: $a = b = 1$; $a = -1, b = 1$; $a = 0, b = 1$; $a = 1, b = 0$]

7) $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 3x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

$$\left[\frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1} - \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \ldots\right)\right]$$

−?

8) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{per } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{per } 0 < x < \pi. \end{cases}$

$$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\right]$$

9) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } -\pi < x \leqslant 0 \\ 2x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

$$\left[\frac{1}{4}\pi - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + 3\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1} - \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3} - \ldots\right)\right]$$

$-5?$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} 3(-1)^{k-1}\,\mathrm{sen}\,kx$

10) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi+x}{2}, & \text{per } -\pi \leqslant x < 0 \\ \dfrac{\pi-x}{2}, & \text{per } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$ $\quad \left[\mathrm{sen}\,x + \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{3}\mathrm{sen}\,3x + \ldots\right]$

11) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } -\pi < x \leqslant 0 \\ -2, & \text{per } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$ $\quad \left[-\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n+1)x}{2n+1}\right]$

12) $f(x) = \cos ax$, per $-\pi < x < \pi$.

$\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right)\right.$, se a *non* è intero; $\cos ax$, se a è intero$\left.\right]$

13) $f(x) = \mathrm{sen}\,ax$, per $-\pi < x < \pi$.

$\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\,\mathrm{sen}\,nx}{a^2-n^2}\right.$, se a *non* è intero; $\mathrm{sen}\,ax$, se a è intero$\left.\right]$

14) $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \pi - x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$ $\quad \left[\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$

15) $f(x) = x\cos x$, per $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. $\quad \left[-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\mathrm{sen}\,nx\right]$

16) $f(x) = \begin{cases} -\pi + x, & \text{per } -\pi \leqslant x < 0 \\ \pi - x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$ $\quad \left[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\right]$

17) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - x, & \text{per } -\pi \leqslant x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} - x, & \text{per } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$ $\quad \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,2nx}{n}\right]$

18) $$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{2} \\ x, & \text{per } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{per } \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \qquad \left[\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$$

19) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + x, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{\pi}{2} - x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \qquad \left[\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty{}_n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$$

20) $$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & \text{per } -\pi \leqslant x < 0 \\ x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \qquad \left[\pi - 2 \sum_1^\infty{}_n \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]$$

21) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$
$$\left[\frac{\pi}{4} + \sum_1^\infty{}_n \left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} \cos nx - \frac{1}{n} \cos n\pi \operatorname{sen} nx\right)\right]$$

22) $$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{per } -\dfrac{\pi}{\omega} \leqslant x < 0 \\ 1, & \text{per } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases} \qquad \left[\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty{}_n \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\omega x}{2n+1}\right]$$

23) $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } -\dfrac{\pi}{\omega} \leqslant x \leqslant 0 \\ \operatorname{sen} \omega x, & \text{per } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}. \end{cases} \qquad \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega x - \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty{}_n \frac{\cos 2n\omega x}{(2n)^2 - 1}\right]$$

24) $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } -\pi \leqslant x < -\dfrac{2\pi}{3}, \ \dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{per } -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x < -\dfrac{\pi}{3}, \ \dfrac{\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{2\pi}{3} \\ -1, & \text{per } -\dfrac{\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$
$$\left[-\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty{}_n (-1)^n \frac{\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{6}}{2n+1} \cos(2n+1)x\right]$$

25) $$f(x) = \begin{cases} -x - \pi, & \text{per } -\pi \leqslant x \leqslant -\dfrac{2\pi}{3} \\ -\dfrac{\pi}{3}, & \text{per } -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{\pi}{3} \\ x, & \text{per } -\dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{\pi}{3}, & \text{per } \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \\ \pi - x, & \text{per } \dfrac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$
$$\left[\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \sum_2^\infty{}_n (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right)\right]$$

26) $y = e^x, \quad [-l, l].$

$$\left[\frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l(e^l - e^{-l}) \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n \cos \dfrac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2\pi^2} + \pi(e^l - e^{-l}) \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1} n \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{l}}{l^2 + n^2\pi^2}\right]$$

8. Dimostrare che risulta:

a) $$\frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{2a}{1 - a^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2a}{n^2 - a^2} + \ldots .$$

b) $$\pi \operatorname{ctg} a\pi = \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \ldots + \frac{2a}{a^2 - n^2} + \ldots .$$

(Si tenga presente l'esercizio 12) del n. 7)

9. Dimostrare che risulta:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

(Si tenga presente l'esercizio 16) del n. 7) .

10. Sviluppare in serie di Fourier la funzione data sull'intervallo $[0, \pi]$ dall'equazione $f(x) = \pi - 2x$, prolungandola su $[-\pi, 0]$,

a) in modo *pari*, $\left[\dfrac{8}{\pi} \sum_0^\infty{}_n \dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$

b) in modo *dispari*. $\left[2 \sum_1^\infty{}_n \dfrac{\operatorname{sen} 2nx}{n}\right]$

11. Sviluppare in serie di FOURIER la funzione data sull'intervallo $[0, \pi]$ dall'equazione $f(x) = x^2$, prolungandola in modo dispari:

$$\left[2\pi\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1} - \frac{\mathrm{sen}\,2x}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3} + \dots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{1^3} + \frac{\mathrm{sen}\,3x}{3^3} + \frac{\mathrm{sen}\,5x}{5^3} + \dots\right)\right]$$

12. Sviluppare in serie di *soli seni* sull'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $f(x) = \cos 2x$.

$$\left[-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{2^2-1} + \frac{3\,\mathrm{sen}\,3x}{2^2-3^2} + \frac{5\,\mathrm{sen}\,5x}{2^2-5^2} + \dots\right)\right]$$

13. Sviluppare in serie di *soli seni* sull'intervallo $[0, 1]$ le funzioni:

a) $f(x) = x$.
$$\left[\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{sen}\,n\pi x}{n}\right]$$

b) $f(x) = 2x$.
$$\left[\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{sen}\,n\pi x}{n^2}\right]$$

14. Sviluppare sull'intervallo $[0, 2]$ la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, & \text{per } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

a) in serie di *soli coseni*:
$$\left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\right]$$

b) in serie di *soli seni*:
$$\left[\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}\right]$$

15. Sviluppare la funzione $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ in serie di FOURIER nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,nx}{n}\right]$$

16. Sviluppare in serie di *soli seni* nell'intervallo $[0, l]$ la funzione $f(x) = x$.

$$\left[\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{l}}{n}\right]$$

17. Sviluppare in serie di *soli seni* nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Utilizzare questo risultato per calcolare le somme:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots; \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots;$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots .$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n-1)x}{2n-1};\ S_1 = \frac{\pi}{4};\ S_2 = \frac{\pi}{3};\ S_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right]$$

18. Sviluppare in serie di *soli seni* nell'intervallo $[0, \pi]$ le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{per } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,nx, \text{ ove: } b_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{1}{2k}, \text{ e } b_{2k+1} = (-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\right]$$

b) $f(x) = x(\pi - x)$.
$$\left[\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^3}\right]$$

c) $f(x) = \mathrm{sen}\,\dfrac{x}{2}$.
$$\left[\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\,\mathrm{sen}\,nx}{4n^2-1}\right]$$

19. Sviluppare in serie di *soli coseni* nell'intervallo $[0, \pi]$ le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 < x \leqslant h \\ 0, & \text{per } h < x < \pi. \end{cases}$
$$\left[\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,nh}{nh}\cos nx\right)\right]$$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2h}, & \text{per } 0 < x \leqslant 2h \\ 0, & \text{per } 2h < x < \pi. \end{cases}$
$$\left[\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}\,nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]\right]$$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{per } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{per } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$
$$\left[\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]\right]$$

d) $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$.
$$\left[1 - \frac{\cos x}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}\right]$$