Istituzioni di Analisi Matematica - Compitino del 20 Aprile 2010

Problema 1. Sia $T : \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ l'operatore lineare e continuo definito da

$$(Tu)(n) := u(n+1) - u(n-1), \quad \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Mostrare che $(Tu, u) = 0$ per ogni $u \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$, dove $(\cdot,\cdot)$ è il prodotto scalare standard di $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$.

(b) Dimostrare che T è iniettivo e che la sua immagine è densa.

(c) Mostrare che T non è surgettivo.

(d) Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, l'operatore $T - \lambda I$ è bigettivo.

(e) Dimostrare che per ogni $v \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} (T - \lambda I)^{-1} v = 0 \quad \text{in } \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}).$$

Problema 2. Siano (M, d) uno spazio metrico e $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach complesso. Per ogni applicazione

$$F : M \to X$$

definiamo

$$\|F\|_\infty := \sup_{x \in M} \|F(x)\| \in [0, \infty]$$

e

$$\|F\|_{\mathrm{Lip_b}(M,X)} := \|F\|_\infty + \sup_{x,y \in M, x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{d(x,y)} \in [0, \infty].$$

Introduciamo gli spazi

$$\mathrm{Lip_b}(M, X) := \{F : M \to X \mid \|F\|_{\mathrm{Lip_b}(M,X)} < \infty\}$$

e

$$C_\mathrm{b}(M, X) := \{F : M \to X | F \text{ è continua e } \|F\|_\infty < \infty\}.$$

(a) Mostrare che lo spazio $\mathrm{Lip_b}(M, X)$ è di Banach rispetto alla norma $\|.\|_{\mathrm{Lip_b}(M,X)}$.

(b) Dimostrare che se $F : M \to X$ è tale che

$$\varphi \circ F \in \mathrm{Lip_b}(M, \mathbb{C}), \quad \forall \varphi \in X^*, \tag{1}$$

allora l'operatore

$$T_F : X^* \to \mathrm{Lip_b}(M, \mathbb{C}), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ F,$$

è lineare e continuo.

(c) Dimostrare che F soddisfa (1) se e solo se $F \in \mathrm{Lip_b}(M, X)$.

(d) (Facoltativo) Dimostrare che non è vera la seguente implicazione:

$$\varphi \circ F \in C_\mathrm{b}(M, \mathbb{C}) \quad \forall \varphi \in X^* \qquad \Rightarrow \qquad F \in C_\mathrm{b}(M, X).$$