Istituzioni di Analisi Matematica - Compitino del 26 Maggio 2010

Problema 1. Sia X uno spazio di Banach riflessivo di dimensione infinita.

(a) Provare che esiste una successione di elementi di X aventi norma 1 che converge debolmente a zero.

(b) Sia (x_n) una successione di elementi di X tale che per ogni φ in X^* esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Provare che (x_n) è debolmente convergente.

(c) Esibire uno spazio di Banach non riflessivo in cui la proprietà (b) è falsa.

Problema 2. Muniamo lo spazio $C^1([0,1])$ della norma di Banach

$$\|u\| := |u(0)| + \|u'\|_\infty.$$

Si caratterizzi il duale di $C^1([0,1])$ in termini di spazi di Banach noti e si determini esplicitamente la norma duale.

Problema 3. Sia X uno spazio di Banach e sia $Y \subset X$ un sottospazio vettoriale.

(a) Sia $T : Y \to \ell^\infty$ un operatore lineare e continuo. Provare che esiste $\tilde{T} : X \to \ell^\infty$ lineare e continuo la cui restrizione a Y coincide con T e tale che

$$\|\tilde{T}\|_{L(X,\ell^\infty)} = \|T\|_{L(Y,\ell^\infty)}.$$

(b) (Facoltativo) Supponiamo che X sia separabile e sia $S : Y \to c_0$ un operatore lineare e continuo. Provare che esiste $\tilde{S} : X \to c_0$ lineare e continuo la cui restrizione a Y coincide con S. [Suggerimento: potrebbe essere utile usare la compattezza per successioni di $\overline{B}_{X^*}$ rispetto alla topologia debole-*].