Istituzioni di Analisi Matematica - Compito dell'8 giugno 2010

Problema 1. Sia H uno spazio di Hilbert e sia M un suo sottospazio vettoriale chiuso. Dimostrare che la norma quoziente su H/M lo rende uno spazio Hilbert.

Problema 2. Siano $1 \leq p < q \leq \infty$. Dimostrare che ℓ^p è contenuto in ℓ^q. Dimostrare che l'operatore di inclusione

$$i : \ell^p \to \ell^q$$

è continuo e calcolarne la norma.

Problema 3. Data una funzione $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, poniamo $f_n(x) = f_0(x+n)$.

(a) Supponendo che $f_0 \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$, dimostrare che $f_n \rightharpoonup 0$ nella topologia debole $\sigma(L^p, L^{p'})$, dove p' è l'esponente coniugato a p.

(b) Supponiamo che $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ sia tale che per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \mid |f_0(x)| > \delta\}$ ha misura finita. Dimostrare che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ nella topologia debole-$*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.

(c) Sia f_0 la funzione indicatrice dell'intervallo $[0, 1]$. Dimostrare che non esiste alcuna sottosuccessione di (f_n) che converge nella topologia debole $\sigma(L^1, L^\infty)$.