# Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 6 luglio 2010

**Problema 1.** Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert separabile con base hilbertiana $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se $A$ è un operatore lineare e continuo su $H$, poniamo

$$\|A\|_2 := \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|^2\Big)^{1/2} \in [0, +\infty],$$

e consideriamo l'insieme

$$\mathcal{L}_2(H) := \{A \in L(H, H) \,|\, \|A\|_2 < \infty\}.$$

(a) Dimostrare che $\|\cdot\|_2$ è una norma su $\mathcal{L}_2(H)$ che maggiora la norma operatoriale.

(b) Dimostrare che $(\mathcal{L}_2(H), \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert.

(c) Dimostrare che $\mathcal{L}_2(H)$ è strettamente contenuto nello spazio degli operatori compatti.

**Problema 2.** Fissato $1 \le p < \infty$, sia $(f_n) \subset L^p(0,1)$ la successione definita da

$$f_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}, \quad \forall x \in ]0,1[.$$

Analizzare la convergenza debole e forte di $(f_n)$ in $L^p(0,1)$.

**Problema 3.** Ricordiamo che se $A$ è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale $X$, $\mathrm{conv}(A)$ indica il più piccolo insieme convesso che contiene $A$.

(a) Mostrare che se $E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana dello spazio di Hilbert separabile $H$, l'insieme $\mathrm{conv}(E)$ contiene una successione che converge fortemente a 0.

Sia $X$ uno spazio di Banach e sia $(x_n) \subset X$ una successione che converge debolmente a $x$.

(b) Dimostrare che esiste una successione $(y_n) \subset X$ tale che

$$y_n \in \mathrm{conv}\,(\{x_h \,|\, h \ge n\}),$$

e $(y_n)$ converge fortemente a $x$.

(c) Dimostrare che esiste una successione $(z_n) \subset X$ tale che

$$z_n \in \mathrm{conv}\,(\{x_h \,|\, h \le n\}),$$

e $(z_n)$ converge fortemente a $x$.