Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 7 settembre 2010

Problema 1. Sia A un sottoinsieme limitato e debolmente chiuso di uno spazio di Banach separabile e riflessivo $(X, \|\cdot\|)$. Dimostrare che la funzione distanza da A, ossia

$$\mathrm{dist}_A : X \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{dist}_A(x) = \inf_{y \in A} \|y - x\|,$$

è inferiormente semicontinua rispetto alla topologia debole di X. Per quali spazi di Banach X la funzione dist_A risulta debolmente continua per ogni $A \subset X$ debolmente chiuso?

Problema 2. Sia X uno spazio di Hilbert. Sia (A_n) una successione di operatori lineari continui su X tale che $A_n u \to Au$ per ogni $u \in X$, dove A è un operatore lineare e continuo su X. Sia (K_n) una successione di operatori lineari compatti su X tale che $K_n \to K$ in norma operatoriale. Dimostrare che $A_n K_n \to AK$ in norma operatoriale.

Problema 3. Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia q il suo esponente coniugato. Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Dimostrare che $f \in L^p(0,1)$ se e solamente se $fg \in L^1(0,1)$ per ogni $g \in L^q(0,1)$.