Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 7 febbraio 2011

Problema 1. Sia X un insieme di successioni reali infinitesime e sia u una successione reale sommabile. Si dimostri che tra tutte le successioni reali sommabili v tali che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v(n)x(n) = 0, \qquad \forall x \in X,$$

ne esiste una che minimizza la quantità

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |v(n) - u(n)|.$$

Problema 2. Se u è una funzione misurabile su $[0, 1]$, si definisca la funzione Tu come

$$Tu(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u(t)\, dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Sia p un numero reale tale che $1 < p < \infty$.

(a) Si dimostri che T è un operatore lineare e continuo da $L^p(0, 1)$ in sé.

(b) Si dimostri che T non è compatto.

(c) Si determini il raggio spettrale di T.

(d) Nel caso $p = 2$, si dimostri che l'operatore $TT^* - T^*T$ ha rango 1.