# Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 10 marzo 2011

**Problema 1.** Dopo aver verificato che la funzione

$$f(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (u(n+1) + u(n-1))\overline{u(n)}, \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

è reale, se ne determini l'estremo superiore sull'insieme

$$S = \Big\{ u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \,\Big|\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u(n)|^2 = 1 \Big\}.$$

Tale estremo superiore è raggiunto su $S$?

**Problema 2.** Sia $M$ l'insieme delle funzioni $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ della forma

$$f(x) = h(|x|) \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^2,$$

per un opportuna funzione $h : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$.

(a) Verificare che $M$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $L^2(\mathbb{R}^2)$.

(b) Determinare il proiettore ortogonale su $M$.