Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 28 aprile 2011

Problema 1. Sia (c_n) una successione di numeri complessi e sia $T : L^2(0,+\infty) \to L^2(0,+\infty)$ l'operatore lineare definito da

$$Tf(x) = \begin{cases} c_0 f(x) & \text{per } x \in [0,1[, \\ \vdots & \vdots \\ c_n f(x) & \text{per } x \in [n,n+1[, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Fornire condizioni necessarie e sufficienti su (c_n) affinché T sia:

(a) limitato;

(b) un'isometria;

(c) un proiettore;

(d) invertibile;

(e) compatto.

Nel caso (a), determinare lo spettro di T.

Problema 2. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare e continuo tra spazi di Banach. Supponiamo che esistano un numero reale c ed un operatore compatto $K : X \to Z$ a valori in uno spazio di Banach Z tali che

$$\|x\|_X \leq c\|Tx\|_Y + \|Kx\|_Z, \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

Dimostrare i fatti seguenti:

(a) il nucleo di T ha dimensione finita;

(b) se $(x_n) \subset X$ ha immagine limitata e $\|x_n\|_X \to +\infty$, allora la successione $(x_n/\|x_n\|_X)$ possiede una sottosuccessione che converge ad un elemento di $\ker T$;

(c) T ha immagine chiusa.

Infine, dimostrare che se $T \in L(X,Y)$ ha nucleo di dimensione finita ed immagine chiusa, allora esistono un numero reale c ed un operatore compatto $K : X \to Z$ a valori in uno spazio di Banach Z tali che valga (1).