Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 23 giugno 2011

Problema 1. Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una successione limitata. Si considerino gli operatori lineari S e A su $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ definiti da:

$$(Su)(n) = u(n+1), \qquad (Au)(n) = a(n)u(n), \qquad \forall u \in \ell^\infty.$$

(a) Dimostrare che se
$$|a(n)| \leq \alpha < 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
allora l'operatore $I - AS : \ell^\infty \to \ell^\infty$ è invertibile.

(b) Dimostrare che la stessa conclusione vale sotto l'ipotesi più debole
$$\left| \prod_{j=0}^{n-1} a(k+j) \right| \leq c\alpha^n, \qquad \forall k, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$
dove $c > 0$ e $0 < \alpha < 1$.

(c) Sia $b : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una successione tale che $a(n) := 1/b(n)$ verifica la condizione (1). Dimostrare che per ogni $v \in \ell^\infty$ l'equazione
$$u(n+1) = b(n)u(n) + v(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
possiede un'unica soluzione $u \in \ell^\infty$. Esprimere tale soluzione mediante una formula esplicita.

Problema 2. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sia $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n/3}|1 + \ln x|^n + 1}}.$$

Si dica per quali $p \in [1, \infty]$ la successione f_n è contenuta in $L^p(0, \infty)$, e se essa converge in tale spazio; in tal caso determinarne il limite.