Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 20 settembre 2011

Problema 1. Si consideri l'operatore lineare T su $L^2(0,1)$ definito da

$$(Tu)(x) = \int_0^x \left(\int_t^1 u(s)\, ds \right) dt, \qquad \forall u \in L^2(0,1).$$

(a) Si mostri che T è continuo.

(b) Si mostri che T è autoaggiunto.

(c) Si mostri che T è compatto.

(d) Si determinino lo spettro di T e l'insieme dei suoi autovalori.

Problema 2. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach con sfera unitaria $S = \{u \in X \mid \|u\| = 1\}$ e sia φ un elemento non nullo di X^*. Per "retta" intendiamo qua un sottospazio vettoriale di X avente dimensione 1.

(a) Mostrare che la retta W verifica

$$\|v + w\| \geq \|w\|, \quad \forall v \in \ker \varphi,\ \forall w \in W,$$

se e solamente se l'insieme $W \cap S$ è composto dai punti di massimo della funzione

$$S \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto |\varphi(u)|.$$

(b) Dimostrare che se la norma $\|\cdot\|$ è Hilbertiana esiste esattamente una retta W che soddisfa le due proprietà del punto (a).

(c) Dimostrare che se X è riflessivo allora esistono rette W che soddisfano le due proprietà del punto (a), ma che l'unicità può non valere.