Istituzioni di Analisi Matematica - Compitino del 20 Aprile 2010

Problema 1. Sia $T : \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ l'operatore lineare e continuo definito da

$$(Tu)(n) := u(n+1) - u(n-1), \quad \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Mostrare che $(Tu, u) = 0$ per ogni $u \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$, dove $(\cdot,\cdot)$ è il prodotto scalare standard di $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$.

(b) Dimostrare che T è iniettivo e che la sua immagine è densa.

(c) Mostrare che T non è surgettivo.

(d) Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, l'operatore $T - \lambda I$ è bigettivo.

(e) Dimostrare che per ogni $v \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R})$ si ha

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} (T - \lambda I)^{-1} v = 0 \quad \text{in } \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{R}).$$

Problema 2. Siano (M, d) uno spazio metrico e $(X, \|.\|)$ uno spazio di Banach complesso. Per ogni applicazione

$$F : M \to X$$

definiamo

$$\|F\|_\infty := \sup_{x \in M} \|F(x)\| \in [0, \infty]$$

e

$$\|F\|_{\mathrm{Lip_b}(M,X)} := \|F\|_\infty + \sup_{x,y \in M, x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{d(x,y)} \in [0, \infty].$$

Introduciamo gli spazi

$$\mathrm{Lip_b}(M,X) := \{F : M \to X \mid \|F\|_{\mathrm{Lip_b}(M,X)} < \infty\}$$

e

$$C_{\mathrm{b}}(M,X) := \{F : M \to X | F \text{ è continua e } \|F\|_\infty < \infty\}.$$

(a) Mostrare che lo spazio $\mathrm{Lip_b}(M,X)$ è di Banach rispetto alla norma $\|.\|_{\mathrm{Lip_b}(M,X)}$.

(b) Dimostrare che se $F : M \to X$ è tale che

$$\varphi \circ F \in \mathrm{Lip_b}(M,\mathbb{C}), \quad \forall \varphi \in X^*, \tag{1}$$

allora l'operatore

$$T_F : X^* \to \mathrm{Lip_b}(M,\mathbb{C}), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ F,$$

è lineare e continuo.

(c) Dimostrare che F soddisfa (1) se e solo se $F \in \mathrm{Lip_b}(M,X)$.

(d) (Facoltativo) Dimostrare che non è vera la seguente implicazione:

$$\varphi \circ F \in C_{\mathrm{b}}(M,\mathbb{C}) \quad \forall \varphi \in X^* \qquad \Rightarrow \qquad F \in C_{\mathrm{b}}(M,X).$$

Istituzioni di Analisi Matematica - Compitino del 26 Maggio 2010

Problema 1. Sia X uno spazio di Banach riflessivo di dimensione infinita.

(a) Provare che esiste una successione di elementi di X aventi norma 1 che converge debolmente a zero.

(b) Sia (x_n) una successione di elementi di X tale che per ogni φ in X^* esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n).$$

Provare che (x_n) è debolmente convergente.

(c) Esibire uno spazio di Banach non riflessivo in cui la proprietà (b) è falsa.

Problema 2. Muniamo lo spazio $C^1([0,1])$ della norma di Banach

$$\|u\| := |u(0)| + \|u'\|_\infty.$$

Si caratterizzi il duale di $C^1([0,1])$ in termini di spazi di Banach noti e si determini esplicitamente la norma duale.

Problema 3. Sia X uno spazio di Banach e sia $Y \subset X$ un sottospazio vettoriale.

(a) Sia $T : Y \to \ell^\infty$ un operatore lineare e continuo. Provare che esiste $\tilde{T} : X \to \ell^\infty$ lineare e continuo la cui restrizione a Y coincide con T e tale che

$$\|\tilde{T}\|_{L(X,\ell^\infty)} = \|T\|_{L(Y,\ell^\infty)}.$$

(b) (Facoltativo) Supponiamo che X sia separabile e sia $S : Y \to c_0$ un operatore lineare e continuo. Provare che esiste $\tilde{S} : X \to c_0$ lineare e continuo la cui restrizione a Y coincide con S. [Suggerimento: potrebbe essere utile usare la compattezza per successioni di $\overline{B}_{X^*}$ rispetto alla topologia debole-*].

Istituzioni di Analisi Matematica - Compito dell'8 giugno 2010

Problema 1. Sia H uno spazio di Hilbert e sia M un suo sottospazio vettoriale chiuso. Dimostrare che la norma quoziente su H/M lo rende uno spazio Hilbert.

Problema 2. Siano $1 \leq p < q \leq \infty$. Dimostrare che ℓ^p è contenuto in ℓ^q. Dimostrare che l'operatore di inclusione

$$i : \ell^p \to \ell^q$$

è continuo e calcolarne la norma.

Problema 3. Data una funzione $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, poniamo $f_n(x) = f_0(x+n)$.

(a) Supponendo che $f_0 \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$, dimostrare che $f_n \rightharpoonup 0$ nella topologia debole $\sigma(L^p, L^{p'})$, dove p' è l'esponente coniugato a p.

(b) Supponiamo che $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ sia tale che per ogni $\delta > 0$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \,|\, |f_0(x)| > \delta\}$ ha misura finita. Dimostrare che $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ nella topologia debole-$*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.

(c) Sia f_0 la funzione indicatrice dell'intervallo $[0,1]$. Dimostrare che non esiste alcuna sottosuccessione di (f_n) che converge nella topologia debole $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 6 luglio 2010

Problema 1. Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert separabile con base hilbertiana $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se A è un operatore lineare e continuo su H, poniamo

$$\|A\|_2 := \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|Ae_n\|^2\Big)^{1/2} \in [0, +\infty],$$

e consideriamo l'insieme

$$\mathcal{L}_2(H) := \{A \in L(H,H) \,|\, \|A\|_2 < \infty\}.$$

(a) Dimostrare che $\|\cdot\|_2$ è una norma su $\mathcal{L}_2(H)$ che maggiora la norma operatoriale.

(b) Dimostrare che $(\mathcal{L}_2(H), \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert.

(c) Dimostrare che $\mathcal{L}_2(H)$ è strettamente contenuto nello spazio degli operatori compatti.

Problema 2. Fissato $1 \le p < \infty$, sia $(f_n) \subset L^p(0,1)$ la successione definita da

$$f_n(x) = n^{1/p} e^{-nx}, \quad \forall x \in]0,1[.$$

Analizzare la convergenza debole e forte di (f_n) in $L^p(0,1)$.

Problema 3. Ricordiamo che se A è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale X, $\operatorname{conv}(A)$ indica il più piccolo insieme convesso che contiene A.

(a) Mostrare che se $E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana dello spazio di Hilbert separabile H, l'insieme $\operatorname{conv}(E)$ contiene una successione che converge fortemente a 0.

Sia X uno spazio di Banach e sia $(x_n) \subset X$ una successione che converge debolmente a x.

(b) Dimostrare che esiste una successione $(y_n) \subset X$ tale che

$$y_n \in \operatorname{conv}(\{x_h \,|\, h \ge n\}),$$

e (y_n) converge fortemente a x.

(c) Dimostrare che esiste una successione $(z_n) \subset X$ tale che

$$z_n \in \operatorname{conv}(\{x_h \,|\, h \le n\}),$$

e (z_n) converge fortemente a x.

Istituzioni di Analisi Matematica - Compito del 7 settembre 2010

Problema 1. Sia A un sottoinsieme limitato e debolmente chiuso di uno spazio di Banach separabile e riflessivo $(X, \|\cdot\|)$. Dimostrare che la funzione distanza da A, ossia

$$\mathrm{dist}_A : X \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{dist}_A(x) = \inf_{y \in A} \|y - x\|,$$

è inferiormente semicontinua rispetto alla topologia debole di X. Per quali spazi di Banach X la funzione dist_A risulta debolmente continua per ogni $A \subset X$ debolmente chiuso?

Problema 2. Sia X uno spazio di Hilbert. Sia (A_n) una successione di operatori lineari continui su X tale che $A_n u \to Au$ per ogni $u \in X$, dove A è un operatore lineare e continuo su X. Sia (K_n) una successione di operatori lineari compatti su X tale che $K_n \to K$ in norma operatoriale. Dimostrare che $A_n K_n \to AK$ in norma operatoriale.

Problema 3. Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia q il suo esponente coniugato. Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Dimostrare che $f \in L^p(0,1)$ se e solamente se $fg \in L^1(0,1)$ per ogni $g \in L^q(0,1)$.