10 Dimostrazione della congettura di Arnold

10.1 Orbite periodiche non degeneri

Sia $\mathbb{T}^{2n}$ il toro $2n$-dimensionale ottenuto quozientando $\mathbb{R}^{2n}$ per il reticolo $\mathbb{Z}^{2n}$. La forma simplettica standard ω_0 passa al quoziente e rende $\mathbb{T}^{2n}$ una varietà simplettica.

Sia $H \in C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{T}^{2n})$ un'Hamiltoniana che dipende dal tempo in modo 1-periodico e sia $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{T}^{2n} \to \mathbb{T}^{2n}$ il flusso Hamiltoniano associato, ossia la soluzione di

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_{H_t}\big(\phi_t(x)\big), \qquad \phi_0(x) = x, \tag{1}$$

dove $X_{H_t} = J\nabla H_t$ è il campo Hamiltoniano associato a H_t. Dato che il campo X_{H_t} è 1-periodico nel tempo, si ha

$$\phi_{t+1}(x) = \phi_t\big(\phi_1(x)\big),$$

e $x : \mathbb{T} \to \mathbb{T}^{2n}$ è un'orbita 1-periodica se e solamente se $x(0)$ è un punto fisso di ϕ_1.

Ricordiamo che un punto fisso $x_0 \in \mathbb{T}^{2n}$ di ϕ_1 si dice non degenere se l'automorfismo

$$D\phi_1(x_0) : T_{x_0}\mathbb{T}^{2n} \longrightarrow T_{x_0}\mathbb{T}^{2n}$$

non ha l'autovalore 1, equivalentemente se $I - D\phi_1(x_0)$ è invertibile. Sia $x(t) = \phi_t(x_0)$ la corrispondente orbita 1-periodica. Sfruttando il fatto che il fibrato tangente di $\mathbb{T}^{2n}$ è $\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, possiamo differenziare (1) rispetto alla variabile spaziale e ottenere

$$\frac{d}{dt}D\phi_t(x_0) = DX_{H_t}(x(t))D\phi_t(x_0), \qquad D\phi_0(x_0) = I.$$

Dunque $D\phi_t(x_0)$ è la soluzione fondamentale del sistema lineare

$$u'(t) = DX_{H_t}(x(t))u(t). \tag{2}$$

Perciò x_0 è un punto fisso non degenere se e solamente se il sistema lineare (2) non ha soluzioni 1-periodiche diverse dalla soluzione identicamente nulla. In questo caso diciamo che l'orbita 1-periodica x è non degenere.

Osservazione 10.1. *Quanto visto fin qua vale per le orbite periodiche di un qualsiasi campo vettoriale periodico nel tempo. Su varietà qualsiasi è necessario trivializzare il fibrato tangente lungo l'orbita periodica in questione.*

Il nostro scopo è dimostrare l'esistenza di orbite periodiche di X_{H_t}. Se l'Hamiltoniana H è piccola in norma C^1, il campo X_{H_t} risulta piccolo in norma C^0, pertanto non possiede orbite 1-periodiche non contrattili. Quindi in generale non possiamo aspettarci la presenza di orbite 1-periodiche non contrattili. Dimostreremo il seguente risultato, dovuto a Conley e Zehnder, che conferma la congettura di Arnold su $\mathbb{T}^{2n}$ nel caso non degenere:

Teorema 10.2. *Sia $H \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{T}^{2n})$ un'Hamiltoniana le cui orbite 1-periodiche contrattili siano tutte non-degeneri. Allora il numero di tali orbite è almeno 2^{2n}.*

Iniziamo con l'osservare che lo spazio $C^\infty_{\mathrm{contr}}(\mathbb{T}, \mathbb{T}^{2n})$ delle curve 1-periodiche contrattili su $\mathbb{T}^{2n}$ si identifica in maniera naturale a

$$\mathbb{T}^{2n} \times C^\infty_0(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n}),$$

dove $C^\infty_0(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$ indica lo spazio delle curve 1-periodiche a media nulla a valori in $\mathbb{R}^{2n}$. Infatti ciascun $x \in C^\infty_{\mathrm{contr}}(\mathbb{T}, \mathbb{T}^{2n})$ si solleva ad una curva chiusa $\tilde{x} \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$, univocamente definita a meno di traslazioni per elementi di $\mathbb{Z}^{2n}$, e decomponendo

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + \hat{x}(t), \qquad \text{dove} \quad \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{2n} \quad \text{e} \quad \hat{x} \in C^\infty_0(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n}),$$

troviamo che un altro sollevamento $\tilde{x}$ ha lo stesso $\hat{x}$ e un $\tilde{x}_0$ che differisce dal primo per un vettore di $\mathbb{Z}^{2n}$.

Insieme ai risultati del Capitolo 5, questo fatto suggerisce di studiare il funzionale di azione Hamiltoniana nel seguente setting funzionale. Indichiamo con E lo spazio di Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$, munito della norma

$$\|u\|^2 = |u_0|^2 + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||u_k|^2, \quad \text{dove} \quad u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k t J} u_k, \ \ u_k \in \mathbb{R}^{2n},$$

della decomposizione ortogonale

$$E = E^0 \oplus E^- \oplus E^+$$

e dei relativi proiettori P^0, P^- e P^+, che abbiamo introdotto nel Capitolo 5. Come spazio di curve su $\mathbb{T}^{2n}$ consideriamo la varietà Hilbertiana

$$M := \mathbb{T}^{2n} \times F, \quad \text{dove} \quad F := E^- \oplus E^+,$$

il cui fibrato tangente è

$$TM = M \times E.$$

Su M il funzionale di azione Hamiltoniana assume la forma

$$\mathbb{A}_H(x) = \mathbb{A}(x_0, \hat{x}) = \frac{1}{2}\|P^+\hat{x}\|^2 - \frac{1}{2}\|P^-\hat{x}\|^2 - h(x), \qquad \forall x = (x_0, \hat{x}) \in M,$$

dove

$$h(x) = \int_{\mathbb{T}} H(t, x(t))\, dt.$$

Si tratta di un funzionale di classe C^∞ su M. I suoi punti critici sono esattamente le orbite 1-periodiche contrattili di X_{H_t} (si veda la Proposizione 5.4). Concludiamo questa sezione dimostrando il seguente:

Lemma 10.3. *Sia $x : \mathbb{T} \to \mathbb{T}^{2n}$ un'orbita 1-periodica di X_{H_t}. Allora x è non degenere nel senso visto sopra se e solamente se è non degenere come punto critico di $\mathbb{A}_H$.*

Dimostrazione. Dato che

$$\nabla^2\mathbb{A}_H(x) = P^+ - P^- - \nabla^2 h(x), \tag{3}$$

l'Hessiano $\nabla^2\mathbb{A}_H(x)$ è un operatore di Fredholm di indice zero, essendo una perturbazione compatta dell'operatore di Fredholm di indice zero $P^+ - P^-$ (si veda la Proposizione 5.5, ricordando che il differenziale in un punto di una mappa compatta è un operatore lineare compatto). Perciò x è un punto critico non degenere se e solamente se $\nabla^2\mathbb{A}_H(x)$ è iniettivo

Per la Proposizione 5.3, si ha

$$(\nabla^2\mathbb{A}_H(x)\xi, \eta) = d^2\mathbb{A}(x)[\xi, \eta] = (P^+\xi, \eta) - (P^-\xi, \eta) - \int_{\mathbb{T}} d^2 H(t, x(t))\big[\xi(t), \eta(t)\big]\, dt,$$

per ogni $\xi, \eta \in E$. Dunque ξ appartiene al nucleo di $\nabla^2\mathbb{A}_H(x)$ se e solamente se ξ è un punto critico di $\mathbb{A}_K$, dove $K \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n})$ è l'Hamiltoniana quadratica

$$K(t, \zeta) = d^2 H(t, x(t))[\zeta, \zeta], \quad \forall (t, \zeta) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n}.$$

Graize alla Proposizione 5.4, questo è equivalente al fatto che ξ sia un'orbita 1-periodica di X_{K_t}, ossia una soluzione 1-periodica di

$$\xi'(t) = JD^2 H(t, x(t))\xi(t).$$

Ma questo è esattamente il sistema lineare (2) e la tesi segue. □

10.2 La riduzione finito-dimensionale

Volendo applicare la teoria di Morse al funzionale $\mathbb{A}_H$, una difficoltà è costituita dal fatto che i suoi punti critici hanno indice e co-indice di Morse infinito, come mostra l'identtà (3). Aggireremo questa difficoltà con una riduzione finito-dimensionale.

Dato $N \in \mathbb{N}$, sia $P_N : E \to E$ il proiettore ortogonale di rango finito

$$P_N u(t) := \sum_{|k|\le N} e^{2\pi k t J} u_k, \quad \text{dove} \quad u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k t J} u_k, \ \ u_k \in \mathbb{R}^{2n},$$

indichiamo con E_N la sua immagine e con F_N l'intersezione di E_N con F:

$$E_N := P_N E, \qquad F_N := F \cap E_N.$$

Faremo uso del seguente:

LEMMA 10.4. *Risulta*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in M} \|(I-P_N)\nabla^2 h(x)(I-P_N)\| = 0.$$

Dimostrazione. Dato che $(I-P_N)\nabla^2 h(x)(I-P_N)$ è un operatore autoaggiunto,

$$\begin{aligned}
\|(I-P_N)\nabla^2 h(x)(I-P_N)\| &= \sup_{\|u\|=1} \big|\big((I-P_N)\nabla^2 h(x)(I-P_N)u,u\big)\big| \\
&= \sup_{\|u\|=1} \big|\big(\nabla^2 h(x)(I-P_N)u,(I-P_N)u\big)\big| \\
&= \sup_{\|u\|=1} \big|d^2 h(x)\big[(I-P_N)u,(I-P_N)u\big]\big|.
\end{aligned}$$

L'ultima quantità si stima nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\big|d^2 h(x)\big[(I-P_N)u,(I-P_N)u\big]\big| &= \Big|\int_{\mathbb{T}} d^2 H_t(x(t))\big[(I-P_N)u(t),(I-P_N)u(t)\big]\,dt\Big| \\
&\le \|d^2 H\|_\infty \|(I-P_N)u\|_{L^2}^2 = \|d^2 H\|_\infty 2\pi \sum_{|k|>N} |u_k|^2 \\
&\le \frac{1}{N}\|d^2 H\|_\infty 2\pi \sum_{|k|>N} |k|\,|u_k|^2 \le \frac{1}{N}\|d^2 H\|_\infty \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\|(I-P_N)\nabla^2 h(x)(I-P_N)\| \le \frac{1}{N}\|d^2 H\|_\infty$$

e la tesi segue. □

Fissiamo N così grande che

$$\theta := \sup_{x\in M} \|(I-P_N)\nabla^2 h(x)(I-P_N)\| < 1. \tag{4}$$

Vediamo la varietà $M = \mathbb{T}^{2n} \times F$ come il prodotto

$$M = \big(\mathbb{T}^{2n} \times F_N\big) \times E_N^\perp,$$

indicando i suoi elementi come coppie $x=(y,z)$, con $y \in \mathbb{T}^{2n} \times F_N$ e $z \in E_N^\perp$. Vogliamo mostrare che l'insieme delle coppie $(y,z) \in M$ tali che

$$(I-P_N)\nabla \mathbb{A}_H(y,z) = 0 \tag{5}$$

è il grafico di una mappa da $\mathbb{T}^{2n} \times F_N$ in $E_N^\perp$. Dato che

$$\nabla \mathbb{A}_H(y,z) = P^+ y + P^+ z - P^- y - P^- z - \nabla h(y,z),$$

usando anche il fatto che P_N commuta con P^+ e P^-, troviamo

$$(I-P_N)\nabla \mathbb{A}_H(y,z) = (P^+-P^-)z - (I-P_N)\nabla h(y,z) = (P^+-P^-)\big(z-(P^+-P^-)^{-1}(I-P_N)\nabla h(y,z)\big),$$

dove abbiamo usato l'invertibilità di $P^+ - P^-$ su F. Quindi, il punto (y,z) soddisfa (5) se e solamente se è uno zero della mappa

$$f : \big(\mathbb{T}^{2n} \times F_N\big) \times E_N^\perp \to E_N^\perp, \quad f(y,z) = z - (P^+-P^-)^{-1}(I-P_N)\nabla h(y,z).$$

Per ogni $y \in \mathbb{T}^{2n} \times F_N$, la mappa $z \mapsto f(y,z)$ è della forma

$$f(y,z) = z - g_y(z), \quad \text{dove} \quad g_y : E_N^\perp \to E_N^\perp, \quad g_y(z) := (P^+ - P^-)^{-1}(I - P_N)\nabla h(y,z).$$

Dato che

$$Dg_y(z) = (P^+ - P^-)^{-1}(I - P_N)\nabla^2 h(y,z)(I - P_N),$$

per la (4) g_y è θ-Lipschitziana, con $\theta < 1$. Ricordiamo che, per il teorema delle contrazioni, una perturbazione θ-Lipschitziana dell'identità è un omeomorfismo, quindi per ogni $y \in \mathbb{T}^{2n} \times F_N$ esiste un unico $z = z(y)$ tale che

$$z - g_y(z) = 0, \tag{6}$$

ovvero

$$f(y,z) = 0.$$

Inlotre, essendo f di classe C^∞, anche la mappa $y \mapsto z(y)$ è C^∞.

Lemma 10.5. *La mappa $z : \mathbb{T}^{2n} \times F_N \to E_N^\perp$ è limitata ed ha differenziale limitato.*

Dimostrazione. La limitatezza di z segue immediatamente da quella di g_y, che a sua volta segue dalla limitatezza di ∇h. Differenziando (6) rispetto a y si trova

$$Dz(y) - D_y g_y(z(y)) - Dg_y(z(y))Dz(y) = 0,$$

ossia

$$\big(I - Dg_y(z(y))\big)Dz(y) = D_y g_y(z(y)).$$

Dal fatto che $\|Dg_y\| \le \theta < 1$, usando la serie di Neumann deduciamo che $(I - Dg_y(z))$ ha inversa uniformemente limitata e grazie alla limitatezza di $D_y g_y$ concludiamo che Dz è limitato. $\square$

Consideriamo adesso il funzionale di classe C^∞,

$$\hat{\mathbb{A}} : \mathbb{T}^{2n} \times F_N \to \mathbb{R}, \qquad \hat{\mathbb{A}}(y) = \mathbb{A}_H\big(y, z(y)\big).$$

Il lemma seguente riduce il problema allo studio dei punti critici di $\hat{\mathbb{A}}$:

Lemma 10.6. *Il punto $x = (y,z)$ è un punto critico di $\mathbb{A}_H$ se e solamente se $z = z(y)$ e y è un punto critico di $\hat{\mathbb{A}}$. Inoltre tutti i punti critici di $\hat{\mathbb{A}}$ sono non degeneri.*

Dimostrazione. I punti critici di $\mathbb{A}_H$ soddisfano (5), dunque sono della forma $(y, z(y))$. La prima affermazione segue allora dall'identità

$$d\hat{\mathbb{A}}(y) = d_y\mathbb{A}_H(y,z(y)) + d_z\mathbb{A}_H(y,z(y))Dz(y) = d_y\mathbb{A}_H(y,z(y)),$$

dove si è usato il fatto che $d_z\mathbb{A}_H(y,z) = 0$ per le coppie (y,z) che soddisfano (5).

Sia ora $y \in \mathbb{T}^{2n} \times F_N$ un punto critico di $\hat{\mathbb{A}}$. Vogliamo vedere che il fatto che $(y, z(y))$ sia non degenere per $\mathbb{A}_H$ implica che y è non degenere per $\hat{\mathbb{A}}$. Differenziando (5) rispetto a y troviamo

$$\nabla^2_{yz}\mathbb{A}_H(y,z(y)) + \nabla^2_{zz}\mathbb{A}_H(y,z(y))Dz(y) = 0.$$

Allora, posto $x = (y, z(y))$, si ha, per ogni $u, v \in E_N$

$$\begin{aligned}
\big(\nabla^2\mathbb{A}_H(x)(u, Dz(y)u), (v, Dz(y)v)\big) &= \big(\nabla^2_{yy}\mathbb{A}_H(x)u, v\big) + \big(\nabla^2_{zy}\mathbb{A}_H(x)Dz(y)u, v\big) \\
&\quad + \big(\nabla^2_{yz}\mathbb{A}_H(x)u, Dz(y)v\big) + \big(\nabla^2_{zz}\mathbb{A}_H(x)Dz(y)u, Dz(y)v\big) \\
&= \big(\nabla^2_{yy}\mathbb{A}_H(x)u + \nabla^2_{zy}\mathbb{A}_H(x)Dz(y)u, v\big) = (\nabla^2\hat{\mathbb{A}}(y)u, v),
\end{aligned}$$

da cui la tesi segue. $\square$

10.3 Dimostrazione del Teorema 10.2

Grazie ai risultati della sezione precedente, ci basta dimostrare che la funzione di Morse

$$\hat{\mathbb{A}} : \mathbb{T}^{2n} \times F_N \to \mathbb{R}$$

ha almeno 2^{2n} punti critici. Se indichiamo gli elementi di $\mathbb{T}^{2n} \times F_N$ come coppie $(y_0, \hat{y})$, questa funzione ha la forma

$$\hat{\mathbb{A}}(y_0, \hat{y}) = \frac{1}{2}\|P^+\hat{y}\|^2 - \frac{1}{2}\|P^-\hat{y}\|^2 + b(y_0, \hat{y}), \tag{7}$$

dove

$$b(y_0, \hat{y}) := \frac{1}{2}\|P^+ z(y_0, \hat{y})\|^2 - \frac{1}{2}\|P^- z(y_0, \hat{y})\|^2 - h\big(y_0, \hat{y}, z(y_0, \hat{y})\big).$$

Per il Lemma 10.5, la funzione b è limitata ed ha differenziale limitato. Mostreremo che una qualsiasi funzione di Morse della forma (7) su $\mathbb{T}^{2n} \times F_N$ con b e ∇b limitato ha almeno 2^{2n} punti critici.

È conveniente modificare $\hat{\mathbb{A}}$ fuori da un compatto nel modo seguente. Sia $\varphi \in C^\infty([0, +\infty[)$ una funzione con supporto compatto e tale che $\varphi = 1$ su $[0, R]$. Possiamo scegliere $R > 0$ abbastanza grande e $\|\varphi'\|_\infty$ abbastanza piccola in modo che

$$\|\nabla b\|_\infty \le \frac{R}{3}, \qquad \|\varphi'\|_\infty \|b\|_\infty \le \frac{R}{3}.$$

Affermiamo che la funzione

$$\tilde{\mathbb{A}} : \mathbb{T}^{2n} \times F_N \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{\mathbb{A}}(y_0, \hat{y}) := \frac{1}{2}\|P^+\hat{y}\|^2 - \frac{1}{2}\|P^-\hat{y}\|^2 + \varphi\big(\|\hat{y}\|\big) b(y_0, \hat{y}),$$

ha gli stessi punti critici di $\hat{\mathbb{A}}$, parimenti non degeneri. Infatti, se $y = (y_0, \hat{y})$ è un punto critico di $\hat{\mathbb{A}}$, allora

$$0 = \big\|\nabla \hat{\mathbb{A}}(y_0, \hat{y})\big\| = \big\|(P^+ - P^-)\hat{y} + \nabla b(y_0, \hat{y})\big\| \ge \big\|(P^+ - P^-)\hat{y}\big\| - \big\|\nabla b(y_0, \hat{y})\big\|$$

da cui

$$\|\hat{y}\| = \big\|(P^+ - P^-)\hat{y}\big\| \le \big\|\nabla b(y_0, \hat{y})\big\| \le \frac{R}{3} < R.$$

Perciò $(y_0, \hat{y})$ giace nell'aperto dove $\tilde{\mathbb{A}}$ coincide con $\hat{\mathbb{A}}$ ed è quindi un punto critico di $\tilde{\mathbb{A}}$. Se invece $y = (y_0, \hat{y})$ è un punto critico di $\tilde{\mathbb{A}}$, allora

$$\begin{aligned} 0 = \big\|\nabla \tilde{\mathbb{A}}(y_0, \hat{y})\big\| &= \Big\|(P^+ - P^-)\hat{y} + \varphi(\|\hat{y}\|)\nabla b(y_0, \hat{y}) + \varphi'(\|\hat{y}\|) b(y_0, \hat{y}) \frac{\hat{y}}{\|\hat{y}\|}\Big\| \\ &\ge \big\|(P^+ - P^-)\hat{y}\big\| - \|\nabla b\|_\infty - \|\varphi'\|_\infty \|b\|_\infty \ge \|\hat{y}\| - \frac{R}{3} - \frac{R}{3}, \end{aligned}$$

, da cui

$$\|\hat{y}\| \le \frac{2R}{3} < R,$$

e $(y_0, \hat{y})$ è punto critico di $\hat{\mathbb{A}}$.

Dato che

$$\lim_{\|\hat{y}\| \to \infty} \big\|\nabla \tilde{\mathbb{A}}\big\| = +\infty,$$

la funzione di Morse $\tilde{\mathbb{A}}$ soddisfa la condizione di Palais-Smale sulla varietà finito-dimensionale $\mathbb{T}^{2n} \times F_N$. Scelto $R' > 0$ tale che $\varphi = 0$ su $[R', +\infty[$, fissiamo un numero positivo c tale che

$$c > \max_{\|\hat{y}\| \le R'} \tilde{\mathbb{A}}, \qquad -c < \min_{\|\hat{y}\| \le R'} \tilde{\mathbb{A}}.$$

Allora si ha

$$\{\tilde{\mathbb{A}} < c\} = \left\{ (y_0, \hat{y}) \in \mathbb{T}^{2n} \times F_N \mid \frac{1}{2}\|P^+\hat{y}\|^2 - \frac{1}{2}\|P^-\hat{y}\|^2 < c \right\},$$

quindi, detta a la funzione

$$a : F_N \to \mathbb{R}, \qquad a(\hat{y}) = \frac{1}{2}\|P^+\hat{y}\|^2 - \frac{1}{2}\|P^-\hat{y}\|^2,$$

risulta

$$\{\tilde{\mathbb{A}} < c\} = \mathbb{T}^{2n} \times \{a < c\}.$$

Analogamente,

$$\{\tilde{\mathbb{A}} < -c\} = \mathbb{T}^{2n} \times \{a < -c\}.$$

La funzione a è una forma quadratica non degenere su F_N e l'unico suo punto critico 0 ha indice $(\dim F_N)/2 = 2nN$. Perciò, grazie al Lemma 9.5, il polinomio di Poincarè della coppia topologica $(\{a < c\}, \{a < -c\})$ è

$$P\big(\{a < c\}, \{a < -c\}\big)(t) = t^{2nN}.$$

Per la formula di Künneth,

$$\begin{aligned} P\big(\{\tilde{\mathbb{A}} < c\}, \{\tilde{\mathbb{A}} < -c\}\big) &= P\big(\mathbb{T}^{2n} \times \{a < c\}, \mathbb{T}^{2n} \times \{a < -c\}\big) \\ &= P(\mathbb{T}^{2n}) \cdot P\big(\{a < c\}, \{a < -c\}\big) = (1+t)^{2n} t^{2nN}. \end{aligned}$$

Pertanto le relazioni di Morse (Teorema 9.3) per $\tilde{\mathbb{A}}$ nella striscia $[-c, c]$ sono

$$\sum_{x \in \operatorname{crit} \tilde{\mathbb{A}}} t^{\operatorname{ind}(x)} = (1+t)^{2n} t^{2nN} + (1+t) Q(t),$$

e valutate per $t = 1$ implicano che $\tilde{\mathbb{A}}$ - e dunque anche $\hat{\mathbb{A}}$ e $\mathbb{A}_H$ - ha almeno 2^{2n} punti critici. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 10.2.

Osservazione 10.7. *Se non si assume che la orbite 1-periodiche siano non degeneri, la teoria di Lusternik-Schnirelmann applicata alla funzione $\tilde{\mathbb{A}}$ permette di concludere l'esistenza di almeno $2n+1$ orbite 1-periodiche contrattili.*