2 Calcolo differenziale in spazi di Banach

In questo capitolo riassumiamo le principali definizioni ed i principali risultati del calcolo differenziale per mappe tra spazi di Banach. Per le dimostrazioni (per la maggior parte analoghe a quelle viste nel calcolo differenziale su $\mathbb{R}^n$) e maggiori dettagli si possono consultare il primo capitolo di [Hör83], il classico [Die69], oppure [AP95].

2.1 Mappe differenziabili

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi di Banach reali. Indichiamo con $L(X, Y)$ lo spazio vettoriale degli operatori lineari e continui da X in Y, che, munito della norma operatoriale

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y, \qquad \forall T \in L(X, Y),$$

risulta uno spazio di Banach.

Definizione 2.1. *Sia $U \subset X$ un aperto e sia $F : U \to Y$ una mappa. Diciamo che F è differenziabile secondo Gâteaux in $x \in U$ se esiste un operatore $T \in L(X, Y)$ tale che per ogni $u \in X$ risulta*

$$F(x + tu) = F(x) + tTu + o(t), \qquad \textit{per } t \to 0 \textit{ in } \mathbb{R}.$$

Se invece risulta

$$F(x + u) = F(x) + Tu + o(u), \qquad \textit{per } t \to 0 \textit{ in } X,$$

diciamo che F è differenziabile secondo Fréchet in x. L'operatore T, che in entrambi i casi è unico, viene indicato con $DF(x)$ ed è detto differenziale di F in x. Quando si dice che F è differenziabile, ci si riferisce alla differenziabilità secondo Fréchet.

Se $X = \mathbb{R}$ le due nozioni coincidono, e si pone

$$F'(x) = \dot{F}(x) := DF(x)1.$$

Se $\dim X > 1$, la differenziabilità (secondo Fréchet) è una nozione strettamente più forte. Una mappa differenziabile in x è ovviamente continua in x (anzi, ha un modulo di continuità lineare), mentre la differenziabilità secondo Gâteaux non implica la continuità, come mostrano semplici esempi con $X = \mathbb{R}^2$. Quando $Y = \mathbb{R}$, ossia quando si ha a che fare con funzioni reali, si usa spesso il simbolo d al posto di D.

Se $F : U \to Y$, U aperto in X, è differenziabile in $x \in U$, e $G : V \to Z$, V aperto in Y che contiene $F(U)$, è differenziabile in $F(x)$, allora $G \circ F$ è differenziabile in x, con

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x)) \circ DF(x).$$

Teorema 2.2 (del valor medio). *Sia $U \subset X$ un aperto e sia $F : U \to Y$ una mappa differenziabile secondo Gâteaux. Se $\operatorname{conv}\{x, y\} \subset U$, allora*

$$\|F(y) - F(x)\|_Y \leq \|y - x\|_X \sup_{t \in]0,1[} \big\|DF(x + t(y - x))\big\|.$$

In particolare, una mappa differenziabile secondo Gâteaux con differenziale limitato è Lipschitziana sui convessi.

Da questo teorema, che si dimostra considerando dapprima il caso $X = \mathbb{R}$, segue facilmente il seguente:

Teorema 2.3 (del differenziale totale). *Sia $U \subset X$ un aperto e sia $F : U \to Y$ una mappa differenziabile secondo Gâteaux tale che la mappa*

$$DF : U \to L(X, Y)$$

sia continua in $x \in U$. Allora F è differenziabile in x.

Le mappe F per cui la mappa $x \mapsto DF(x)$ risulta continua su U si dicono di classe $C^1(U, Y)$.

Esempio 2.4. *Consideriamo la mappa*

$$F : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \qquad F(u) = \sin u.$$

Si verifica facilmente che F è differenziabile secondo Gâteaux con $DF(u) = M_{\cos u}$, dove M_f indica l'operatore di moltiplicazione

$$M_f : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \qquad M_f u := fu.$$

Osserviamo che M_f è lineare e continuo quando $f \in L^\infty(0,1)$ e che $\|M_f\| = \|f\|_\infty$. È facile vedere che DF non risulta continuo in alcun punto di $L^2(0,1)$: per esempio, $u_n = \pi/2(1 - \chi_{]0,1/n[})$ converge a $u = \pi/2$ in $L^2(0,1)$, ma

$$\|DF(u_n) - DF(u)\| = \|M_{\cos u_n} - M_{\cos u}\| = \|\cos u_n - \cos u\|_\infty = \|\cos u_n\|_\infty = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In effetti, è possibile dimostrare il fatto seguente: sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una funzione con derivata prima limitata; allora la mappa

$$F : L^2(0,1) \to L^2(0,1), \qquad F(u) = f \circ u,$$

è differenziabile secondo Fréchet se e solamente se $f(t) = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ (più in generale, si veda l'esercizio sugli operatori di composizioni tra spazi di funzioni sommabili alla fine del capitolo).

2.2 Integrazione di curve continue

Sia $u : [a,b] \to X$ una curva continua a valori in uno spazio di Banach X. È ben definito l'integrale di u su $[a,b]$:

$$\int_a^b u(t)\, dt \in X.$$

Per esempio, questo integrale può essere definito approssimando u con mappe costanti a tratti, ossia, posto $\ell := b - a$,

$$\int_a^b u(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ell}{n} u\big(a + k\ell/n\big).$$

L'esistenza del limite è assicurata dal fatto che u è uniformemente continua, per il Teorema di Heine-Cantor. Si usa anche la notazione standard

$$\int_b^a u(t)\, dt := -\int_a^b u(t)\, dt.$$

Teorema 2.5 (fondamentale del calcolo integrale). *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $u : I \to X$ una curva di classe C^1. Allora*

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(s)\, ds,$$

per ogni $t_0, t \in I$.

2.3 Differenziali successivi

Ricordiamo che una applicazione bilineare

$$B : X \times X \to Y$$

è continua se e solamente se la quantità

$$\|B\| := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ \|x_1\|_X = \|x_2\|_X = 1}} \|B(x_1, x_2)\|_Y$$

è finita. L'insieme $L_2(X;Y)$ delle applicazioni bilineari e continue da $X \times X$ in Y è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|$ definita sopra. Inoltre, l'identificazione naturale

$$L(X, L(X,Y)) \cong L_2(X;Y), \qquad T \mapsto B, \quad \text{dove} \quad B[x_1, x_2] = (Tx_1)[x_2],$$

è un'isometria surgettiva.

Definizione 2.6. *Sia $U \subset X$ un aperto e sia $F : U \to Y$ una mappa differenziabile. Diciamo che F è differenziabile due volte in $x \in U$ se la mappa $DF : U \to L(X,Y)$ è differenziabile in x. L'operatore lineare*

$$D^2F(x) := D(DF)(x) \in L\big(X, L(X,Y)\big)$$

si chiama differenziale secondo di F in x e, per quanto visto sopra, lo si può identificare ad un operatore bilineare $D^2F(x) \in L_2(X;Y)$.

Vale il seguente:

Teorema 2.7 (Simmetria del differenziale secondo). *Sia $U \subset X$ un aperto e sia $F : U \to Y$ una mappa differenziabile due volte. Se la mappa*

$$D^2F : U \to L_2(X;Y)$$

è continua in $x \in U$, allora la forma bilineare $D^2F(x)$ è simmetrica.

Analogamente, si indica con $L_k(X;Y)$ lo spazio di Banach delle applicazioni multilineari e continue da X^k in Y. Se $T \in L_k(X;Y)$, si usa la notazione

$$T[u]^k := T[u, \dots, u].$$

Per induzione, si definisce e il differenziale k-esimo $D^kF(x) \in L_k(X;Y)$ di una mappa differenziabile $k-1$ volte. Quando D^kF è continuo in x, $D^kF(x)$ risulta simmetrico. L'espressione $C^k(X,Y)$ indica lo spazio delle mappe $F : U \to Y$ differenziabili k volte ed aventi differenziale k-esimo continuo. Una mappa differenziabile un numero arbitrario di volte si dice di classe C^∞.

È anche possibile sviluppare una teoria delle applicazioni analitiche tra spazi di Banach: la mappa $F : U \to Y$, U aperto in X, si dice analitica se per ogni $x \in U$ esiste un $r > 0$ tale che per ogni $u \in X$ di norma $\|u\| < r$ risulta

$$F(x+u) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k[u]^k,$$

dove $A_k \in L_k(X;Y)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Qua non approfondiamo questa teoria.

2.4 Funzioni su spazi di Hilbert

Sia U un aperto nello spazio di Hilbert H, munito del prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$, e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $x \in U$. Come abbiamo già detto, trattandosi di una funzione a valori reali, indichiamo il differenziale di f con la d minuscola. Dato che $df(x)$ è un funzionale lineare e continuo su H, per il teorema di Riesz esiste ed è unico un vettore di H che lo rappresenta rispetto al prodotto scalare. Questo vettore si chiama gradiente di f in x e si indica con $\nabla f(x)$. Dunque $\nabla f(x)$ è definito da

$$df(x)u = \big(\nabla f(x), u\big), \qquad \forall u \in H.$$

Supponiamo ora che f sia differenziabile due volte in x. Dato che $d^2f(x)$ è una forma bilineare continua su H, il teorema di Riesz ci assicura che essa è rappresentata da un unico operatore appartenente a $L(H,H)$, che indichiamo con $\nabla^2 f(x)$ e chiamamo Hessiano di f in x:

$$d^2f(x)[u,v] = \big(\nabla^2 f(x)u, v\big), \qquad \forall u,v \in H.$$

In effetti, $\nabla^2 f(x)$ coincide con il differenziale di ∇f in x. Quando f è differenziabile due volte in un intorno di x e $d^2 f$ è continuo in x, il Teorema 2.7 ci assicura che l'operatore $\nabla^2 f(x)$ è autoaggiunto, ossia

$$\big(\nabla^2 f(x)u, v\big) = \big(u, \nabla^2 f(x)v\big), \qquad \forall u,v \in H.$$

2.5 Formula di Taylor

Sia $U \subset X$ un aperto e sia $F : U \to Y$ una mappa differenziabile k volte in $x \in U$ (ossia, differenziabile $k-1$ volte in un intorno di x ed con $D^{k-1}F$ differenziabile in x). Il polinomio di Taylor di grado k di F in x è l'applicazione polinomiale $T_k : X \to Y$ definita da

$$T_k(u) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j F(x)[u]^j, \qquad \forall u \in X.$$

La differenza tra $F(x+u)$ è $T_k(x)$ si dice resto di Taylor k-esimo,

$$R_k(u) := F(x+u) - T_k(x), \qquad \forall u \in V := \{u \in X \mid \operatorname{conv}\{x, x+u\} \subset U\}.$$

TEOREMA 2.8. *Il resto di Taylor k-esimo è piccolo in un intorno di 0, nei seguenti tre sensi:*

1. *(Resto di Peano) Sotto le ipotesi enunciate sopra, risulta $R_k(u) = o(\|u\|_X^k)$ per $u \to 0$.*
2. *(Resto di Lagrange) Se inoltre F è differenziabile $k+1$ volte in U, allora*

$$\|R_k(u)\|_Y \leq \|u\|_X^{k+1} \sup_{t \in]0,1[} \|D^{k+1}F(x+tu)\|, \qquad \forall u \in V.$$

3. *(Resto integrale) Se inoltre $F \in C^{k+1}(U,Y)$, allora*

$$R_k(u) = \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1}F(x+tu)\, dt, \qquad \forall u \in V.$$

L'integrale sopra è da intendersi nel senso della sezione 2.2. Talvolta è utile la seguente caratterizzazione delle mappe C^k.

TEOREMA 2.9 (Caratterizzazione delle mappe C^k). *Sia $U \subset X$ un aperto, sia $F : U \to Y$ una mappa e sia $k \in \mathbb{N}$. I fatti seguenti sono equivalenti:*

1. *F appartiene a $C^k(U,Y)$.*
2. *Posto*

$$W := \{(x,u) \in U \times X \mid \operatorname{conv}\{x, x+u\} \subset U\},$$

esistono mappe continue $A_j : U \to L_j(X;Y)$, $j \in \{0,1,\dots,k\}$, e $R : W \to Y$ tali che $R(x,0) = 0$ per ogni $x \in U$ e

$$F(x+u) = \sum_{j=1}^{k} A_j(x)[u]^j + \|u\|^k R(x,u).$$

2.6 Teorema della funzione inversa e sue varianti

Il risultato seguente dice che se $DF(x)$ è un isomorfismo, allora F è un diffeomorfismo locale in x:

TEOREMA 2.10. (Teorema della funzione inversa). *Siano $U \subset X$ un aperto, $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, e $x \in U$. Se $DF(x) \in L(X,Y)$ è un isomorfismo, allora esiste un intorno aperto $V \subset U$ di x tale che $F(V)$ è aperto, $F|_V : V \to F(V) \subset Y$ è invertibile e la mappa $F^{-1} : F(V) \to V$ è di classe C^k, con $DF^{-1}(y) = DF(F^{-1}(y))^{-1}$ per ogni $y \in F(V)$.*

Ricordiamo che un'applicazione lineare $L \in L(X,Y)$ si dice inversa sinistra se esiste un operatore $R \in L(Y,X)$ tale che $LR = \mathrm{Id}_Y$ (in questo caso, R si dice inversa destra di L). L è un'inversa sinistra se e solamente se è surgettiva e il suo nucleo ammette un complementare topologico in X, ossia esiste un sottospazio vettoriale chiuso $X' \subset X$ tale che $X = \ker L \oplus X'$.

Analogamente, un'applicazione lineare $R \in L(X,Y)$ si dice inversa destra se esiste un operatore $L \in L(Y,X)$ tale che $LR = \mathrm{Id}_X$ (in questo caso, L si dice inversa sinistra di R). R è un'inversa destra se e solamente se è iniettiva e la sua immagine è chiusa e ammette un complementare topologico in Y.

Osservazione 2.11. *Un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Banach non ammette necessariamente un complementare topologico: un esempio classico è il sottospazio c_0 di ℓ^∞. In uno spazio di Hilbert, ogni sottospazio vettoriale chiuso ammette un complementare topologico (basta considerare l'ortogonale). Sia i sottospazi di dimensione finita che quelli di codimensione finita di un arbitrario spazio di Banach ammettono un complementare topologico.*

Il risultato seguente dice che se $DF(x)$ è un'inversa sinistra, allora F è una sommersione locale in x:

Teorema 2.12 (Criterio per le sommersioni). *Siano $U \subset X$ un intorno di 0 e $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che $F(0) = 0$. Se $L := DF(0)$ è un inversa sinistra, allora esistono un intorno V di 0 in X ed un diffeomorfismo di classe C^k, $\Phi : V \to \Phi(V) \subset U$, tale che $\Phi(0) = 0$, $D\Phi(0) = \mathrm{Id}_X$ e*

$$F \circ \Phi(x) = Lx, \qquad \forall x \in V.$$

In particolare, F è una mappa localmente aperta in 0, e $F^{-1}(0) \cap V$ è una sottovarietà di classe C^k di X, il cui spazio tangente in 0 è $\ker L$.

Il risultato seguente dice che se $DF(x)$ è un'inversa destra, allora F è un'immersione locale in x:

Teorema 2.13 (Criterio per le immersioni). *Siano $U \subset X$ un intorno di 0 e $F : U \to Y$ una mappa di classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$, tale che $F(0) = 0$. Se $R := DF(0)$ è un inversa destra, allora esistono un intorno aperto W di 0 in Y, un intorno aperto $V \subset F^{-1}(W)$ di 0 in X, ed un diffeomorfismo di classe C^k, $\Psi : W \to \Psi(W) \subset Y$ tale che $\Psi(0) = 0$, $D\Psi(0) = \mathrm{Id}_Y$ e*

$$\Psi \circ F(x) = Rx, \qquad \forall x \in V.$$

In particolare, F è una mappa localmente iniettiva e localmente chiusa in 0, e $F(V)$ è una sottovarietà di classe C^k di Y, il cui spazio tangente in 0 è l'immagine di R.

2.7 Equazioni differenziali

Il teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy associato ad un campo vettoriale localmente Lipschitziano si estende (con la medesima dimostrazione) agli spazi di Banach:

Teorema 2.14 (Esistenza ed unicità della soluzione dei problemi di Cauchy). *Sia U un aperto nello spazio di Banach X e sia $F : U \to X$ un campo vettoriale localmente Lipschitziano. Allora per ogni $x \in U$ esiste un $\epsilon > 0$ tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)), \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1}$$

ammette un'unica soluzione $u :]-\epsilon, \epsilon[\to U$.

Osservazione 2.15. *Qua consideriamo per semplicità solamente equazioni autonome, ma si hanno analoghi risultati nel caso non autonomo, ossia quando $F = F(t, x)$.*

Indichiamo con $]t_-(x), t_+(x)[$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy (1). Allora le funzioni

$$t_- : U \to [-\infty, 0[, \qquad t_+ : U \to]0, +\infty],$$

sono semicontinue, al prima inferiormente e la seconda superiormente. Quindi l'insieme

$$\Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t_-(x) < t < t_+(x)\}$$

è aperto nello spazio prodotto $\mathbb{R} \times X$. Dato (t, x) in Ω, indichiamo con $\phi(t, x)$ il vettore $u(t)$, dove u è la soluzione del problema di Cauchy (1). La mappa

$$\phi : \Omega \to U$$

si dice flusso locale del campo vettoriale F e soddisfa la proprietà di gruppo

$$\phi(t + s, x) = \phi\big(t, \phi(s, x)\big).$$

Si usa anche la notazione $\phi_t(x) := \phi(t, x)$. Quando $U = X$ e F ha crescita al più lineare, il Lemma di Gronwall permette di concludere che il flusso di F è definito globalmente:

Teorema 2.16 (Esistenza globale). *Sia $F : X \to X$ un campo vettoriale localmente Lipschitziano tale che*

$$\|F(x)\|_X \leq c\big(\|x\|_X + 1\big), \qquad \forall x \in X,$$

per un'opportuna costante c. Allora $\Omega = \mathbb{R} \times X$.

Concludiamo questo capitolo con il seguente:

Teorema 2.17 (Dipendenza continua e differenziabile dai dati iniziali). *Con le ipotesi sopra, il flusso locale di F,*

$$\phi : \Omega \to U$$

è continuo. Se inoltre $F \in C^k(U, X)$, $1 \leq k \leq \infty$, allora $\phi \in C^k(\Omega, U)$.

2.8 Esercizi

Differenziabilità di un operatore di composizione. Sia K uno spazio topologico compatto, e sia $f : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una mappa continua, differenziabile k volte rispetto alla seconda variabile, e tale che le funzioni

$$\partial_2^j f : K \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k,$$

siano continue. Allora la mappa

$$F : C^0(K, \mathbb{R}) \to C^0(K, \mathbb{R}), \quad F(u)(x) = f(x, u(x)) \;\; \forall x \in K,$$

risulta di classe C^k e

$$D^j F(u)[h_1, \dots, h_j](x) = \partial_2^j f(x, u(x)) h_1(x) \dots h_j(x), \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Un problema di Dirichlet. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Allora il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} u''(x) + f(u(x)) = 0, & \forall x \in]0, \pi[, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

ammette la soluzione banale $u \equiv 0$. Scopo di questo esercizio è discutere l'esistenza di altre soluzioni "piccole".

1. Consideriamo il sottospazio chiuso di $C^2([0, \pi], \mathbb{R})$,

   $$X = \left\{ u \in C^2([0, \pi], \mathbb{R}) \mid u(0) = (\pi) = 0 \right\},$$

   e la mappa
   $$F : X \to Y := C^0([0, \pi], \mathbb{R}), \quad F(u) = u'' + f \circ u.$$

   Mostrare che F è di classe C^∞ e che i suoi zeri sono tutte e sole le soluzioni di (2).

2. Mostrare che $DF(0)$ è un isomorfismo se e solamente se $f'(0)$ non è un quadrato di un intero non nullo.

3. Dimostrare che se $f'(0)$ non è un quadrato di un intero non nullo allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $u = 0$ è l'unica soluzione di (2) con $\|u\|_\infty < \epsilon$.

4. Determinare l'immagine di $DF(0)$ nel caso $f'(0) = n^2$ con n intero non nullo.

5. Esibire un esempio di $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale $f(0) = 0$, $f'(0) = n^2$ con n intero non nullo e (2) possiede soluzioni di norma uniforme arbitrariamente piccola.

6. Supponiamo che $f(0) = 0$, $f'(0) = n^2$ con n intero non nullo, e $f''(0) \neq 0$. Dimostrare che esiste $\epsilon > 0$ tale che il problema (2) non ha soluzioni non nulle con norma uniforme minore di ϵ.

7. Sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, e sia n un intero non nullo. Dimostrare che per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\lambda \in]\omega^2 - \epsilon, \omega^2 + \epsilon[$ e $u \in X$, $u \neq 0$, $\|u\|_{C^2} < \epsilon$ tali che (λ, u) sia soluzione di

$$\begin{cases} u''(x) + g(u(x)) + \lambda u(x) = 0, & \forall x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Il seguente *diagramma di biforcazione* mostra la norma uniforme delle soluzioni u in funzione del parametro λ: la regione colorata rappresenta la zona dove non si trovano soluzioni di (3), i puntini rappresentano le successioni di soluzioni (u_n, λ_n) con $\|u_n\|_\infty$ infinitesima e λ_n convergente al quadrato di un intero non nullo.

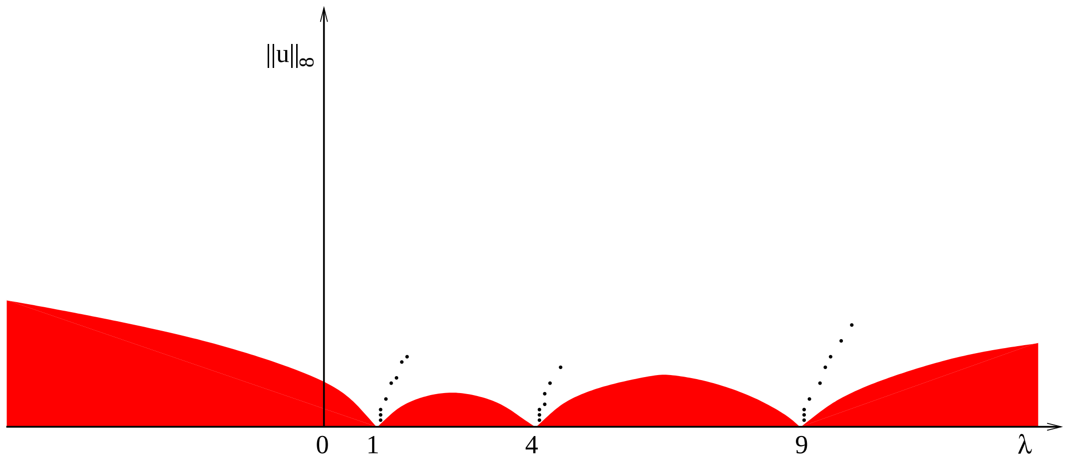

Figura 1: Diagramma di biforcazione.

Operatori di composizione tra spazi di funzioni sommabili. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Si dice che

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, s) \mapsto f(x, s),$$

è una funzione di Caratheodory se è continua in s per quasi ogni $x \in \Omega$, e misurabile in x, per ogni $s \in \mathbb{R}$. Data $u : \Omega \to \mathbb{R}$, si ponga

$$F(u) : \Omega \to \mathbb{R}, \quad F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Si vuole studiare la regolarità dell'operatore di composizione (detto anche di Nemitski) $u \mapsto F(u)$ tra vari spazi di funzioni sommabili. Per la soluzione si può consultare [AP95].

1. Dimostrare che se u è misurabile su Ω, allora $F(u)$ è misurabile su Ω.

2. Dimostrare che se (u_n) converge a u in musura, allora $(F(u_n))$ converge a $F(u)$ in misura.

3. Supponiamo inoltre che, dati $p, q \in [1, +\infty)$, esista $a \in L^q(\Omega)$ e $b \geq 0$ tali che

$$|f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p/q}, \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

   Dimostrare che $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è ben definita e continua.

4. Nelle stesse ipotesi di (iii), assumendo inoltre che $1/p + 1/q = 1$, dimostrare che il funzionale

$$\varphi(u) = \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} f(x, s)\, ds \right) dx$$

   è ben definito e di classe C^1 su $L^p(\Omega)$, e che $D\varphi(u) = F(u)$.

5. Sia ora $p > 2$ e sia q tale che $1/p+1/q = 1$. Supponiamo che f sia derivabile rispetto a s, e che tanto f quanto $\partial_s f$ siano funzioni di Caratheodory. Supponiamo inoltre che esistano $a \in L^{p/(p-2)}(\Omega)$ e $b \geq 0$ tali che
$$|\partial_s f(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{p-2}.$$
Dimostrare che la mappa $F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è ovunque differenziabile, e che
$$DF(u)h(x) = \partial_s f(x, u(x))h(x).$$

6. Consideriamo infine il caso $p = 2$. Supponiamo che f sia derivabile rispetto a s, che tanto f quanto $\partial_s f$ siano funzioni di Caratheodory, e che $|\partial_s f(x, s)| \leq c$. Dimostrare che F è differenziabile in un punto u_0 se e solamente se f è lineare in s.

Riferimenti bibliografici

[AP95] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Die69] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Academic Press, New York-London, 1969.

[Hör83] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, I*, Springer, Berlin, 1983.