4 Spazi di Sobolev frazionari di funzioni sul toro uni-dimensionale

4.1 Gli spazi $H^s(\mathbb{T})$

Sia $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ogni funzione $u : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ di classe L^2 su $\mathbb{T}$ possiede uno sviluppo di Fourier

$$u(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{2\pi i k t}, \qquad \text{con} \quad \hat{u}_k := \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2\pi i k t}\, dt,$$

dove $(\hat{u}_k)$ risulta un elemento di $\ell^2(\mathbb{Z})$ e la serie converge in norma $L^2(\mathbb{T})$. Per le nozioni di base della teoria Hilbertiana delle serie di Fourier si veda ad esempio [**?**, Capitolo 5].

Fissato $s \geq 0$, definiamo il seguente sottospazio vettoriale di $L^2(\mathbb{T})$:

$$H^s(\mathbb{T}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}) \mid \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s} |\hat{u}_k|^2 < \infty \right\},$$

che muniamo del prodotto scalare Hermitiano

$$(u,v)_{H^s} := u_0 \overline{v_0} + \sum_{k\neq 0} |k|^{2s} u_k \overline{v_k},$$

la cui norma associata è data da

$$\|u\|_{H^s}^2 = |u_0|^2 + \sum_{k\neq 0} |k|^{2s} |u_k|^2.$$

Questo prodotto scalare rende $H^s(\mathbb{T})$ uno spazio di Hilbert: infatti $H^s(\mathbb{T})$ è isometrico a $\ell^2(\mathbb{Z})$ tramite l'applicazione

$$H^s(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad u \mapsto v, \quad \text{dove } v(k) = |k|^s \hat{u}_k.$$

Le funzioni C^∞ sono dense in $H^s(\mathbb{T})$. In effetti, per costruzione già i polinomi trigonometrici sono densi in $H^s(\mathbb{T})$. Lo spazio $H^0(\mathbb{T})$ coincide con $L^2(\mathbb{T})$, mentre per $s > 0$ troviamo spazi di funzioni via via più regolari. Ovviamente $H^s(\mathbb{T}) \subset H^r(\mathbb{T})$ se $s > r$. Possiamo anche dire di più:

TEOREMA 4.1. *Se $s > r \geq 0$, l'immersione $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$ è compatta.*

Ricordiamo che un operatore lineare e continuo si dice compatto se manda la palla in un insieme relativamente compatto.

Dimostrazione. Mostriamo che la mappa di inclusione

$$I : H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$$

è limite nella norma operatoriale di operatori di rango finito (ossia la cui immagine ha dimensione finita): operatori di questo tipo sempre compatti ed il limite in norma operatoriale di operatori compatti è compatto. Per $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$P_n u(t) := \sum_{|k|<n} \hat{u}_k e^{2\pi i k t}.$$

Allora, dato che $r - s < 0$,

$$\begin{aligned} \|u - P_n u\|_{H^r}^2 &= \Big\| \sum_{|k|\geq n} \hat{u}_k e^{2\pi i k t} \Big\|_{H^r}^2 = \sum_{|k|\geq n} |k|^{2r} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{|k|\geq n} |k|^{2(r-s)} |k|^{2s} |\hat{u}_k|^2 \\ &\leq n^{2(r-s)} \sum_{|k|\geq n} |k|^{2s} |\hat{u}_k|^2 \leq n^{2(r-s)} \|u\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\|I - P_n\|_{L(H^s,H^r)} \leq n^{2(r-s)} \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

dunque l'immersione I è limite in norma operatoriale della successione di operatori di rango finito (P_n). □

Nel risultato seguente, $C^0(\mathbb{T})$ è lo spazio di Banach delle funzioni continue su $\mathbb{T}$, munito della norma dell'estremo superiore.

TEOREMA 4.2. *Se $s > 1/2$, lo spazio $H^s(\mathbb{T})$ si immerge con continuità nello spazio $C^0(\mathbb{T})$. Inoltre questa immersione è compatta.*

Dimostrazione. Sia $u \in H^s(\mathbb{T})$. Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{-s}|k|^s|\hat{u}_k| \leq \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{-2s}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2s}|\hat{u}_k|^2\Big)^{1/2} = C_s\|u\|_{H^s}, \tag{1}$$

dove il numero

$$C_s := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{-2s}\Big)^{1/2}$$

è finito poichè $s > 1/2$. Dunque la serie di Fourier di u converge uniformemente, in particolare u è continua. Dato che

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}} |u(t)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{u}_k|,$$

la disuguaglianza (1) mostra anche che l'immersione di $H^s(\mathbb{T})$ in $C^0(\mathbb{T})$ è continua. La compattezza di questa immersione segue dal fatto che, fissato $1/2 < r < s$, essa si fattorizza in

$$H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{T}),$$

dove la prima immersione è compatta per il Teorema 4.1 e la seconda è continua per quanto appena visto. □

4.2 L'immersione di $H^{1/2}(\mathbb{T})$ in $L^p(\mathbb{T})$

Le funzioni in $H^{1/2}(\mathbb{T})$ non sono necessariamente continue, e nemmeno in $L^\infty(\mathbb{T})$, come mostreremo alla fine di questa sezione. Però stanno in $L^p(\mathbb{T})$ per ogni $1 \leq p < \infty$, come mostra il seguente:

TEOREMA 4.3. *Se $1 \leq p < \infty$, lo spazio $H^{1/2}(\mathbb{T})$ si immerge con continuità in $L^p(\mathbb{T})$. Inoltre tale immersione è compatta.*

Scopo di questa sezione è dimostrare questo teorema. Per quanto riguarda l'esistenza di un'immersione continua, è sufficiente dimostrare che il sottospazio di $H^{1/2}(\mathbb{T})$ composto dalle funzioni a media nulla, ossia l'iperpiano

$$\Big\{u \in H^{1/2}(\mathbb{T}) \mid \hat{u}_0 = 0\Big\},$$

si immerge con continuità in $L^p(\mathbb{T})$. Per densità, è sufficiente dimostrare che per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante C_p tale che

$$\|u\|_{L^p} \leq C_p\|u\|_{H^{1/2}}, \qquad \forall u \in C^\infty(\mathbb{T}) \text{ tale che } \int_{\mathbb{T}} u(t)\,dt = 0. \tag{2}$$

Se identifichiamo $\mathbb{T}$ con il bordo ∂D del disco chiuso $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ tramite l'applicazione $t \mapsto e^{2\pi it}$, possiamo estendere ciascuna funzione $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ a media nulla ad una funzione $v \in C^\infty(D)$ definita da

$$v(z) = \sum_{k>0} \hat{u}_k z^k + \sum_{k<0} \hat{u}_k \bar{z}^{-k}. \tag{3}$$

Notiamo che la prima somma definisce una funzione olomorfa nella parte interna di D, mentre la secondo una funzione antiolomorfa. Entrambe queste funzioni hanno un estensione C^∞ a tutto D e risulta $v(e^{2\pi it}) = u(t)$.

LEMMA 4.4. *Se $u \in C^\infty(\mathbb{T})$ ha media nulla e v è definita da (3), allora*

$$\|v\|_{L^2(D)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(D)} = \|u\|_{H^{1/2}}.$$

Grazie a questo Lemma, la disuguaglianza (2) è implicata dal seguente:

Teorema 4.5 (Traccia). *Per ogni* $1 \leq p < \infty$ *esiste una costante* C_p *tale che*

$$\|u\|_{L^p(\partial D)} \leq C_p \big(\|u\|_{L^2(D)} + \|\nabla u\|_{L^2(D)} \big),$$

per ogni $u \in C^\infty(D)$.

Iniziamo con il dimostrare un risultato più debole:

Lemma 4.6. *Per ogni* $1 \leq p < \infty$ *esiste una costante* C_p *tale che*

$$\|u\|_{L^p(\partial D)} \leq C_p \big(\|u\|_{L^{2p-2}(D)} + \|\nabla u\|_{L^2(D)} \big),$$

per ogni $u \in C^\infty(D)$.

Grazie al Lemma 4.6, il teorema di traccia 4.5 segue immediatamente dal seguente risultato, che è un caso particolare del teorema di immersione di Sobolev:

Teorema 4.7 (Immersione di Sobolev). *Per ogni* $1 \leq p < \infty$ *esiste una costante* C_p *tale che*

$$\|u\|_{L^p(D)} \leq C_p \big(\|u\|_{L^2(D)} + \|\nabla u\|_{L^2(D)} \big),$$

per ogni $u \in C^\infty(D)$.

Questo conclude la dimostrazione della disuguaglianza (2) e dunque del fatto che $H^{1/2}(\mathbb{T})$ si immerge con continuità in $L^p(\mathbb{T})$, per ogni $p < +\infty$. Per dimostrare che questa immersione è compatta, è utile la seguente disuguaglianza di interpolazione:

Lemma 4.8 (Interpolazione). *Se* $2 < q < \infty$ *risulta*

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u\|_{L_2}^{1/q} \|u\|_{L^{2q-2}}^{1-1/q},$$

per ogni $u \in L^{2q-2}(\mathbb{T})$.

Questo lemma e la già dimostrata compattezza dell'immersione di $H^{1/2}(\mathbb{T})$ in $L^2(\mathbb{T}) = H^0(\mathbb{T})$ implicano la compattezza dell'immersione $H^{1/2}(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$. Sia infatti (u_n) una successione limitata in $H^{1/2}(\mathbb{T})$. Per il Teorema 4.1, una sottosuccessione (v_n) di (u_n) è di Cauchy in $L^2(\mathbb{T})$. Dato che (v_n) è anche limitata in $L^{2p-2}(\mathbb{T})$ per quanto già dimostrato, il Lemma 4.8 implica che (v_n) è di Cauchy in $L^p(\mathbb{T})$, come volevasi dimostrare.