5 Setting funzionale per lo studio del funzionale di azione Hamiltoniana

5.1 Il funzionale di azione Hamiltoniana

Sia $H \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n})$ una Hamiltoniana 1-periodica nel tempo. Consideriamo il seguente funzionale di azione

$$\mathbb{A}_H(x) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Jx'(t) \cdot x(t)\, dt - \int_{\mathbb{T}} H(t, x(t))\, dt,$$

definito per il momento sullo spazio $C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$ delle curve lisce 1-periodiche in $\mathbb{R}^{2n}$.

Osservazione 5.1. *Equivalentemente, se λ è una primitiva della forma simplettica ω_0, ad esempio $\lambda = \lambda_0 = \sum_{j=1}^n p_j dq_j$, il funzionale azione può essere scritto nella forma*

$$\mathbb{A}_H(x) = \int_{\mathbb{T}} x^*\lambda - \int_{\mathbb{T}} H(t, x(t))\, dt.$$

Questa espressione permette di estendere il funzionale azione ad Hamiltoniane definite su varietà simplettiche (M, ω) esatte, ossia tali che ω sia esatta.

Calcoliamo la sua derivata lungo una direzione $u \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned}
d\mathbb{A}_H(x)[u] &:= \frac{d}{ds}\mathbb{A}_H(x + su)\Big|_{s=0} \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Ju'(t) \cdot x(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Jx'(t) \cdot u(t)\, dt - \int_{\mathbb{T}} d_x H(t, x(t))[u(t)]\, dt, \\
&= -\int_{\mathbb{T}} \big(Jx'(t) + \nabla_x H(t, x(t)\big) \cdot u(t)\, dt,
\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti il primo termine ed abbiamo usato l'antisimmetria di J. L'espressione sopra mostra che $d\mathbb{A}_H(x)[u]$ si annulla per ogni $u \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$ se e solamente se x risolve l'equazione

$$x'(t) = J\nabla_x H(t, x(t)), \tag{1}$$

ossia se e soltanto se x è un'orbita 1-periodica del sistema Hamiltoniano associato a H.

5.2 La parte quadratica di $\mathbb{A}_H$

Lo sviluppo di Fourier di una curva $x \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$ può essere scritto nella forma

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ktJ} x_k, \qquad x_k \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove l'esponenziale di θJ è la seguente rotazione di angolo θ:

$$e^{\theta J} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, I & \sin\theta\, I \\ -\sin\theta\, I & \cos\theta\, I \end{pmatrix},$$

con I matrice identità $n \times n$. Riscriviamo la parte quadratica del funzionale azione, ovvero il funzionale azione relativo all'Hamiltoniana zero, in termini dei coefficienti di Fourier di x:

$$\mathbb{A}_0(x) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Jx'(t) \cdot x(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\pi k e^{2\pi ktJ} x_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ktJ} x_k\Big)\, dt = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k|x_k|^2,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\{e^{2\pi ktJ} e_j\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, 2n\}$, è una base Hilbertiana di $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$. Dunque

$$\big|\mathbb{A}_0(x)\big| \le \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||x_k|^2$$

definisce una forma quadratica continua sullo spazio di Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{2n})$. Su questo spazio di Hilbert reale, che indichiamo per brevità con E, mettiamo il prodotto scalare (equivalente a quello usato nel Capitolo 4)

$$(x,y) := x_0 \cdot y_0 + 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| x_k \cdot y_k,$$

ed indichiamo con $\|\cdot\|$ la norma associata. Se consideriamo la decomposizione ortogonale

$$E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+,$$

definita da

$$E^- := \{x \in E \mid x_k = 0 \; \forall k \geq 0\}, \quad E^0 := \left\{x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^{2n}\right\} \cong \mathbb{R}^{2n}, \quad E^+ := \{x \in E \mid x_k = 0 \; \forall k \leq 0\},$$

e con P^-, P^0, P^+ i proiettori ortogonali associati, si ha

$$\mathbb{A}_0(x) = \pi \sum_{k>0} k|x_k|^2 - \pi \sum_{k<0} |k||x_k|^2 = \frac{1}{2}\|P^+x\|^2 - \frac{1}{2}\|P^-x\|^2 = \frac{1}{2}\big((P^+ - P^-)x, x\big).$$

Quindi $P^+ - P^-$ è l'operatore lineare limitato autoaggiunto che rappresenta la forma quadratica continua $\mathbb{A}_0 : E \to \mathbb{R}$ rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)$. L'operatore autoaggiunto $P^+ - P^-$ è un operatore di Fredholm (si veda l'appendice). Il suo spettro è molto semplice: è composto dagli autovalori ± 1, di molteplicità infinita, e dall'autovalore 0, di molteplicità $2n$.

Osservazione 5.2. *Sugli spazi di Sobolev $H^s(\mathbb{T},\mathbb{R}^{2n})$ con $s < 1/2$, la forma quadratica $\mathbb{A}_0$ non ha un'estensione continua. Per $s > 1/2$ invece $\mathbb{A}_0$ ha, a fortiori, un estensione continua, ma per la compattezza dell'immersione $H^s(\mathbb{T}) \to H^{1/2}(\mathbb{T})$ l'operatore autoaggiunto che la rappresenta risulta compatto.*

5.3 L'integrale dell'Hamiltoniana

Passiamo ad analizzare la parte del funzionale azione definita dall'Hamiltoniana H, ossia il funzionale

$$h(x) := \int_{\mathbb{T}} H(t, x(t))\, dt.$$

Dato che le curve $H^{1/2}$ non sono in generale limitate, occorrono ipotesi di crescita su H affinchè h sia ben definito su E. Con ipotesi di crescita polinomiale su tutte le derivate di H, h risulta in effetti regolare:

Proposizione 5.3. *Se la funzione $H \in C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n})$ e tutte le sue derivate spaziali hanno crescita al più polinomiale in x, ossia se per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono una costanti C_k e N_k tali che*

$$\|d_x^k H(t,x)\| \leq C_k(1 + |x|^{N_k}), \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n},$$

allora il funzionale h risulta di classe C^∞ su E e si ha

$$d^k h(x)[u]^k = \int_{\mathbb{T}} d_x^k H(t, x(t))[u(t)]^k\, dt, \qquad \forall x, u \in E.$$

Dimostrazione. Innanzitutto la disuguaglianza

$$|H(t,x)| \leq C_0(1 + |x|^{N_0}), \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n},$$

ed il fatto che E si immerge in $L^{N_0}(\mathbb{T},\mathbb{R}^{2n})$ implicano che h è ben definito su E. La regolarità di h può essere dedotta dal Teorema 2.9. Infatti applicando questo teorema alla funzione H troviamo che

$$H(t, x+u) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} d_x^j H(t,x)[u]^j + R_k(t,x,u)|u|^k, \qquad \forall t \in \mathbb{T},\; x, u \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove $R_k \in C^0(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n})$ è tale che $R_k(t,x,0) = 0$ per ogni $(t,x) \in \mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n}$. Allora, per ogni $x, u \in E$ si ha

$$h(x+u) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)[u]^j + r_k(x,u)\|u\|^k,$$

dove

$$a_j(x)[u]^j := \frac{1}{j!}\int_{\mathbb{T}} d_x^j H(t,x(t))[u(t)]^j\,dt, \qquad r_k(x,u) := \frac{1}{\|u\|^k}\int_{\mathbb{T}} R_k(t,x(t),u(t))|u(t)|^k\,dt, \quad r_k(x,0) := 0.$$

Ci basta dimostrare che per ogni $x \in E$ ciascuna $a_j(x)$ è una forma j-lineare continua su E, che la mappa $a_j : E \to L^j(E;\mathbb{R})$ è continua, e che la mappa $r_k : E \times E \to \mathbb{R}$ è continua. Infatti in questo caso il Teorema 2.9 implica che h è di classe C^k e che il suo differenziale j-esimo in x è dato da $j!a_j(x)$. I fatti elencati sopra seguono facilmente dalle ipotesi di crescita polinomiale sulle derivate di H e dal fatto che E si immerge con continuità in tutti gli spazi L^p. □

La seguente proposizione ci dice che il problema di trovare soluzioni 1-periodiche dell'equazione (1) è equivalente a quello di trovare punti critici del funzionale azione $\mathbb{A}_H$ sullo spazio di Hilbert E.

Proposizione 5.4. *Se la funzione $H \in C^\infty(\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n})$ e tutte le sue derivate spaziali hanno crescita al più polinomiale in x, allora il funzionale azione $\mathbb{A}_H$ risulta di classe C^∞ su E. Inoltre $x \in E$ è un punto critico di $\mathbb{A}_H$ se e solamente se $x \in C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R}^{2n})$ è una soluzione 1-periodica del sistema Hamiltoniano (1).*

Dimostrazione. Il termine $\mathbb{A}_0$, essendo una forma quadratica continua su E, è di classe $C^\infty(E)$ con

$$d\mathbb{A}_0(x)[u] = \big((P^+ - P^-)x, u\big), \qquad d^2\mathbb{A}_0(x)[u,v] = \big((P^+ - P^-)u, v\big), \quad d^k\mathbb{A}_0(x) = 0, \ \forall k \geq 3.$$

Il termine h è C^∞ grazie alla Proposizione 5.3. Quindi anche $\mathbb{A}_H$ è C^∞ su E.

Sia $x \in E$ un punto critico di $\mathbb{A}_H$. Dato che x sta in tutti gli L^p, la condizione di crescita su dH ci assicura che $\nabla H(\cdot, x(\cdot))$ sta in $L^2(\mathbb{T})$ e come tale ha uno sviluppo di Fourier della forma

$$\nabla H(t,x(t)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k t J} h_k, \qquad \text{con } (h_k) \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{R}^{2n}),$$

che converge in L^2. Dato che

$$dh(x)[u] = \big(\nabla H(\cdot,x(\cdot)), u\big)_{L^2}, \qquad \forall u \in E,$$

dall'equazione $d\mathbb{A}_H(x)[u] = 0$ ricaviamo che

$$\big((P^+ - P^-)x, u\big) = \big(\nabla H(\cdot,x(\cdot)), u\big)_{L^2}, \qquad \forall u \in E,$$

da cui

$$2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k x_k \cdot u_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \cdot u_k, \qquad \forall u \in E.$$

Prendendo come funzioni test gli elementi della base Hilbertiana standard di E, deduciamo che

$$h_k = 2\pi k\, x_k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Allora

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 |x_k|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty.$$

da cui x appartiene a $H^1(\mathbb{T},\mathbb{R}^{2n})$. Per il Teorema 4.2, la serie di Fourier di x converge uniformemente e x è continua. Perciò la funzione

$$y(t) := x(0) + \int_0^t J\nabla H(s,x(s))\,ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Grazie alla identità (2), è semplice verificare che $y = x$. Infatti:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k + \int_0^t J \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k s J} h_k\,ds = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^t 2\pi k J e^{2\pi k s J} x_k\,ds \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big[e^{2\pi k s J} x_k\big]_0^t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k t J} x_k = x(t). \end{aligned}$$

Quindi x è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risolve

$$x'(t) = J\nabla H(t,x(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Da questa equazione segue che in effetti $x \in C^\infty(\mathbb{T})$. □

5.4 Proprietà di compattezza del funzionale h

Ricordiamo che una mappa tra spazi metrici completi si dice compatta se manda limitati in insiemi precompatti (cioè con chiusura compatta, ovvero totalmente limitati).

PROPOSIZIONE 5.5. *Se la funzione $H \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n})$ e tutte le sue derivate spaziali hanno crescita al più polinomiale in x, allora il gradiente di h risulta una mappa compatta.*

Dimostrazione. Mostriamo che se (x_n) è limitata allora $(\nabla h(x_n))$ possiede una sottosuccessione convergente. A meno di sottosuccessioni, possiamo supporre che (x_n) converga debolmente ad una certa $x \in E$. Vogliamo mostrare che $\nabla h(x_n)$ tende a $\nabla h(x)$. Equivalentemente, basta verificare che per ogni successione $(u_n) \subset E$ che converge debolmente ad una certa $u \in E$, risulta

$$(\nabla h(x_n), u_n) \to (\nabla h(x), u), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Si ha

$$(\nabla h(x_n), u_n) = dh(x_n)[u_n] = \int_{\mathbb{T}} d_x H(t, x_n(t))[u_n(t)]\, dt \tag{3}$$

Per il Teorema 4.3, (x_n) e (u_n) convergono a x e u in tutte le norme L^p, $1 \leq p < \infty$ e, a meno di un'ulteriore estrazione di sottosuccessioni, che le convergenze siano anche quasi ovunque. Perciò l'integrando del termine di destra di (3) converge quasi ovunque a

$$d_x H(t, x(t))[u(t)].$$

Inoltre, per le ipotesi di crescita su H,

$$|d_x H(t, x_n(t))[u_n(t)]| \leq C_1(1 + |x_n(t)|^{N_1})|u_n(t)|, \qquad \text{per q.o. } t \in \mathbb{T}.$$

Essendo compatte in L^2, le successioni $|x_n|^{N_1}$ e $|u_n|$ sono dominate da funzioni L^2:

$$|x_n(t)|^{N_1} \leq f(t), \qquad |u_n(t)| \leq g(t), \qquad \text{per q.o. } t \in \mathbb{T}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, quindi $|d_x H(t, x_n(t))[u_n(t)]|$ è dominata da una funzione L^1 e il teorema di convergenza dominata permette di concludere che (3) converge a

$$\int_{\mathbb{T}} d_x H(t, x(t))[u(t)]\, dt = dh(x)[u] = (\nabla h(x), u),$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

È utile considerare il caso particolare di una Hamiltoniana quadratica.

PROPOSIZIONE 5.6. *Sia $H \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n})$ una Hamiltoniana della forma*

$$H(t, x) = \frac{1}{2} A(t)x \cdot x, \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n},$$

dove $A \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathrm{Simm}\,(\mathbb{R}^{2n}))$ è una curva chiusa di matrici simmetriche. Allora l'operatore autoaggiunto $\mathcal{H} \in L(E, E)$ tale che

$$(\mathcal{H}x, y) = \int_{\mathbb{T}} A(t)x(t) \cdot y(t)\, dt, \qquad \forall x, y \in E,$$

è compatto. Inoltre l'operatore autoaggiunto $\nabla^2 \mathbb{A}_H(0) = P^+ - P^- - \mathcal{H}$ che rappresenta la forma quadratica $\mathbb{A}_H$ è un isomorfismo se e solamente se il sistema Hamiltoniano lineare

$$x'(t) = JA(t)x(t)$$

non possiede soluzioni 1-periodiche diverse dalla soluzione banale $x \equiv 0$.

Dimostrazione. Dato che
$$\nabla h(x) = \mathcal{H}x, \qquad \forall x \in E,$$
la Proposizione 5.5 garantisce che l'operatore lineare $\mathcal{H}$ sia compatto sullo spazio di Hilbert E. Essendo una perturbazione compatta dell'operatore di Fredholm autoaggiunto $P^+ - P^-$, l'operatore $\nabla^2\mathbb{A}_H(0)$ è Fredholm di indice zero (si veda l'Appendica 5.6). Quindi è un isomorfismo se e solamente se è iniettivo. D'altra parte $x \in E$ è un elemento del nucleo di $\nabla^2\mathbb{A}_H(0)$ se e solamente se x è un punto critico della forma quadratica $\mathbb{A}_H$ e, per la Proposizione 5.4, se e solamente se $x \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$ è una soluzione 1-periodica del sistema Hamiltoniano lineare
$$x'(t) = J\nabla_x H(t,x)x(t) = JA(t)x(t).$$
La tesi segue. □

5.5 Perturbazioni compatte di forme quadratiche

Per quanto visto nella sezione precedente, il funzionale azione ha la forma
$$f(x) = \frac{1}{2}(Lx, x) + b(x)$$
dove L è un operatore limitato autoaggiunto invertibile e il gradiente della funzione b è una mappa compatta. Infatti basta scegliere
$$L = P^+ - P^- + P^0, \quad b(x) = -\frac{1}{2}(P^0x, x) - h(x).$$
Scopo di questa sezione è stabilire alcune proprietà generali di funzionali di questo tipo.

Proposizione 5.7. *Supponiamo che L sia un operatore limitato autoaggiunto invertibile e che $b \in C^1(E)$ abbia gradiente compatto. Allora le successioni di Palais-Smale limitate per*
$$f(x) = \frac{1}{2}(Lx, x) + b(x), \qquad x \in E,$$
sono pre-compatte. Se inoltre
$$\nabla b(x) = o\big(\|x\|\big), \qquad \text{per } \|x\| \to \infty, \tag{4}$$
allora f soddisfa la condizione di Palais-Smale.

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione (PS) limitata per f. A meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che $\nabla b(x_n)$ converga ad un certo $y \in E$. Dato che
$$\nabla f(x_n) = Lx_n + \nabla b(x_n)$$
tende a zero, deduciamo che Lx_n converge a $-y$, e dall'invertibilità di L che x_n converge a $-L^{-1}y$.

Inoltre una successione (PS) soddisfa
$$o(1) = \|\nabla f(x_n)\| = \|Lx_n + \nabla b(x_n)\| \geq \|Lx_n\| - \|\nabla b(x_n)\| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|}\|x_n\| - \|\nabla b(x_n)\|,$$
da cui, se vale (4), (x_n) è necessariamente limitata. □

Osservazione 5.8. *In assenza della condizione (4), non possiamo aspettarci che (PS) valga. Un esempio è dato dal funzionale azione*
$$\mathbb{A}_0(x) = \frac{1}{2}\big((P^+ - P^-)x, x\big)$$
relativo all'Hamiltoniana nulla: i suoi punti critici sono gli elementi del nucleo di $P^+ - P^-$, che compongono il sottospazio E^0, un insieme non compatto dove $\mathbb{A}_0 = 0$.

Proposizione 5.9. *Sia*
$$f(x) = \frac{1}{2}(Lx, x) + b(x), \qquad x \in E,$$
dove L è un operatore limitato (non necessariamente invertibile) e $b \in C^{1,1}(E)$ ha gradiente compatto con crescita lineare:
$$\|\nabla b(x)\| \leq c(1 + \|x\|), \qquad \forall x \in E. \tag{5}$$
Allora il flusso gradiente di f, ossia il flusso di $-\nabla f$, che grazie all'ipotesi (5) e al Teorema 2.16 è definito globalmente, ha la forma
$$\phi(s, x) = e^{-sL}x + K(s, x),$$
dove la mappa continua
$$K : \mathbb{R} \times E \to E$$
è compatta.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla formula di variazione delle costanti arbitrarie. Una linea di flusso $x : \mathbb{R} \to E$ risolve l'equazione
$$x'(s) + Lx(s) = -\nabla b(x(s)),$$
che mltiplicata a sinistra per e^{Ls} diventa
$$\frac{d}{ds}\Big(e^{sL}x(s)\Big) = -e^{sL}\nabla b(x(s)),$$
da cui, integrando,
$$e^{sL}x(s) = x(0) - \int_0^s e^{\sigma L}\nabla b(x(\sigma))\, d\sigma,$$
ovvero
$$x(s) = e^{-sL}x(0) - \int_0^s e^{(\sigma - s)L}\nabla b(x(\sigma))\, d\sigma.$$
Dunque il flusso ϕ soddisfa l'identità
$$\phi(s, x) = e^{-sL}x - \int_0^s e^{(\sigma - s)L}\nabla b(\phi(\sigma, x))\, d\sigma,$$
ed è sufficiente mostrare che la mappa
$$K(s, x) := -\int_0^s e^{(\sigma - s)L}\nabla b(\phi(\sigma, x))\, d\sigma$$
è compatta, ossia che per ogni $s_0 > 0$ e per ogni insieme limitato $A \subset E$, l'insieme $K([-s_0, s_0] \times A)$ è pre-compatto. Per l'ipotesi di crescita lineare (5), il flusso ϕ manda limitati in limitati. Dunque, per la compattezza di ∇b, l'insieme
$$\nabla b\Big(\phi\big([-s_0, s_0] \times A\big)\Big)$$
è precompatto. Ma allora è precompatto anche l'insieme
$$-e^{[-s_0, s_0]L}\nabla b\Big(\phi\big([-s_0, s_0] \times A\big)\Big)$$
e dunque anche il suo convessificato, che indichiamo con C. Allora
$$K(s, x) \in sC \subset [-s_0, s_0]C$$
varia in un compatto, per $|s| \leq s_0$ e $x \in A$. □

5.6 Appendice: operatori di Fredholm

Siano X e Y spazi di Banach. Un operatore lineare limitato $T \in L(X, Y)$ si dice di Fredholm se il suo nucleo ha dimensione finita e la sua immagine è chiusa e ha codimensione finita (ricordiamo che la codimensione di un sottospazio V di Y è la dimensione del quoziente Y/V). In questo caso, l'intero

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{Im} T$$

si dice indice di Fredholm di T. Gli operatori invertibili sono pertanto operatori di Fredholm di indice zero. Lo shift surgettivo,

$$e_n \mapsto e_{n-1}, \qquad \forall n \geq 1, \qquad e_0 \mapsto 0,$$

su ℓ^2 è Fredholm di indice 1, mentre il suo aggiunto, ossia lo shift iniettivo

$$e_n \to e_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

è Fredholm di indice -1.

Il seguente risultato dice che le perturbazioni piccole di operatori di Fredholm sono ancora di Fredholm con il medesimo indice:

Teorema 5.10. *L'insieme $\Phi(X, Y)$ degli operatori di Fredholm da X in Y è un aperto di $L(X, Y)$ e l'indice di Fredholm è una funzione ivi localmente costante.*

Il seguente risultato dice che lo stesso vale per perturbazioni compatte.

Teorema 5.11. *Se $T \in \Phi(X, Y)$ è un operatore di Fredholm e $K \in L(X, Y)$ è un operatore compatto, allora $T + K$ è Fredholm e $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.*

Composizione di operatori di Fredholm è Fredholm e l'indice è adittivo:

Teorema 5.12. *Se $S \in \Phi(X, Y)$ e $T \in \Phi(Y, Z)$ sono operatori di Fredholm, allora $T \circ S$ è Fredholm e $\operatorname{ind} T \circ S = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$.*

Anche l'aggiunto di un operatore di Fredholm è Fredholm:

Teorema 5.13. *Se $T \in \Phi(X, Y)$ è un operatore di Fredholm, allora il suo aggiunto $T^* \in L(Y^*, X^*)$ è Fredholm e $\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T$.*

La teoria degli operatori di Fredholm è particolarmente ricca nel caso $X = Y = H$, spazio di Hilbert. Qua gli operatori di Fredholm di indice zero sono tutte e sole le perturbazioni compatte degli operatori invertibili. Gli operatori di Fredholm autoaggiunti hanno necessariamente indice zero.