6 Dimostrazione della congettura di Weinstein e del teorema non-squeezing

6.1 Dimostrazione della congettura di Weinstein in $\mathbb{R}^{2n}$

Scopo di questa sezione è dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 6.1. *Sia Σ una varietà di dimensione $2n-1$ compatta, connessa, senza bordo, e sia*

$$\varphi : I \times \Sigma \to \mathbb{R}^{2n}$$

un embedding su un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto. Allora esiste un sottoinsieme $I_0 \subset I$ denso tale che per ogni $s \in I_0$ l'ipersuperficie

$$\Sigma_s := \varphi\big(\{s\} \times \Sigma\big)$$

possiede una caratteristica chiusa.

La congettura di Weinstein in $\mathbb{R}^{2n}$ è una conseguenza immediata di questo teorema. Infatti, abbiamo visto che un'ipersuperficie $\Sigma_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$ compatta connessa e di contatto può essere vista come foglia di una foliazione in ipersuperfici $\{\Sigma_s\}_{s\in]-\epsilon,\epsilon[}$ tale che le foliazioni caratteristiche delle varie Σ_s siano tra loro isomorfe. L'esistenza di una caratteristica chiusa per un certo $s \in]-\epsilon,\epsilon[$ implica allora l'esistenza di una caratteristica chiusa per Σ_0.

Osserviamo inoltre che, a meno di considerare un sottointervallo di I, ci basta dimostrare che esiste un $s \in I$ tale che Σ_s possiede una caratteristica chiusa. Possiamo supporre $I =]0,1[$.

Cominciamo con il costruire una Hamiltoniana $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ che abbia le ipersuperfici Σ_s tra i suoi insiemi di livello. L'insieme

$$U := \bigcup_{s\in]0,1[} \Sigma_s$$

divide $\mathbb{R}^{2n}$ in due componenti connesse A e B, con A illimitata e B limitata. A meno di una traslazione, possiamo supporre che l'origine appartenga alla parte interna di B. Fissiamo un numero d maggiore del diametro di U, una costante a tale che

$$a > \frac{3}{2}\pi d^2,$$

una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f = 0$ su $]-\infty, 0]$, $f = a$ su $[1,+\infty[$, $f' > 0$ su $]0,1[$, e una funzione $g \in C^\infty([0,+\infty[)$ tale che

$$\begin{aligned}
g(r) &= a, && \forall r \in [0,d], && (1)\\
g(r) &\geq \tfrac{3}{2}\pi r^2, && \forall r \geq 0, && (2)\\
g(r) &= \tfrac{3}{2}\pi r^2, && \text{per } r \text{ sufficientemente grande}, && (3)\\
0 < g'(r) &\leq 3\pi r, && \forall r > d. && (4)
\end{aligned}$$

Definiamo $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in B, \\ f(s) & \text{se } x \in \Sigma_s \text{ con } 0 < s < 1, \\ a & \text{se } x \in A \text{ e } |x| \leq d, \\ g(|x|) & \text{se } x \in A \text{ e } |x| > d. \end{cases}$$

Osserviamo che $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ e che H è non negativa.

LEMMA 6.2. *Se $x \in E = H^{1/2}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n})$ è un punto critico di $\mathbb{A}_H$ tale che $\mathbb{A}_H(x) > 0$, allora x è un'orbita 1-periodica del campo Hamiltoniano $J\nabla H$ che appartiene ad una ipersuperficie Σ_s, per qualche $s \in]0,1[$.*

Dimostrazione. Sappiamo dalla Proposizione 5.4 che x è un'orbita 1-periodica del campo Hamiltoniano $J\nabla H$. Dato che $H \geq 0$, le orbite costanti hanno azione negativa o nulla, quindi x è non costante. Dato che H non dipende dal tempo, $H(x(t))$ è costante. Per come è stata definita H, è sufficiente mostrare che le orbite 1-periodiche x con $|x(t)| > d$ per ogni t hanno azione negativa o nulla. In un intorno di una tale orbita, $H(x) = g(|x|)$, quindi $|x(t)| \equiv r$, per qualche $r > d$, e

$$x'(t) = J\nabla H(x(t)) = Jg'(|x(t)|)\frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{g'(r)}{r}Jx(t).$$

Dunque, usando le proprietà (2) e (4) della funzione g,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_H(x) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Jx'(t) \cdot x(t)\,dt - \int_{\mathbb{T}} H(x(t))\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{g'(r)}{r}x(t)\cdot x(t)\,dt - \int_{\mathbb{T}} g(|x(t)|)\,dt \\ &= \frac{1}{2}g'(r)r - g(r) \le \frac{3}{2}\pi r^2 - \frac{3}{2}\pi r^2 = 0, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Grazie a questo lemma e alla Proposizione 5.4, è sufficiente dimostrare che $\mathbb{A}_H$ possiede un valore critico positivo.

Per costruzione, la funzione $K \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,

$$K(x) := H(x) - \frac{3}{2}\pi|x|^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2n},$$

ha supporto compatto. Se $\mathcal{H} \in L(E,E)$ è l'operatore autoaggiunto tale che

$$(\mathcal{H}x, x) = 3\pi \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2\,dt,$$

si ha

$$\mathbb{A}_H(x) = \frac{1}{2}\big((P^+ - P^- - \mathcal{H})x, x\big) + b(x),$$

dove

$$b(x) = -\int_{\mathbb{T}} K(x(t))\,dt.$$

Lemma 6.3. *L'operatore autoaggiunto $P^+ - P^- - \mathcal{H}$ è invertibile. Il gradiente di b è una mappa compatta e limitata.*

Dimostrazione. Il sistema Hamiltoniano lineare associato all'Hamiltoniana quadratica $3\pi/2|x|^2$ è

$$x'(t) = 3\pi Jx(t). \tag{5}$$

Le sue soluzioni sono della forma

$$x(t) = e^{3\pi t J}x(0).$$

In particolare,

$$x(1) = e^{3\pi J}x(0) = -x(0),$$

dunque il sistema 5 non ha soluzioni 1-periodiche non banali. La prima affermazione segue allora dalla Proposizione 5.6. La compattezza di ∇b segue dalla Proposizione 5.5, e dalla limitatezza di dK deduciamo quella di ∇b: infatti risulta

$$\big|db(x)[u]\big| = \left|\int_{\mathbb{T}} dK(x(t))[u(t)]\,dt\right| \le \|dK\|_\infty \|u\|_{L^1} \le C\|dK\|_\infty\|u\|,$$

dove C è la norma dell'immersione $E \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$, da cui

$$\sup_{x\in E} \|\nabla b\| = \sup_{x\in E} \|db\| \le C\|dK\|_\infty < +\infty.$$

□

Passiamo a studiare ora la geometria del funzionale $\mathbb{A}_H$.

Lemma 6.4. *Sia $S := \{x \in E^+ \mid \|x\| = \rho\}$. Se $\rho > 0$ è sufficientemente piccolo, risulta*

$$\inf_{x \in S} \mathbb{A}_H(x) > 0.$$

Dimostrazione. Dato che H si annulla in un intorno di 0, si ha $H(0) = 0$, $dH(0) = 0$, $d^2H(0) = 0$ e, per la Proposizione 5.3,

$$\mathbb{A}_H(0) = 0, \qquad d\mathbb{A}_H(0) = 0, \qquad d^2\mathbb{A}_H(0)[u]^2 = \|P^+u\|^2 - \|P^-u\|^2,$$

per ogni $u \in E$. La tesi segue allora dalla formula di Taylor con resto di Peano. $\square$

Sia e_0 un vettore unitario di $\mathbb{R}^{2n}$ e poniamo

$$e(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi t J} e_0.$$

La curva e appartiene a E^+ e si ha

$$\|e\| = 1, \qquad \|e\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{6}$$

Dato un numero $R > 0$, definiamo l'insieme

$$Q := \left\{ x = x^0 + x^- + se \mid x^0 \in E^0,\ x^- \in E^-,\ \|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 \leq R^2,\ 0 \leq s \leq R \right\}.$$

L'insieme Q è contenuto nel sottospazio vettoriale $E^0 \oplus E^- \oplus \mathbb{R}e$ ed indichiamo con ∂Q il suo bordo relativo in tale sottospazio, ossia l'insieme

$$\partial Q = \left\{ x = x^0 + x^- + se \in Q \mid \|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 = R^2 \text{ oppure } s \in \{0, R\} \right\}.$$

Lemma 6.5. *Se $R > 0$ è sufficientemente grande, allora $\mathbb{A}_H \leq 0$ su ∂Q.*

Dimostrazione. Sia $x = x^0 + x^- + se$ un elemento di ∂Q. Se $s = 0$ si ha

$$\mathbb{A}_H(x) = -\frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \int_{\mathbb{T}} H(x(t))\, dt \leq 0.$$

Per la proprietà (3) della funzione g, abbiamo

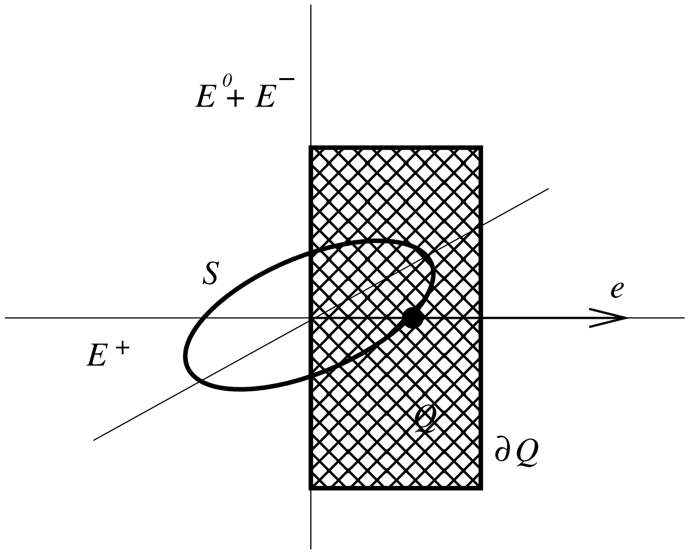
$$H(x) \geq \frac{3}{2}\pi |x|^2 - c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2n},$$

per qualche $c > 0$. Allora, se $x = x^0 + x^- + se$ è un elemento di ∂Q con $s = R$ oppure $\|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 = R^2$, troviamo, grazie a (6),

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_H(x) &= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \int_{\mathbb{T}} H(x(t))\, dt \leq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \frac{3}{2}\pi \left\| se + x^0 + x^- \right\|_{L^2}^2 + c \\
&= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \frac{3}{2}\pi s^2 \|e\|_{L^2}^2 - \frac{3}{2}\pi \|x^0\|_{L^2}^2 - \frac{3}{2}\pi \|x^-\|_{L^2}^2 + c \\
&= -\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \frac{3}{2}\pi \|x^0\|^2 - \frac{3}{2}\pi \|x^-\|_{L^2}^2 + c \leq -\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \frac{3}{2}\pi \|x^0\|^2 + c,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che gli spazi E^0, E^-, E^+ sono L^2-ortogonali ed il fatto che su E^0 la norma di E e quella L^2 coincidono. Questa disuguaglianza mostra che se R è sufficientemente grande, $\mathbb{A}_H(x) \leq 0$. $\square$

Fissiamo $\rho > 0$ sufficientemente piccolo e $R > 0$ sufficientemente grande, in modo che $R > \rho$ e che valgano le conclusioni dei Lemmi 6.4 e 6.5. La figura seguente schematizza la posizione degli insiemi che abbiamo definito.



Osservazione 6.6. *Se $E^0 \oplus E^-$ avesse dimensione finita, si potrebbe mostrare che gli insiemi S e ∂Q sono allacciati, nel senso seguente: se*

$$h : [0,1] \times Q \to E$$

è una mappa continua tale che $h(0,\cdot)$ sia l'immersione di Q in E e $h(s,\cdot)|_{\partial Q}$ sia l'immersione di ∂Q in E, per ogni $s \in [0,1]$, allora risulta

$$h(\{1\} \times Q) \cap S \neq \emptyset.$$

Quando, come nel nostro caso, $E^0 \oplus E^-$ ha dimensione infinita, questo non è vero: dal fatto che Q è omeomorfo ad una palla chiusa di uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e che questa è retraibile con continuità sul suo bordo, deduciamo l'esistenza di una mappa continua h con le proprietà elencate sopra e tale che $h(\{1\} \times Q) = \partial Q$.

Per la seconda affermazione del Lemma 6.3, il gradiente del funzionale $\mathbb{A}_H$ ha crescita lineare, dunque il flusso ϕ di $-\nabla \mathbb{A}_H$ è globalmente definito. Per la Proposizione 5.9, ϕ ha la forma

$$\phi(s,x) = e^{-s}P^+x + P^0x + e^sP^-x + K(s,x), \tag{7}$$

dove la mappa $K : \mathbb{R} \times E \to E$ è compatta. Poniamo

$$\Gamma := \{\phi_s(Q) \mid s \geq 0\}.$$

La classe Γ è ovviamente positivamente invariante rispetto a ϕ (è la più piccola classe positivamente invariante che contiene Q). Usando il grado di Leray-Schauder e la forma (7) di ϕ, dimostreremo in seguito la seguente:

Proposizione 6.7. *Per ogni $\gamma \in \Gamma$ risulta $\gamma \cap S \neq \emptyset$.*

Consideriamo il livello di minimax:

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{x \in \gamma} \mathbb{A}_H(x).$$

Dato che $Q \in \Gamma$ e $\mathbb{A}_H$ è limitato su Q, risulta $c < +\infty$. Per la Proposizione 6.7 ed il Lemma 6.4, per ogni $\gamma \in \Gamma$ si ha

$$\sup_{x \in \gamma} \mathbb{A}_H(x) \geq \inf_{x \in S} \mathbb{A}_H(x),$$

da cui $c > 0$. Per il principio di minimax generale, esiste una successione $(PS)_c$. Per la Proposizione 5.8 ed il Lemma 6.3, $\mathbb{A}_H$ soddisfa la condizione di Palais-Smale. Quindi c è il valore critico positivo di $\mathbb{A}_H$ desiderato.

6.2 Dimostrazione del teorema non-squeezing

Scopo di questa sezione è dimostrare il teorema non-squeezing di Gromov, ossia:

TEOREMA 6.8 (Non-squeezing). *Se $0 < s < r$ non esiste alcun diffeomorfismo simplettico $\phi : B_r \to \mathbb{R}^{2n}$ dalla palla di raggio r di $\mathbb{R}^{2n}$ in un sottoinsieme del cilindro di raggio s*

$$Z_s := \left\{(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_1^2 + p_1^2 < s^2\right\}.$$

Dedurremo questo teorema dal seguente risultato di esistenza di orbite periodiche:

TEOREMA 6.9. *Sia $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tale che $0 \le H \le m$, $H^{-1}(0)$ abbia parte interna non vuota ed esista un sottoinsieme compatto $K \subset Z_1$ tale che $H = m$ su $\mathbb{R}^{2n} \setminus K$. Allora il sistema Hamiltoniano*

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$$

possiede soluzioni 1-peridodiche non costanti.

Mostriamo dapprima come il Teorema 6.9 implichi il Teorema 6.8. A meno di riscalamenti, è sufficiente assumere $s = 1$. Supponiamo per assurdo che esista un diffeomorfismo simplettico ϕ che mandi la palla B_r di raggio $r > 1$ in un sottoinsieme di Z_1. Dato che $r > 1$, possiamo trovare costanti $m > \pi$, $\epsilon > 0$ ed una funzione $f \in C^\infty([0, +\infty[)$ tale che

$$f(\rho) = 0 \ \ \forall \rho < \epsilon, \qquad f(\rho) = m \ \ \forall \rho \ge r - \epsilon, \ \ 0 \le f'(\rho) < \pi \ \ \forall \rho \ge 0.$$

Consideriamo l'Hamiltoniana $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := f\big(|x|^2\big).$$

Le soluzioni non costanti del sistema Hamiltoniano associato stanno sugli insiemi di livello $F^{-1}(a)$ con $0 < a < m$, che sono delle sfere. Dunque ciascuna soluzione $x(t)$ non costante ha norma costante $|x(t)| = \rho$ e dall'equazione

$$\dot{x} = J\nabla F(x) = 2f'\big(|x|^2\big)Jx,$$

ricaviamo che la norma della velocità $\dot{x}$ è costante e vale

$$|\dot{x}| = 2f'\big(|x|^2\big)|x| = 2f'\big(\rho^2\big)\rho < 2\pi\rho.$$

Dato che la lunghezza dell'orbita $x(\mathbb{R})$ è $2\pi\rho$, il suo periodo è strettamente minore di 1. Dunque il sistema Hamiltoniano associato a F non ha orbite periodiche non costanti di periodo 1.

Definiamo ora l'Hamiltoniana

$$H(x) := \begin{cases} F\big(\phi^{-1}(x)\big) & \text{se } x \in \phi(B_r), \\ m & \text{se } x \notin \phi(B_r), \end{cases}$$

che risulta di classe C^∞. Le orbite non costanti di $J\nabla H$ sono le immagini tramite ϕ delle orbite non costanti di $J\nabla F$, quindi neanche $J\nabla H$ possiede orbite periodiche non costanti di periodo 1. Però per il Teorema 6.9, il sistema Hamiltoniano associato H deve avere soluzioni di periodo 1. Questa contraddizione dimostra il Teorema 6.8.

Dimostriamo adesso il Teorema 6.9. La prima osservazione è che possiamo assumere che l'origine appartenga alla parte interna di $H^{-1}(0)$. Infatti, sia x_0 un punto nella parte interna di $H^{-1}(0)$ e sia Y un intorno chiuso del segmento $[0, 1]x_0$ contenuto in Z_1. Sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ una funzione che vale 1 su Y e che ha supporto contenuto in Z_1 e consideriamo l'Hamiltoniana

$$K(x) := \psi(x)(Jx \cdot x_0).$$

Dato che

$$J\nabla K(x) = J\big((Jx \cdot x_0)\nabla\psi(x) - \psi(x)Jx_0\big),$$

deduciamo che $J\nabla K(x) = x_0$ su Y. Perciò il flusso ϕ_t di $J\nabla K$, che è l'identità fuori da Z_1, manda 0 in tx_0, per ogni $t \in [0, 1]$. In particolare, ϕ_1 manda 0 in x_0. L'Hamiltoniana $H \circ \phi_1$ sodisfa ancora le ipotesi del Teorema 6.9 e in più 0 appartiene alla parte interna del suo livello 0. Questo dimostra la nostra prima osservazione.

Vorremmo dedurre l'esistenza di un'orbita 1-periodica di $J\nabla H$ dallo studio del funzionale azione. Per far sì che questo soddisfi la condizione di (P.S.), è conveniente modificare H in modo che fuori da un compatto coincida con un'opportuna forma quadratica.

A tal fine, consideriamo la forma quadratica

$$\theta(x) = q_1^2 + p_1^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{j=2}^{n}(q_j^2 + p_j^2), \qquad x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n),$$

dove N è un intero positivo così grande che

$$\overline{\{H < m\}} \subset \{\theta < 1\}.$$

Fissiamo una costante μ tale che

$$\pi < \mu < \min\{m, 2\pi\},$$

e una funzione $\kappa \in C^\infty([0, +\infty[)$ tale che

$$\kappa(s) = m \ \ \forall s \leq 1, \qquad \kappa(s) \geq \mu s \ \ \forall s \geq 0, \qquad \kappa(s) = \mu s \ \text{ per } s \text{ grande}, \qquad 0 < \kappa'(s) \leq \mu \ \ \forall s > 1.$$

Definiamo l'Hamiltoniana

$$K(x) := \begin{cases} H(x) & \text{se } x \in \{\theta < 1\}, \\ \kappa(\theta(x)) & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

che per costruzione risulta di classe C^∞. Il seguente Lemma dice che le orbite 1-periodiche di $J\nabla K$ con azione positiva sono in effetti orbite 1-periodiche di $J\nabla H$.

LEMMA 6.10. *Sia $x \in E$ un punto critico di $\mathbb{A}_K$ con $\mathbb{A}_K(x) > 0$. Allora $x(\mathbb{R}) \subset \{\theta < 1\}$ e x è un'orbita 1-periodica non costante di $J\nabla H$.*

Dimostrazione. Dato che $K \geq 0$, il funzionale azione $\mathbb{A}_K$ è non positivo sulle curve costanti. Dunque x non è costante e, se per assurdo non ha immagine contenuta in $\{\theta < 1\}$ allora $\theta(x(t)) = s > 1$ per ogni t, visto che $\{\theta = 1\}$ è costituito da orbite costanti. Allora

$$\nabla K(x) = \kappa'\big(\theta(x)\big)\nabla\theta(x) = \kappa'(s)\nabla\theta(x),$$

e, dato che $\dot{x} = J\nabla K(x)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_K(x) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} J\dot{x}\cdot x\,dt - \int_{\mathbb{T}} K(x)\,dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \nabla K(x)\cdot x\,dt - \int_{\mathbb{T}} \kappa(\theta(x))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\kappa'(s)\int_{\mathbb{T}} \nabla\theta(x)\cdot x\,dt - \kappa(s). \end{aligned}$$

Insieme all'identità

$$\nabla\theta(x)\cdot x = 2\theta(x) = 2s,$$

questo implica

$$\mathbb{A}_K(x) = \kappa'(s)s - \kappa(s) \leq \mu s - \mu s = 0,$$

contro l'ipotesi $\mathbb{A}_K(x) > 0$. Questa contraddizione mostra che $x(\mathbb{R})$ è contenuta in $\{\theta < 1\}$ e , dato che qui $K = H$, x è anche un'orbita 1-periodica di $J\nabla H$. □

L'Hamiltoniana $K(x)$ coincide con $\kappa(\theta(x)) = \mu\theta(x)$ per $|x|$ grande. Per $|x|$ grande il sistema $\dot{x} = J\nabla K(x)$ coincide dunque con il sistema lineare

$$\dot{x} = \mu J\nabla\theta(x). \tag{8}$$

Affermiamo che (8) non ha soluzioni 1-periodiche non banali. Infatti, posto $x_j = (q_j, p_j)$, (8) può essere riscritto come

$$\dot{x}_1 = 2\mu Jx_1, \qquad \dot{x}_j = 2\frac{\mu}{N^2}Jx_j \quad \text{per } j = 2, \dots, n,$$

le cui soluzioni hanno la forma

$$x_1(t) = e^{2\mu t J} x_1(0), \qquad x_j(t) = e^{2(\mu/N^2)tJ} x_j(0) \quad \text{per } j = 2, \dots, n.$$

Se $x_1(0) \neq 0$, allora x_1 è 1-periodica se e solamente se $\mu \in \pi\mathbb{Z}$. Se $x_j(0) \neq 0$ con $j \geq 2$, allora x_j è 1-periodica se e solamente se $\mu \in N^2\pi\mathbb{Z}$. Dato che $\pi < \mu < 2\pi$, concludiamo che (8) non ha soluzioni 1-periodiche non banali. La Proposizione 5.5. assicura dunque che il funzionale $\mathbb{A}_K$ soddisfa (P.S.).

Mostriamo adesso che il funzionale $\mathbb{A}_K$ ha la stessa geometria del funzionale $\mathbb{A}_H$ studiato nella dimostrazione della congettura di Weinstein. Innanzitutto, dal fatto che $K(0) = 0$, $dK(0) = 0$, $d^2K(0) = 0$ deduciamo il seguente risultato, la cui dimostrazione è identitca a quella del Lemma 6.4:

Lemma 6.11. *Sia $S := \{x \in E^+ \mid \|x\| = \rho\}$. Se $\rho > 0$ è sufficientemente piccolo, risulta*

$$\inf_{x \in S} \mathbb{A}_K(x) > 0.$$

Sia

$$e(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\pi t J} e_0,$$

dove e_0 è un vettore unitario nel piano corrispondente alle coordinate q_1, p_1. La curva e appartiene a E^+ e si ha

$$\|e\| = 1, \qquad \|e\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{9}$$

Come nella sezione precedente, definiamo per $R > 0$ l'insieme

$$Q := \left\{ x = x^0 + x^- + se \mid x^0 \in E^0,\ x^- \in E^-,\ \|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 \leq R^2,\ 0 \leq s \leq R \right\},$$

ed indichiamo con ∂Q il suo bordo relativo in $E^0 \oplus E^- \oplus \mathbb{R}e$.

Lemma 6.12. *Se $R > 0$ è sufficientemente grande, allora $\mathbb{A}_K \leq 0$ su ∂Q.*

Dimostrazione. Sia $x = x^0 + x^- + se$ un elemento di ∂Q. Se $s = 0$ si ha

$$\mathbb{A}_K(x) = -\frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \int_{\mathbb{T}} K(x(t))\, dt \leq 0.$$

Supponiamo allora che $s = R$ oppure che $0 \leq s \leq R$ e $\|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 = R^2$. Dato che K coincide con $\mu\theta$ fuori da un compatto, esiste una costante $c \geq 0$ tale che

$$K(x) \geq \mu\theta(x) - c, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Allora, usando il fatto che la decomposizione $E^0 \oplus E^- \oplus \mathbb{R}e$ è ortogonale anche rispetto al prodotto scalare associato alla forma quadratica

$$x \mapsto \int_{\mathbb{T}} \theta(x)\, dt,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_K(x) &= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \int_{\mathbb{T}} K(x(t))\, dt \leq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(x)\, dt + c \\
&= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(se)\, dt - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(x^0)\, dt - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(x^-)\, dt + c \\
&= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \frac{\mu s^2}{2\pi} - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(x^0)\, dt - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(x^-)\, dt + c \\
&\leq -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\pi} - 1\right)s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - \mu\int_{\mathbb{T}} \theta(x^0)\, dt + c.
\end{aligned}$$

Dal fatto che $\mu > \pi$ e dalla positività della forma quadratica θ, segue che se R è sufficientemente grande, allora la quantità sopra è non positiva ogni qual volta $s = R$ oppure $\|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 = R^2$. $\square$

La conclusione della dimostrazione è identica alla fine della dimostrazione della congettura di Weinstein, come descritta dopo l'Osservazione 6.6.