7 La teoria del grado in dimensione finita

7.1 Preliminari sulle forme differenziali di grado massimo

Ricordiamo alcuni fatti sull'integrazione di forme e sui valori singolari di una mappa.

Integrazione di n-forme differenziali. Siano X e Y varietà n-dimensionali. Qui e nel seguito per varietà si intenderà sempre varietà senza bordo di classe C^∞ Hausdorff e paracompatta. Sia α una k-forma su Y, e sia $f : X \to Y$ una mappa di classe C^1. Il *pull-back* di α tramite f è la k-forma $f^*(\alpha)$ su X, definita da

$$f^*(\alpha)(x)[\xi_1, \dots, \xi_k] = \alpha(f(x))[Df(x)\xi_1, \dots, Df(x)\xi_k], \quad \forall x \in X, \ \forall \xi_1, \dots, \xi_k \in T_x X.$$

Nel caso $k = n$, α si esprime in coordinate locali $(y^1, \dots, y^n)$ tramite una funzione reale a,

$$\alpha(y) = a(y) dy^1 \wedge \dots dy^n,$$

e la n-forma $f^*(\alpha)$ si esprime in coordinate locali $(x^1, \dots, x^n)$ su X come

$$f^*(\alpha)(x) = a(f(x)) \det Df(x) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \tag{1}$$

L'operazione di pull-back commuta con il differenziale:

$$f^*(d\alpha) = df^*(\alpha).$$

Se Y è una n-varietà orientata e la n-forma α ha supporto compatto, è ben definito l'integrale di α su Y,

$$\int_Y \alpha.$$

Dalla formula di cambio di variabile negli integrali multipli,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} a(g(x)) |\det Dg(x)| \, dx,$$

dove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo C^1, e dalla formula (1) segue che se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo C^1 tra varietà connesse orientate, allora

$$\int_X f^*(\alpha) = \operatorname{sgn} \det Df \int_Y \alpha. \tag{2}$$

La quantità $\operatorname{sgn} \det Df$ vale 1 se f conserva l'orientazione, -1 se la inverte.

Il teorema di Stokes implica che se β è una $(n-1)$-forma con supporto compatto in Y, allora

$$\int_Y d\beta = 0.$$

In effetti, vale anche una sorta di viceversa:

LEMMA 7.1. *Sia α una n-forma su $\mathbb{R}^n$ con supporto contenuto in un cubo aperto $Q \subset \mathbb{R}^n$ ed integrale nullo. Allora esiste una $(n-1)$-forma β con supporto contenuto in Q e tale che $d\beta = \alpha$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre

$$\alpha(x) = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

con $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avente supporto nel cubo aperto I^n, dove $I = (0, 1)$. Il nostro scopo è dimostrare che se

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) \, dx = 0,$$

allora esistono funzioni $b^1, \dots, b^n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con supporto in I^n tali che

$$a(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x^j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti in questo caso

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} b_j(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n$$

verifica $d\beta = \alpha$.

Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 1$ basta porre

$$b_1(x) = \int_{-\infty}^x a(s)\, ds.$$

Supponiamo che la conlusione del lemma sia vera in dimensione n, ed indichiamo con $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ le coordinate di $\mathbb{R}^{n+1}$. Dall'ipotesi

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} a(x, t)\, dxdt = 0,$$

segue che la funzione

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad m(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, t)\, dt,$$

ha integrale nullo su $\mathbb{R}^n$. Inoltre m ha supporto nel cubo I^n. Per l'ipotesi induttiva,

$$m(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x),$$

con le f_j aventi supporto in I^n. Definiamo $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ come

$$g(x, t) := \int_{-\infty}^t (a(x, s) - \tau(s)m(x))\, ds,$$

dove $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è una funzione con supporto in I ed integrale 1. Allora il supporto di g è contenuto in I^{n+1}, e

$$a(x, t) = a(x, t) - \tau(t)m(x) + \tau(t)m(x) = \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) + \sum_{j=1}^n \tau(t) \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x).$$

Quindi le funzioni

$$b_j(x, t) := \tau(t) f_j(x), \;\; \forall j = 1, \dots, n, \quad b_{n+1}(x, t) := g(x, t),$$

risolvono il problema. □

7.2 Costruzione del grado topologico

Siano X_0 e Y varietà n-dimensionali orientate, e sia $X \subset X_0$ un aperto con chiusura $\overline{X} = X \cup \partial X$ compatta. Siano $f \in C^0(\overline{X}, Y)$ e $y \in Y$ tale che $y \notin f(\partial X)$. Risulta interessante anche il caso $X = X_0$, ovvero X è una varietà compatta senza bordo: in questo caso non vi sono vincoli su y. Vorremmo definire il grado di f su X rispetto al punto y, che indicheremo con $\deg(f, X, y)$, come il numero di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $f(x) = y$, contate con opportuna molteplicità algebrica.

Mappe di classe $\mathbf{C^1}$. Iniziamo con l'assumere che $f \in C^1(X, Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Sia $y \in Y \setminus f(\partial X)$ e sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno *cubico* di y. Questo vuol dire che U è diffeomorfo ad un cubo aperto di $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente, ad una palla aperta di $\mathbb{R}^n$). Sia α una n-forma su Y, tale che

$$\operatorname{supp} \alpha \subset U \quad \text{e} \quad \int_Y \alpha = 1.$$

Definiamo
$$\deg(f,X,y) := \int_X f^*(\alpha).$$
Mostriamo che questa definizione non dipende dalla scelta della n-forma α. Sia dunque α' un'altra n-forma ammissibile. Dato che $\alpha' - \alpha$ ha integrale nullo ed ha supporto in un intorno cubico, il Lemma 7.1 implica che esiste una $(n-1)$-forma β con supporto in U tale che $\alpha' - \alpha = d\beta$. Quindi
$$\int_X f^*(\alpha') - \int_X f^*(\alpha) = \int_X f^*(\alpha' - \alpha) = \int_X f^*(d\beta) = \int_X df^*(\beta).$$
Dato che β ha supporto in U, che è disgiunto da $f(\partial X)$, la forma $f^*(\beta)$ ha supporto compatto in X, e dunque l'ultimo integrale si annulla. Questo prova l'indipendenza dalla scelta di α.

Si noti che la funzione
$$Y \setminus f(\partial X) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \deg(f,X,y),$$
è localmente costante: infatti se $y_0 \in Y \setminus f(\partial X)$, $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ è un intorno cubico di y_0 e α è una n-forma con supporto in U ed integrale 1, risulta
$$\deg(f,X,y) = \int_X f^*(\alpha) = \deg(f,X,y_0)$$
per ogni $y \in U$.

Il risultato seguente ci dice che se y è un valore regolare di f, $\deg(f,X,y)$ è effettivamente il numero di soluzioni di $f(x) = y$, contate con molteplicità algebrica.

Proposizione 7.2. *Sia $f \in C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X},Y)$. Se $y \in Y \setminus f(\partial X)$ è un valore regolare di $f|_X$, allora*
$$\deg(f,X,y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \operatorname{sgn} \det Df(x).$$

Dimostrazione. Innanzitutto il teorema della funzione inversa garantisce che $f^{-1}(\{y\})$ è un sottoinsieme discreto di X. Dato che $y \notin f(\partial X)$, $f^{-1}(\{y\})$ non ha punti di accumulazione in ∂X, quindi è un insieme finito:
$$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}.$$
Dunque la somma sopra è ben definita. La quantità sgn det $Df(x)$ vale 1 quando f conserva l'orientazione in un intorno di x, -1 quando la inverte.

Sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno cubico di y, e sia U_j un intorno di x_j tale che $f|_{U_j} : U_j \to f(U_j) \subset U$ sia un diffeomorfismo, per ogni $j = 1, \dots, k$. Se α è una n-forma con supporto nell'intorno di y $\cap_{j=1}^k f(U_j)$ ed integrale 1, dalla formula (2) si ottiene
$$\deg(f,X,y) = \int_X f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn} \det Df(x_j) \int_Y \alpha = \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn} \det Df(x_j),$$
il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 7.3. *In particolare, se $y \notin f(X)$ allora* $\deg(f,X,y) = 0$. *Quindi il fatto che il grado $\deg(f,X,y)$ sia non nullo garantisce che l'equazione $f(x) = y$ possieda soluzioni $x \in X$.*

Ricordiamo il seguente:

Teorema 7.4 (*Teorema di Sard*). *Siano X e Y varietà di dimensione finita, e sia $f \in C^k(X,Y)$, con*
$$k > \max\{0, \dim X - \dim Y\}.$$
Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura di Lebesgue nulla in Y.

Dato che i cambi di coordinate C^1 mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, e dato che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla, la nozione di insieme di misura nulla si estende dai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ai sottoinsiemi di una varietà n-dimensionale. Il teorema di Sard è banale nel caso $\dim X < \dim Y$. Anche il caso $\dim X = \dim Y$ (che è quello che ci interesserà nel seguito) risulta piuttosto semplice (si veda ad esempio [Dei85] Proposizione 1.4), mentre il caso $\dim X > \dim Y$ presenta difficoltà maggiori (si veda ad esempio [AR67]).

La Proposizione 7.2 mostra in particolare che la quantità $\deg(f, X, y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di f. D'altra parte, per il Teorema di Sard l'insieme dei valori regolari di f è denso in Y, e dato che la funzione $y \mapsto \deg(f, X, y)$ è localmente costante in $Y \setminus f(\partial X)$, concludiamo che $\deg(f, X, y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$. Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti nel seguente:

Teorema 7.5. *Siano X_0, Y varietà orientate di dimensione n, sia $X \subset X_0$ un aperto con chiusura $\overline{X} = X \cup \partial X$ compatta, e sia $f \in C^1(X, Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Allora la quantità*

$$\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \operatorname{sgn} \det Df(x),$$

definita per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di f si estende ad una funzione

$$\deg(f, X, \cdot) : Y \setminus f(\partial X) \to \mathbb{Z}$$

che è costante su ciascuna componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$.

L'intero $\deg(f, X, y)$ si dice *grado topologico della mappa f su X rispetto al punto y*. Se Y_1 è una componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$, il fatto che $\deg(f, X, \cdot)$ sia costante su Y_1 ci permette di definire l'intero

$$\deg(f, X, Y_1) := \deg(f, X, y), \quad \forall y \in Y_1.$$

Esaminiamo il caso particolare in cui $X_0 = X$, e dunque $\partial X = \emptyset$, cioè X è una varietà compatta orientata senza bordo. Se assumiamo Y connessa, la quantità $\deg(f, X, y)$ non dipende da $y \in Y$, e si dice *grado di Brower* della mappa f, che si indica anche semplicemente con

$$\deg(f) = \deg(f, X, Y).$$

Se in più Y è non compatta, dato che $f(X)$ è compatta esistono punti di y che non appartengono all'immagine di f, dunque $\deg(f, X, Y) = 0$. Quindi il grado di Brower è significativo solamente quando anche Y è una varietà compatta.

Mappe continue. La teoria del grado topologico si estende facilmente a mappe solamente continue. Sia infatti $f \in C^0(\overline{X}, Y)$. È possibile approssimare f uniformemente con mappe $f_\epsilon \in C^\infty(X, Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Per far ciò è sufficiente vedere Y come sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^m$, per qualche m, grazie al teorema di Whitney, usare partizioni dell'unità C^∞ su X e la convoluzione per approssimare uniformemente $f : X \to Y$ con mappe $g_\epsilon : X \to \mathbb{R}^m$, ed infine comporre g_ϵ con la proiezione da un intorno tubolare di Y in $\mathbb{R}^m$ su Y.

Sia ora $y \in Y \setminus f(\partial X)$. Sia $(f_n) \in C^0(\overline{X}, Y) \cap C^1(X, Y)$ una successione di mappe che converge uniformemente a f. È facile vedere che se n è sufficientemente grande, il grado di $\deg(f_n, X, y)$ è ben definito e non dipende dalla scelta della successione f_n. Tale intero è per definizione il grado della mappa f, $\deg(f, X, y)$. Si veda [Dei85], sezione 2.3, per ulteriori dettagli.

Il grado topologico di una mappa continua è dunque definito per approssimazione con mappe C^1. Per dimostrare le proprietà del grado che vedremo nella prossima sezione sarà dunque sufficiente considerare il caso C^1, ed usare la densità C^0 delle mappe C^1.

7.3 Proprietà del grado topologico

Invarianza per omotopia. La proprietà di gran lunga più importante e più usata del grado topologico è la sua invarianza per omotopie: se

$$f : [0, 1] \times \overline{X} \to Y$$

è una mappa continua e $y \in Y \setminus f([0,1] \times \partial X)$, allora il grado topologico di $f(t,\cdot)$ su X rispetto a y non dipende da t,

$$\deg(f(t,\cdot), X, y) = \deg(f(0,\cdot), X, y), \quad \forall t \in [0,1].$$

La definizione del grado che abbiamo scelto rende la verifica di questa proprietà particolarmente semplice. A meno di approssimazione, possiamo infatti supporre che f sia di classe C^1. Dato che $f([0,1] \times \partial X)$ è chiuso, esiste un intorno cubico U di y disgiunto da tale insieme, e se α è una n-forma con supporto in U ed integrale 1 si ha

$$\deg(f(t,\cdot), X, y) = \int_X f(t,\cdot)^*(\alpha).$$

Questa quantità dipende con continuità da $t \in [0,1]$, ed essendo un intero deve essere costante.

È utile esprimere l'invarianza per omotopia anche nella forma seguente. Si consideri l'insieme

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C^0(\overline{X}, Y) \mid y \notin f(\partial X) \right\},$$

che è aperto nella topologia compatto-aperta. Allora la funzione

$$\mathcal{F} \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \deg(f, X, y),$$

è localmente costante. L'equivalenza tra le due formulazioni è conseguenza del fatto che l'insieme $\mathcal{F}$ è localmente connesso per archi, come si può verificare facilmente vedendo Y come sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^m$ ed usando il teorema dell'intorno tubolare.

Addittività numerabile. Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di aperti disgiunti contenuti in X, e supponiamo $y \notin f(\overline{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$. Allora $\deg(f, X_j, y)$ è nullo eccetto al più per un numero finito di indici j, e

$$\deg(f, X, y) = \sum_{j=1}^\infty \deg(f, X_j, y).$$

Per dimostrare questa affermazione, possiamo supporre che f sia di classe C^1. Dato che $f(\overline{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$ è chiuso, possiamo trovare un valore regolare y' che appartiene alla stessa componente connessa di y in $Y \setminus f(\overline{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$. Quindi

$$\deg(f, X, y) = \deg(f, X, y'), \quad \deg(f, X_j, y) = \deg(f, X_j, y'), \quad \forall j = 1, 2, \dots.$$

Dato che y' ha un numero finito di immagini inverse, $f^{-1}(\{y'\}$ è contenuto in un unione finita degli X_j, e la tesi segue dalla formula del grado rispetto ad un valore regolare.

Escissione. Se $K \subset \overline{X}$ è chiuso e $y \notin f(K) \cup f(\partial X)$, allora

$$\deg(f, X, y) = \deg(f, X \setminus K, y).$$

Si tratta di un caso particolare della proprietà sopra: basta prendere $X_1 = X \setminus K$.

Mappe prodotto. Siano $X \subset X_0$ e Y varietà di dimensione n, $X' \subset X_0'$ e Y' varietà di dimensione n', e

$$f : \overline{X} \to Y, \quad f' : \overline{X'} \to Y',$$

mappe continue tali che $y \notin f(\partial X)$ e $y' \notin f'(\partial X')$. Si consideri la mappa:

$$f \times f' : \overline{X} \times \overline{X'} \to Y \times Y', \quad (x, x') \mapsto (f(x), f(x')).$$

Allora

$$\deg(f \times f', X \times X', (y, y')) = \deg(f, X, y) \cdot \deg(f', X', y').$$

Questo segue dal fatto che, se α è una n-forma su Y e α' è una n'-forma su Y', $\alpha \times \alpha'$ è una $(n+n')$-forma su $Y \times Y'$ e

$$\int_{X \times X'} (f \times f')^*(\alpha \times \alpha) = \int_X f^*(\alpha) \cdot \int_{X'} f'^*(\alpha').$$

Mappe a valori in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo $Y = \mathbb{R}^n$. Se $g : \partial X \to \mathbb{R}^n$ è una mappa continua, grazie al teorema di Tietze è possibile estenderla ad una mappa continua $f : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $y \notin g(\partial X)$. Allora il grado di f su X rispetto a y non dipende dalla scelta dell'estensione f. Infatti due qualsiasi estensioni f_0 e f_1 risultano omotope tramite la mappa

$$(t, x) \mapsto t f_1(x) + (1 - t) f_0(x),$$

che coincide con g su $[0, 1] \times \partial X$, e dunque non assume il valore y su tale insieme. Dunque ha senso parlare dell'intero

$$\deg(g, X, y).$$

È anche facile verificare che *questo intero dipende solamente dalla classe di omotopia di $g : \partial X \to \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.* Infatti grazie al teorema di Tietze possiamo estendere una mappa continua $h : [0, 1] \times \partial X \to \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ ad una mappa continua $\tilde{h} : [0, 1] \times \overline{X} \to \mathbb{R}^n$, e l'invarianza per omotopia del grado permette di concludere. Quindi il grado induce una mappa

$$\deg : [\partial X, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}] \to \mathbb{Z},$$

dove $[A, B]$ indica l'insieme delle classi equivalenza di mappe da A in B modulo omotopia.

Palle e sfere. Indichiamo con B^n la palla unitaria aperta di $\mathbb{R}^n$. Il suo bordo è la sfera S^{n-1}. Data una mappa continua $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, consideriamo la sua normalizzata

$$\hat{g} : S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad \hat{g}(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Sia $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ un'estensione continua di g. Abbiamo già visto che $\deg(f, B^n, 0)$ dipende solamente dalla mappa g. In effetti in questo caso si ha una conclusione più forte: questo grado coincide con il grado della mappa $\hat{g}$:

$$\deg(f, B^n, 0) = \deg(\hat{g}, S^{n-1}, S^{n-1}).$$

Infatti, dato che $\deg(f, B^n, 0)$ dipende solamente dalla classe di omotopia di $g = f|_{S^{n-1}} : \partial S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'omotopia

$$h(t, x) = \frac{g(x)}{|g(x)|^t}$$

mostra che possiamo assumere $g = \hat{g}$. Allora $|g(x)| = 1$ per ogni $x \in S^{n-1}$, e a meno di perturbazione possiamo supporre g di classe C^1. Possiamo quindi estendere g ad una mappa di classe C^1 $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$f(0) = 0, \quad f(x) = |x|^2 g(x/|x|) \ \ \forall x \neq 0.$$

Sia $y \in S^{n-1}$ un valore regolare di $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$. Allora $g^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$ da cui, se $\epsilon \in (0, 1)$,

$$f^{-1}(\{\epsilon y\}) = \{\epsilon x_1, \dots, \epsilon x_k\}.$$

Il fatto che x_j sia un punto regolare per $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ implica facilmente che ϵx_j è un punto regolare per f, e

$$\operatorname{sgn} \det Df(\epsilon x_j) = \operatorname{sgn} \det Dg(x_j).$$

La conclusione segue dalla formula del grado per valori regolari.

Osservazione 7.6. *Nel caso di mappe tra sfere, il grado topologico determina la classe di omotopia: due mappe continue $f, g : S^n \to S^n$ sono omotope se e solamente se hanno lo stesso grado. Questo è il contenuto del teorema di Hopf (si veda [Mil65]).*

Una formula integrale generalizzata. Sia Y_1 una componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$ e sia β una n-forma con supporto in Y_1 ed integrale non nullo. Allora

$$\deg(f, X, Y_1) = \frac{\int_X f^*(\beta)}{\int_Y \beta}. \tag{3}$$

Considerando un ricoprimento di Y_1 mediante intorni cubici e per la paracompattezza, possiamo trovare una partizione dell'unità di classe C^∞ $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ su Y_1, tale che per ogni j il supporto di φ_j sia contenuto in un intorno coordinato $U_j \subset Y_1$. Scegliamo $y_j \in U_j$ e poniamo $\alpha_j = \varphi_j \beta$. Se l'integrale di α_j è non nullo, dalla definizione del grado risulta

$$\deg(f, X, Y_1) = \deg(f, X, y_j) = \frac{\int_X f^*(\alpha_j)}{\int_Y \alpha_j},$$

ossia

$$\deg(f, X, Y_1) \cdot \int_Y \alpha_j = \int_X f^*(\alpha_j). \tag{4}$$

Per il Lemma 7.1, questa l'ultima formula vale anche se l'integrale di α_j è nullo: infatti in questo caso $\alpha_j = d\eta$ con $\operatorname{supp} \eta \subset U_j$, da cui $\operatorname{supp} f^*(\eta) \subset X$ e

$$\int_X f^*(\alpha_j) = \int_X f^*(d\eta) = \int_X df^*(\eta) = 0.$$

Dato che $\beta = \sum_{j\in J} \alpha_j$, sommando su j in (4) si ottiene il risultato voluto.

Formula di Leray per il grado di una composizione. Siano $X \subset X_0$, Y e Z varietà orientate di dimensione n, con $\overline{X}$ compatto. Siano $f : \overline{X} \to Y$ e $g : Y \to Z$ mappe continue. Siano Y_j, $j \in J$, le componenti connesse di $Y \setminus f(\partial X)$ aventi chiusura compatta in Y. Allora per ogni $z \in Z \setminus g(f(\partial X))$,

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{j\in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \deg(g, Y_j, z),$$

e la somma di destra contiene un numero finito di termini non nulli.

Nel caso in cui X, Y, Z siano varietà compatte senza bordo, si trova che il grado di $g \circ f$ è il prodotto dei gradi di f e di g. Per dimostrare la formula di Leray, possiamo assumere che f e g siano di classe C^1 e che z sia un valore regolare sia per g che per $g \circ f$. Dalla formula del grado rispetto ad un valore regolare troviamo allora

$$\begin{aligned}
\deg(g \circ f, X, z) &= \sum_{\substack{x\in X\\ g\circ f(x)=z}} \operatorname{sgn} \det D(g \circ f)(x) = \sum_{\substack{x\in X\\ g(f(x))=z}} \operatorname{sgn} \det Dg(f(x)) \cdot \operatorname{sgn} \det Df(x) \\
&= \sum_{\substack{y\in Y\\ g(y)=z}} \operatorname{sgn} \det Dg(y) \cdot \sum_{\substack{x\in X\\ f(x)=y}} \operatorname{sgn} \det Df(x) = \sum_{\substack{y\in Y\\ g(y)=z}} \operatorname{sgn} \det Dg(y) \cdot \deg(f, X, y).
\end{aligned}$$

Se y appartiene ad una componente di $Y \setminus f(\partial X)$ la cui chiusura non è compatta, $\deg(f, X, y) = 0$: infatti in tale componente ci saranno punti che non sono valori della mappa f. Allora nell'ultima somma sopra compaiono solamente gli y apparteneneti alle componenti Y_j, e quindi

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{j\in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \sum_{\substack{y\in Y_j\\ g(y)=z}} \operatorname{sgn} \det Dg(y) = \sum_{j\in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \deg(g, Y_j, z),$$

e la tesi è dimostrata.

Osservazione 7.7. *L'approccio che abbiamo seguito nella costruzione del grado, come molte delle applicazioni che presenteremo, è tratto dalle dispense di Nirenberg [Nir70]. Si veda anche [Sch69] e [Dei85] per lievi varianti. Un approccio leggermente più topologico è quello scelto da Milnor in [Mil65]. Per una costruzione puramente topologica, tramite l'omologia singolare, si veda [Dol80], sezione VIII.§4.*

7.4 Applicazioni

Esistenza di zeri. La maniera più diretta di applicare il grado topologico è la seguente: se $\deg(f, X, y) \neq 0$, allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione in X. Vediamo un esempio.

PROPOSIZIONE 7.8. *Sia $F : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale tale che per ogni $x \in \partial B^n$ il vettore $F(x)$ non punti mai in direzione opposta a x, cioè*

$$F(x) + \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \ \forall x \in \partial B^n. \tag{5}$$

Allora esiste almeno un $\overline{x} \in B^n$ tale che $F(\overline{x}) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo l'omotopia

$$H(t, x) = tF(x) + (1 - t)x, \quad (t, x) \in [0, 1] \times \overline{B^n},$$

che congiunge F all'identità. Per (5),

$$H(t, x) \neq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial B^n.$$

Dall'invarianza del grado per omotopie segue allora

$$\deg(F, B_n, 0) = \deg(\mathrm{id}, B^n, 0) = 1,$$

e quindi esiste $\overline{x} \in B^n$ tale che $F(\overline{x}) = 0$. □

Esistenza di punti fissi. Il risultato sopra ha come semplice conseguenza il ben noto teorema di Brower, che enunciamo nella forma:

COROLLARIO 7.9. (Teorema di Brower) *Sia $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua tale che $f(\partial B^n) \subset \overline{B^n}$. Allora f ha almeno un punto fisso in $\overline{B^n}$.*

Dimostrazione. Sia $F(x) := x - f(x)$. Se esistono $\lambda \geq 0$ e $x \in \partial B^n$ tali che $F(x) + \lambda x = 0$, allora $f(x) = (1 + \lambda)x$, e la condizione $f(\partial B^n) \subset \overline{B^n}$ implica che $\lambda = 0$ e x è un punto fisso di f. Altrimenti, F verifica le ipotesi della Proposizione 7.8, e dunque f ha un punto fisso in B^n. □

È utile sapere che il teorema di Brower vale anche nella forma:

COROLLARIO 7.10. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un compatto convesso e sia $f : C \to C$ continua. Allora f ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Per il teorema di Tietze la mappa f si estende ad una mappa continua g da $\mathbb{R}^n$ a valori nel convessificato chiuso dell'immagine di f (si veda l'Osservazione 7.11). Dato che C è un chiuso convesso, $g(\mathbb{R}^n) \subset C$. Se B è una palla che contiene C, il Corollario 7.9 implica l'esistenza di un punto fisso $\overline{x} \in \overline{B}$ di g. Quindi $x = g(\overline{x}) \in C$, e $x \in C$ è punto fisso di f. □

OSSERVAZIONE 7.11. *Ricordiamo che il teorema di Tietze dice che se Y è un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico X (o più in generale di uno spazio normale) e $f : Y \to \mathbb{R}^n$ è una funzione continua, allora f possiede un'estesione continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^n$. Se C è il convessificato chiuso di $f(Y)$, possiamo ottenere un'estensione a valori in C semplicemente componendo $\tilde{f}$ con la proiezione $p : \mathbb{R}^n \to C$ sul punto di minima distanza.*

Soluzioni periodiche. Sia $X \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale, che supponiamo T-periodico nella variabile temporale:

$$X(t + T, x) = X(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che esista $r > 0$ tale che

$$X(t, x) \cdot x < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ |x| = r. \tag{6}$$

Allora l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} u(t) = X(t, u(t)) \tag{7}$$

ha almeno una soluzione T-periodica.

Dato che X è di classe C^1, il problema di Cauchy associato a (7) ha unicità ed esistenza locale. Affermiamo che se $|x| \leq r$ allora la soluzione u di (7) tale che $u(0) = x$ ha tempo massimale di esistenza $+\infty$. Infatti da (6) segue che

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2u(t) \cdot X(t, u(t)) < 0, \quad \text{se } |u(t)| = r.$$

Questo implica che le soluzioni che partono in $\overline{B_r}$ non possono lasciare $\overline{B_r}$ per tempi positivi, e dato che X è limitato su $\overline{B_r}$ queste soluzioni esistono per tutti i tempi positivi. Queste considerazioni implicano che è ben definita una mappa, continua per la dipendenza continua dai dati, $f : \overline{B_r} \to \overline{B_r}$ che a x associa $u(T)$, la soluzione di (7) con $u(0) = x$ al tempo T. Per il teorema di Brower f ha un punto fisso $\overline{x}$. Dato che X è T-periodico in t, la soluzione che parte da $\overline{x}$ è T-periodica. $\square$

Autovalori ed autovettori positivi. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale $n \times n$ tale che $a_{ij} \geq 0$ per ogni i, j. Allora esistono $x \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ per ogni j, e $\lambda \geq 0$, tali che $Ax = \lambda x$.

L'insieme

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \ x_j \geq 0 \right\}$$

è compatto e convesso. Possiamo supporre che $Ax \neq 0$ per ogni $x \in C$, altrimenti $\lambda = 0$ e $x \in C \cap \ker A$ sono soluzioni del problema. Allora la mappa

$$f : C \to C, \quad f(x) = \frac{Ax}{\sum_{j=1}^{n} (Ax)_j},$$

è ben definita e continua. Per il teorema di Brower ha un punto fisso $x \in C$, quindi $Ax = \lambda x$ con $\lambda = \sum_{j=1}^{n} (Ax)_j > 0$. $\square$

7.5 Il teorema di separazione di Jordan-Brower.

Il classico teorema di separazione di Jordan afferma che una curva chiusa semplice divide il piano in esattamente due componenti connesse. In effetti, vale la seguente generalizzazione, dovuta a Brower:

TEOREMA 7.12. *Siano H, K due compatti di $\mathbb{R}^n$, tra loro omeomorfi. Allora $\mathbb{R}^n \setminus H$ e $\mathbb{R}^n \setminus K$ hanno lo stesso numero di componenti connesse.*

Il teorema di separazione di Jordan corrisponde al caso particolare in cui

$$H := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

e K è una curva chiusa semplice in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il complementare di un compatto in $\mathbb{R}^n$ ha esattamente una componente connessa illimitata. Quindi ci basterà considerare le componenti connesse limitate. Indichiamo con $\Xi(K)$ l'insieme delle componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Sia $\mathcal{K}_n$ la categoria i cui oggetti sono i compatti di $\mathbb{R}^n$ e i cui morfismi sono le mappe continue tra di loro. Definiremo un funtore controvariante Γ da $\mathcal{K}_n$ in $\mathcal{GA}$, la categoria dei gruppi abeliani.

Se K è un oggetto di $\mathcal{K}_n$, definiamo $\Gamma(K)$ come il gruppo abeliano libero generato dagli elementi di $\Xi(K)$. Se $f : H \to K$ è una mappa continua, definiamo

$$\Gamma(f) = f^* : \Gamma(K) \to \Gamma(H)$$

tramite

$$f^*(Y) = \sum_{X \in \Xi(H)} \deg(\tilde{f}, X, Y)\, X,$$

dove $Y \in \Xi(K)$ e $\tilde{f}$ è una estensione continua di f a tutto $\mathbb{R}^n$. Dato che

$$\tilde{f}(\partial X) \subset \tilde{f}(H) = f(H) \subset K,$$

il grado $\deg(\tilde{f}, X, Y)$ è ben definito e non dipende dalla scelta dell'estensione $\tilde{f}$. Inoltre fissata Y, $\deg(\tilde{f}, X, Y)$ è non nullo soltanto per un numero finito di componenti connesse X. Infatti, a meno di approssimazione possiamo assumere $\tilde{f}$ di classe C^1, e scegliendo un valore regolare $y \in Y$ si ha che $f^{-1}(\{y\})$ è finito, e dunque interseca un numero finito delle componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus H$.

Dobbiamo dimostrare che Γ è un funtore controvariante. Innanzitutto, se $\mathrm{id} : K \to K$ è l'identità, allora per ogni $Y \in \Xi(K)$ si ha

$$\mathrm{id}^*(Y) = \sum_{X \in \Xi(K)} \deg(\mathrm{id}, X, Y)\, X = Y,$$

dato che per ogni coppia X, Y di componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$ il grado $\deg(\mathrm{id}, X, Y)$ vale 1 se $X = Y$ e 0 altrimenti.

Consideriamo ora una composizione di mappe continue tra compatti di $\mathbb{R}^n$

$$H \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} L.$$

Se $Z \in \Xi(L)$, per la formula di Leray sul grado di una composizione si ha

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*(Z) &= \sum_{X \in \Xi(H)} \deg(\tilde{g} \circ \tilde{f}, X, Z)\, X \\ &= \sum_{X \in \Xi(H)} \sum_{Y \in \Xi(f(\partial X))} \deg(\tilde{f}, X, Y) \cdot \deg(\tilde{g}, Y, Z)\, X. \end{aligned} \tag{8}$$

Fissiamo $X \in \Xi(H)$, e sia $Y \in \Xi(f(\partial X))$. Siano $Y_1, Y_2, \dots$ le componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$ che hanno intersezione non vuota con Y. Dato che $\mathbb{R}^n \setminus K \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$, ogni Y_j è contenuta in Y, e $Y \setminus \bigcup_j Y_j \subset K$, da cui $f(\overline{Y} \setminus \bigcup_j Y_j) \cap Z = \emptyset$. Ma allora, usando l'addittività numerabile del grado,

$$\deg(\tilde{f}, X, Y) = \deg(\tilde{f}, X, Y_j) \quad \text{e} \quad \deg(\tilde{g}, Y, Z) = \sum_j \deg(\tilde{g}, Y_j, Z),$$

quindi la sommatoria interna in (8) può essere sostituita da una somma sulle componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$, ottenendo

$$(g \circ f)^*(Z) = \sum_{X \in \Xi(H)} \sum_{Y \in \Xi(K)} \deg(\tilde{f}, X, Y) \cdot \deg(\tilde{g}, Y, Z)\, X = f^*(g^*(Z)).$$

Insieme al fatto che $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, questo implica che Γ è un funtore controvariante. Dalla funtorialità segue che se $f : H \to K$ è un omeomorfismo, allora $f^* : \Gamma(K) \to \Gamma(H)$ è un isomorfismo di gruppi. Dato che due gruppi abeliani liberi sono isomorfi se e solamente se hanno lo stesso numero di generatori, la tesi segue. $\square$

Osservazione 7.13. *Il teorema di separazione di Jordan-Brower è in effetti un caso particolare della più generale dualità di Alexander: se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un compatto,*

$$\tilde{H}_{j-1}(\mathbb{R}^n \setminus K) \cong \check{H}^{n-j}(K),$$

dove $\tilde{H}_*$ indica l'omologia singolare ridotta e $\check{H}^*$ la coomologia di Čech. Si veda [Dol80], VIII.§8.15.

7.6 Il teorema di Borsuk

Teorema 7.14. (Teorema di Borsuk) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua, dispari (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$), e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Allora $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero dispari.*

Dimostrazione. Dato che f è dispari, $f(0) = 0$, e se x è soluzione di $f(x) = 0$ anche $-x$ lo è. Se f è di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e 0 è un valore regolare di f, si ha

$$\deg(f, \Omega, 0) = \operatorname{sgn} \det Df(0) + \sum_{\substack{x \in \Omega \setminus \{0\} \\ f(x) = 0}} \operatorname{sgn} \det Df(x).$$

L'ultima sommatoria contiene un numero pari di termini, ciasuno dei quali vale 1 o -1. Quindi il numero sopra è dispari[1].

Grazie alla continuità del grado nella topologia di $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, il teorema sarà dimostrato se riusciremo a provare che è possibile approssimare f uniformemente con funzioni C^1, dispari, ed aventi 0 come valore regolare.

Non ci sono problemi ad approssimare f con funzioni C^1 dispari. Infatti se g_1 è un'approssimante C^1 di f, la mappa

$$g_2(x) := \frac{1}{2}\left(g_1(x) - g_1(-x)\right)$$

è ancora un'approssimante C^1 di f ed è dispari. È anche facile rendere 0 un punto regolare: basta perturbare ulteriormente g_2,

$$g_3(x) := g_2(x) - ax,$$

per $|a|$ piccolo, tale che a non sia un autovalore di $Dg_2(0)$.

Supponiamo dunque f di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e 0 punto regolare. Il nostro scopo sarà mostrare che f è approssimabile uniformemente da mappe che in più hanno 0 come valore regolare. Poniamo

$$\Omega_k = \left\{x \in \Omega \mid x^i \neq 0 \text{ per qualche } i \leq k\right\},$$

per ogni $k = 1, \dots, n$. Quindi $\Omega_1 \subset \dots \subset \Omega_n = \Omega \setminus \{0\}$. Realizzeremo l'approssimazione voluta in n passi, costruendo $f_k \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dispari, con $\|f_k - f\|_\infty < k\epsilon$, e tale che $f_k|_{\Omega_k}$ abbia 0 come valore regolare.

Ponendo $f_0 = f$, possiamo assumere di aver costruito la funzione f_k, per un certo $0 \leq k \leq n-1$, e dobbiamo mostrare come si costruisce f_{k+1}. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, dispari, tale che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(s) \neq 0$ per ogni $s \neq 0$ (ad esempio, $\varphi(s) = s^3$). Consideriamo la mappa

$$g : \left\{x \in \Omega \mid x^{k+1} \neq 0\right\} \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{f_k(x)}{\varphi(x^{k+1})}.$$

Dato $y \in \mathbb{R}^n$ valore regolare di g, poniamo

$$f_{k+1}(x) := f_k(x) - \varphi(x^{k+1})y.$$

Scegliendo il valore regolare y di norma piccola, possiamo assumere che $\|f_{k+1} - f_k\|_\infty < \epsilon$.

Affermiamo che 0 è un valore regolare per la restrizione di f_{k+1} all'aperto

$$\left\{x \in \Omega \mid x^{k+1} \neq 0\right\}.$$

Infatti, se x è un punto di tale aperto tale che $f_{k+1}(x) = 0$, risulta $g(x) = y$, quindi $Dg(x)$ è invertibile. D'altra parte

$$\begin{aligned} Dg(x) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} Df_k(x) + f_k(x) D(1/\varphi(x^{k+1})) &= \frac{1}{\varphi(x^{k+1})}\left(Df_k(x) - \frac{\varphi'(x^{k+1})}{\varphi(x^{k+1})} f_k(x) dx^{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi(x^{k+1})}\left(Df_k(x) - \varphi'(x^{k+1}) y dx^{k+1}\right) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} Df_{k+1}(x), \end{aligned}$$

quindi anche $Df_{k+1}(x)$ è invertibile, come volvamo dimostrare.

Per verificare che 0 è un valore regolare per la restrizione di f_{k+1} ad Ω_{k+1}, ci restano da esaminare le soluzioni $x \in \Omega_{k+1}$ di $f_{k+1}(x) = 0$ tali che $x^{k+1} = 0$. Se x è un punto siffatto, necessariamente x appartiene a Ω_k e $f_k(x) = f_{k+1}(x) = 0$. Quindi per le proprietà di f_k, $Df_k(x)$ è invertibile. D'altra parte

$$Df_{k+1}(x) = Df_k(x) - \varphi'(x^{k+1}) y dx^{k+1} = Df_k(x) - \varphi'(0) y dx^{k+1} = Df_k(x),$$

dunque $Df_{k+1}(x)$ è invertibile, e f_{k+1} ha le proprietà richieste. □

[1] Si noti anche che da f dispari segue Df pari, da cui sgn det $Df(x) =$ sgn det $Df(-x)$, quindi il grado di f può assumere qualunque valore dispari.

Invarianza del dominio. Il teorema di Borsuk può essere usato per dimostrare il classico teorema sull'invarianza del dominio:

TEOREMA 7.15. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua e iniettiva. Allora la mappa f è aperta, e dunque è un omeomorfismo da Ω a $f(\Omega)$.*

In particolare, non può esistere un omeomorfismo $f : U \to V$ tra due aperti non vuoti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ quando $m \neq n$: se esistesse, a meno di scambiare f con f^{-1} potremmo supporre $m > n$ e, componendo questo omeomorfismo con l'inclusione $V \hookrightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, avremmo una mappa continua iniettiva ma non aperta da U in $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che per ogni $x_0 \in \Omega$, $f(x_0)$ è interno a $f(\Omega)$. A meno di comporre a destra e a sinistra con traslazioni, possiamo suppporre che $x_0 = f(x_0) = 0$.

Sia $r > 0$ tale che $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$. Se dimostriamo che

$$\deg(f, B_r(0), 0) \neq 0,$$

abbiamo concluso. Infatti, in questo caso

$$\deg(f, B_r(0), y) \neq 0,$$

per ogni $|y|$ piccolo - diciamo $|y| < \delta$ - il che implica che $B_\delta(0) \subset f(B_r(0)) \subset f(\Omega)$.

Definiamo l'omotopia

$$h(t, x) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{tx}{1+t}\right), \quad t \in [0,1],\ x \in \overline{B_r}(0).$$

Risulta $h(0, \cdot) = f$, $h(1, \cdot)$ mappa dispari. Se esistesse $(t, x) \in [0,1] \times \partial B_r(0)$ tale che $h(t, x) = 0$, per l'iniettività di f su $\overline{B_r}(0)$ si avrebbe

$$\frac{x}{1+t} = -\frac{tx}{1+t},$$

ossia $x = 0$, assurdo. Quindi possiamo applicare l'invarianza del grado per omotopie, ottenendo

$$\deg(f, B_r(0), 0) = \deg(h(1, \cdot), B_r(0), 0),$$

e per il Teorema di Borsuk 7.14 questo grado è non zero. □

7.7 Esercizi

ESERCIZIO 7.16. *Si consideri il rivestimento universale di $S^1 = \partial B$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,*

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad \pi(t) = e^{it}.$$

Determinare il grado di una mappa continua $f : S^1 \to S^1$ in termini dei sui sollevamenti, cioè delle funzioni continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\pi \circ g = f \circ \pi$.

ESERCIZIO 7.17. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ olomorfa in Ω e tale che $f(x) \neq 0$ per $x \in \partial\Omega$. Si dimostri che $\deg(f, \Omega, 0) \geq 0$. Supponiamo ora che Ω sia semplicemente connesso, e sia $\gamma : S^1 \to \Omega$ una curva chiusa semplice tale che tutti gli zeri di f stiano nell'aperto limitato determinato da γ. Si dimostri che*

$$\deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

ESERCIZIO 7.18. *Sia $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$ una curva chiusa di classe C^1. Dato $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma(z_0)$, definiamo l'*indice di avvolgimento *di γ rispetto a z_0 come*

$$w(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

(i) Estendere questa definizione a curve solamente continue.

(ii) *Sia* $\hat{\gamma} : S^1 \to S^1$ *la mappa* $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t) - z_0)/|\gamma(t) - z_0|$. *Vedendo* S^1 *come il bordo della palla unitaria* B *di* $\mathbb{C}$, *sia* $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ *una qualunque estensione continua di* γ. *Dimostrare che*

$$w(\gamma, z_0) = \deg(\hat{\gamma}, S^1, S^1) = \deg(f, B, z_0).$$

Esercizio 7.19. *Sia* $F : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ *un campo vettoriale tale che per ogni* $x \in \partial B^n$ *il vettore* $F(x)$ *non punti mai nella stessa direzione di* x, *cioè*

$$F(x) - \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \ \forall x \in \partial B^n.$$

Allora esiste $\overline{x} \in B^n$ *tale che* $F(\overline{x}) = 0$.

Esercizio 7.20. *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una mappa continua tale che*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x) \cdot x}{|x|} = +\infty.$$

Si dimostri che f *è surgettiva.*

Esercizio 7.21. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato,* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *mappe continue tali che* $0 < |g| < |f|$ *su* $\partial\Omega$. *Allora* $\deg(f + g, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, 0)$.

Esercizio 7.22. *Sia* $M \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie compatta orientata senza bordo, ed indichiamo con* $K : M \to \mathbb{R}$ *la sua curvatura di Gauss. Sia* $u : M \to S^2$ *la mappa che ad* $x \in M$ *associa il vettore normale unitario* $u(x)$, *scelto in modo che se* v_1, v_2 *è una base orientata di* $T_x M$, *allora* $v_1, v_2, u(x)$ *è una base orientata di* $\mathbb{R}^3$. *Dimostrare che*

$$\deg(f, M, S^2) = \frac{1}{4\pi} \int_M K(x) \, dA,$$

dove A *è l'elemento di area su* M.

Esercizio 7.23. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato simmetrico rispetto a* 0 *e non contenente lo* 0. *Sia* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *una funzione continua, dispari e tale che* $0 \notin f(\partial\Omega)$. *Dimostrare che* $\deg(f, \Omega, 0)$ *è un numero pari.*

Esercizio 7.24. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato, simmetrico rispetto a* 0 *e contenente lo* 0.

(i) *Siano* $k < n$ *e* $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ *una mappa continua dispari. Dimostrare che esiste* $x \in \partial\Omega$ *tale che* $f(x) = 0$.

(ii) *Siano* $k < n$ *e* $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ *una mappa continua. Dimostrare che esiste* $x \in \partial\Omega$ *tale che* $f(x) = f(-x)$.

(iii) *Supponiamo che* $\partial\Omega$ *sia ricoperto da* n *chiusi* $X_1, \ldots, X_n$. *Allora almeno uno di essi contiene due punti antipodali* x *e* $-x$.

Esercizio 7.25. *Siano* $A_1, \ldots, A_n$ *sottoinsiemi misurabili di* $\mathbb{R}^n$. *Dimostrare che esiste un iperpiano che divide ciascun* A_j *in due sottoinsiemi di ugual misura.*

Esercizio 7.26. *Supponiamo che* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *sia una mappa continua, iniettiva, e propria (cioè,* $f^{-1}(K)$ *è compatto per ogni* K *compatto). Dimostrare che* f *è un omeomorfismo (surgettivo).*

Sia $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ un polinomio di grado k, e consideriamo l'operatore differenziale di ordine k con coefficienti costanti

$$P = p\left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right).$$

Ricordiamo che l'operatore P si dice *ellittico* se, indicando con p_k la parte omogenea di grado k del polinomio p, si ha $p(x^1, \ldots, x^n) \neq 0$ per ogni $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Esercizio 7.27. *Dimostrare che se* $n \geq 3$, *ogni operatore differenziale con coefficienti costanti ellittico ha ordine pari.*

Riferimenti bibliografici

[AR67] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Dol80] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer, Berlin, 1980.

[Mil65] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965.

[Nir70] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes, Amer. Math. Soc., New York, 1970.

[Sch69] J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, New York, 1969.