8 La teoria del grado di Leray-Schauder

8.1 Mappe compatte

Il grado topologico e le sue applicazioni - quali ad esempio il teorema di punto fisso di Brower - non si estendono alla classe di tutte le mappe continue su spazi di Banach infinito-dimensionali. Ad esempio, se B indica la palla unitaria dello spazio di Hilbert ℓ_2 munito della norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2}$, la mappa continua

$$f : \overline{B} \to \overline{B}, \quad (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_0, x_1, \dots),$$

manda $\overline{B}$ in sé, ma non possiede alcun punto fisso: infatti $f(\overline{B}) \subset \partial B$, ma la restrizione di f a ∂B è lo shift iniettivo. L'esistenza di una mappa $f : \overline{B} \to \overline{B}$ priva di punti fissi implica l'esistenza di una retrazione $r : \overline{B} \to \partial B$: basta porre

$$r(x) = s(x)f(x) + \big(1 - s(x)\big)x,$$

dove $s(x) \leq 0$ è tale che $\|r(x)\| = 1$.

Osservazione 8.1. *È anche possibile dimostrare che il bordo della palla di uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita è sempre retratto della palla chiusa, o equivalentemente che sulla palla chiusa di uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita esiste una mappa continua priva di punti fissi. Si veda [Dei85], Remark 8.7.*

L'esistenza di una retrazione $r : \overline{B} \to \partial B$ mostra anche che su spazi vettoriali normati di dimensione infinita non può esistere una teoria del grado che goda delle buone proprietà viste nel caso finito dimensionale. Si consideri infatti l'omotopia

$$h : [0, 1] \times \overline{B} \to \overline{B}, \quad h(\lambda, x) = \lambda r(x) + (1 - \lambda)x.$$

Se $x \in \partial B$, $h(\lambda, x) = x$, quindi $h([0, 1] \times \partial B)$ non contiene 0. D'altra parte, $h(0, \cdot) = \mathrm{id}$, il cui grado rispetto allo 0 dovrebbe valere 1, mentre $h(1, \cdot) = r$, il cui grado rispetto allo 0 dovrebbe valere 0, dato che l'equazione $r(x) = 0$ non ha soluzione in $\overline{B}$.

Per poter generalizzare il teorema di punto fisso di Brower e la teoria del grado occorrerà restringersi ad opportune sottoclassi dello spazio di tutte le mappe continue.

Definizione 8.2. *Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio di Banach. Una mappa continua $K : X \to Y$ si dice* compatta *se manda sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi pre-compatti.*

Nel caso di operatori lineari tra spazi di Banach, questa definizione coincide con l'usuale nozione di compattezza. Vediamo le principali proprietà delle mappe compatte.

Ogni mappa $R : X \to Y$ continua, limitata, e di rango finito (cioè tale che $R(X) \subset Y_0$, con $Y_0 \subset Y$ sottospazio vettoriale di dimensione finita) è compatta. Infatti i limitati di Y_0 sono pre-compatti.

Limite uniforme di mappe compatte è compatto. Infatti se la successione di mappe $K_n : X \to Y$ converge uniformemente ad una mappa $K : X \to Y$ e $A \subset X$,

$$K(A) \subset K_n(A) + \overline{B}_{\|K_n - K\|_\infty},$$

il che mostra che se $K_n(A)$ è pre-compatto per ogni n, l'insieme $K(A)$ è totalmente limitato, e dunque pre-compatto.

Supponiamo che X sia limitato. Allora $K \in C^0(X, Y)$ è compatta se e solamente se K è limite unforme di mappe continue e limitate di rango finito. Queste mappe si possono prendere a valori in $\operatorname{conv} K(X)$. Per quanto visto sopra, se K è limite uniforme di mappe continue e limitate di rango finito allora K è compatta. Se K è compatta e $\epsilon > 0$, dalla compattezza di $\overline{K(X)}$ segue che esistono $y_1, \dots, y_n \in K(X)$ tali che

$$\overline{K(X)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\epsilon(y_j).$$

Sia $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ una partizione dell'unità su $\overline{K(X)}$ subordinata al ricoprimento $\{B_\epsilon(y_j)\}_{j=1}^n$: le φ_j sono funzioni continue a valori in $[0,1]$ tali che $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B_\epsilon(y_j)$ e $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$ su $\overline{K(X)}$. La mappa

$$R(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(K(x))y_j,$$

è continua, limitata, ed ha rango finito, prendendo valori nel sottospazio vettoriale generato dai vettori $y_1, \dots, y_n$. Inoltre se $x \in X$,

$$\|K(x) - R(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(K(x))(K(x) - y_j) \right\| < \epsilon,$$

dato che nella somma compare una combinazione convessa di vettori di norma minore di ϵ. La mappa R è l'approssimante voluta. Si noti che R prende valori in $\operatorname{conv} K(X)$.

Osservazione 8.3. *In generale, un operatore lineare compatto tra spazi di Banach non è approssimabile in norma con operatori lineari di rango finito (questo è vero ad esempio se lo spazio di arrivo è un Hilbert). La proprietà appena dimostrata mostra che è comunque possibile approssimarlo uniformemente sui limitati con operatori* nonlineari *di rango finito.*

Sia $\Omega \subset X$ un aperto di uno spazio di Banach, e sia $K : \Omega \to Y$ una mappa compatta. Se K è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ allora l'operatore $DK(x_0) \in L(X,Y)$ è compatto. Infatti

$$DK(x_0)\xi = \lim_{h\to 0} \frac{K(x_0 + h\xi) - K(x_0)}{h},$$

ed il limite è uniforme per $\|\xi\| \leq 1$. Quindi la restrizione di $DK(x_0)$ alla palla unitaria è limite uniforme di mappe (nonlineari) compatte, ed è dunque compatta.

Sia A un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio metrico X, e sia $K : A \to Y$ una mappa compatta. Allora esiste un'estensione continua $\tilde{K} : X \to Y$ di K che risulta ancora compatta. Ricordiamo infatti il seguente teorema di Dugundji:

Teorema 8.4. ([Dug78], capitolo IX.6) *Sia X uno spazio metrico, $A \subset X$ un chiuso, e Y uno spazio vettoriale normato. Ogni mappa continua $f : A \to Y$ ammette un'estensione continua $\tilde{f} : X \to Y$ a valori in* $\operatorname{conv} f(A)$.

Inoltre è facile dimostrare che in uno spazio vettoriale normato il convessificato di un insieme totalmente limitato è totalmente limitato. Metendo assieme questi fatti si ottiene il risultato di estensione voluto.

Sia A un sottoinsieme chiuso limitato di uno spazio di Banach X, e sia $K : A \to X$ una mappa compatta. Allora la mappa $F = I + K$ è propria e chiusa. Infatti, se la successione $(F(x_n)) = (x_n + K(x_n))$ è compatta, dalla compattezza di $K(x_n)$ segue la compattezza di (x_n).

8.2 Il teorema di punto fisso di Schauder

Possiamo ora generalizzare il teorema di punto fisso di Brower agli spazi di Banach di dimensione infinita:

Teorema 8.5 (Teorema di punto fisso di Schauder). *Siano X uno spazio di Banach e sia $C \subset X$ un sottoinsieme convesso, chiuso, e limitato. Se $K : C \to C$ è una mappa compatta, allora K possiede almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $K_n : C \to X$ una successione di mappe continue tali che $K_n(C) \subset X_n$ con X_n sottospazio vettoriale di dimensione finita di X, e $K_n \to K$ uniformemente. Possiamo anche assumere che $K_n(C) \subset \operatorname{conv} K(C) \subset \operatorname{conv} C = C$. Quindi K_n manda il convesso $C \cap X_n$ in sé, e dato che X_n ha dimensione finita per il teorema di Brower la mappa K_n ha un punto fisso $x_n \in C \cap X_n$. Dato che K è compatta, a meno di sottosuccessioni $K(x_n)$ converge a $x \in C$. Dato che $K_n \to K$ uniformemente, anche $x_n = K_n(x_n)$ converge a x, da cui $K(x) = x$. $\square$

Come prima applicazione del teorema di Schauder, dimostriamo il celebre risultato di Peano sull'esistenza di soluzioni dei problemi di Cauchy.

TEOREMA 8.6 (Teorema di Peano). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste $\epsilon > 0$ ed una curva $u :]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 che risolve il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = X(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Con le sole ipotesi di continuità di X, l'unicità della soluzione non è garantita, come mostrano celebri esempi.

Dato che stiamo studiando un problema locale, ci interessa solamente il germe di X in (t_0, u_0). Possiamo quindi modificare X fuori da un intorno di (t_0, u_0), e dedurre il teorema di Peano dal seguente risultato di esistenza globale:

TEOREMA 8.7. *Sia $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo tale che*

$$|X(t, x)| \leq c(1 + |x|), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ esiste $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = X(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $t_0 = 0$. Fissato $T > 0$, il problema di Cauchy su $[-T, T]$ è equivalente a trovare un punto fisso della mappa

$$F : C^0([-T, T]; \mathbb{R}^n) \to C^0([-T, T]; \mathbb{R}^n), \quad F(u)(t) = u_0 + \int_0^t X(s, u(s))\, ds.$$

Dalla stima di crescita per X segue che se $\|u\|_\infty \leq R$ allora

$$\|F(u)\|_\infty \leq |u_0| + cT(1 + \|u\|_\infty) \leq |u_0| + cT(1 + R).$$

Se scegliamo $T < 1/c$ e $R := (|u_0| + cT)/(1 - cT)$, deduciamo che F manda $\overline{B}_R$, la palla chiusa di raggio R di $C^0([-T, T])$, in sé. Se $u \in \overline{B}_R$,

$$|F(u)(t) - F(u)(t')| = \left| \int_{t'}^t X(s, u(s))\, ds \right| \leq |t - t'|(1 + cR),$$

quindi l'insieme $F(\overline{B}_R)$ è equi-Lipschitz. Essendo anche equilimitato (da R), per il teorema di Ascoli-Arzelà l'insieme $F(\overline{B}_R)$ è pre-compatto in $C^0([-T, T]; \mathbb{R}^n)$. Quindi la mappa F è compatta, e per il teorema di Schauder F ha un punto fisso in $\overline{B}_R$.

Pertanto esiste soluzione del problema di Cauchy in $[-T, T]$. Dato che la costante T non dipende dalla condizione iniziale u_0, è possibile iterare il procedimento ed ottenere una soluzione globale. □

8.3 Il grado di Leray-Schauder

Estenderemo la teoria del grado alla classe di mappe su aperti di spazi di Banach che siano perturbazioni compatte dell'identità. Premettiamo il seguente risultato di riduzione per il grado finito-dimensionale:

PROPOSIZIONE 8.8. *Siano $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ una mappa della forma*

$$f(x) = x + g(x),$$

con $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n_1}$. Sia $y \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus f(\partial\Omega)$. Allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}}, \Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}, y).$$

Dimostrazione. Possiamo assumere che f sia di classe C^1 e che $y = 0$. Siano $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, 2$, funzioni con integrale 1 e supporto contenuto in un piccolo intorno di 0. Per definizione,

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} a_1(x_1 + g(x_1, x_2)) a_2(x_2) \det Df(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Dalla forma di f segue che

$$\det Df(x_1, x_2) = \det(I + D_1 g(x_1, x_2)).$$

Quindi,

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} a_1(x_1 + g(x_1, x_2)) a_2(x_2) \det\big(I + D_1 g(x_1, x_2)\big)\, dx_1\, dx_2.$$

Facendo tendere la funzione a_2 verso la distribuzione δ concentrata in 0, si ottiene

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} a_1(x_1 + g(x_1, 0)) \det\big(I + D_1 g(x_1, 0)\big)\, dx_1 = \deg(f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}}, \Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}, 0),$$

come si voleva dimostrare. □

Sia X uno spazio di Banach, sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato, e sia $f : \overline{\Omega} \to X$ una mappa continua della forma

$$f(x) = x + K(x),$$

con $K : \overline{\Omega} \to X$ mappa compatta. Sotto la consueta ipotesi $y \notin f(\partial\Omega)$, vorremmo definire l'intero

$$\deg(f, \Omega, y),$$

generalizzando il grado topologico. Dato che f è una perturbazione compatta dell'identità, $f(\partial\Omega)$ è un chiuso. Quindi possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(y) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Sia $R : \overline{\Omega} \to X_0 \subset X$ una mappa continua a valori nel sottospazio di dimensione finita X_0 tale che $\|R - K\|_\infty < \epsilon/2$. Possiamo supporre che X_0 contenga il vettore y. La mappa

$$g(x) = x + R(x)$$

manda $\overline{\Omega} \cap X_0$ in X_0 e

$$g(\partial(\Omega \cap X_0)) \subset f(\partial(\Omega \cap X_0)) + B_{\epsilon/2}(0) \subset f(\partial\Omega) + B_{\epsilon/2}(0),$$

non contiene y, quindi possiamo definire il *grado di Leray-Schauder* di f su Ω rispetto a y come

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y).$$

Verifichiamo che questa definizione non dipende dalla scelta dell'approssimante di rango finito.

La Proposizione 8.8 implica che se rimpiazziamo X_0 con un sottospazio X_1 che lo contiene si ha

$$\deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y).$$

Se ora R' è un'altra approssimante a meno di $\epsilon/2$ di K a valori in X_0' e $g'(x) = x + R'(x)$, scegliendo $X_1 = X_0 + X_0'$ si ha

$$\deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y),$$
$$\deg(g'|_{\Omega \cap X_0'}, \Omega \cap X_0', y) = \deg(g'|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y).$$

Infine, posto

$$h(\lambda, x) = \lambda g(x) + (1 - \lambda) g'(x),$$

dato che le stime $\|g - f\|_\infty < \epsilon/2$ e $\|g' - f\|_\infty < \epsilon/2$ implicano

$$y \notin h([0, 1] \times \partial(\Omega \cap X_1)),$$

per l'invarianza per omotopia si conclude

$$\deg(g'|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y),$$

come volevamo mostrare.

8.4 Proprietà del grado di Leray-Schauder

Elenchiamo le principali proprietà del grado di Leray-Schauder. Le dimostrazioni seguono per lo più in maniera immediata dalle corrispondenti proprietà del grado finito-dimensionale, oppure si dimostrano in modo analogo.

Esistenza di soluzioni. Se $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$ allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x \in \Omega$. Infatti se $f(\overline{\Omega})$ non contiene y, essendo questo insieme un chiuso possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $B_\delta(y)$ sia disgiunto da $f(\overline{\Omega})$. Se scegliamo ora l'approssimante g nella definizione del grado in modo che $\|g - f\|_\infty < \delta$, si ha che $y \notin g(\overline{\Omega})$, da cui

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = 0.$$

Locale costanza in y. La funzione

$$y \mapsto \deg(f, \Omega, y)$$

è localmente costante in $X \setminus f(\partial\Omega)$. Pertanto, se Γ è una componente connessa di $X \setminus f(\partial\Omega)$, è ben definito l'intero

$$\deg(f, \Omega, \Gamma) := \deg(f, \Omega, y), \quad \forall y \in \Gamma.$$

Dato che una perturbazione compatta dell'identità manda limitati in limitati, $X \setminus f(\partial\Omega)$ ha esattamente una componente connessa illimitata Γ, e vale

$$\deg(f, \Omega, \Gamma) = 0.$$

Invarianza per omotopia. Se

$$h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to X$$

è una mappa continua della forma

$$h(t, x) = x + K(t, x),$$

con $K : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to X$ mappa compatta, allora dato $y \in X \setminus h([0, 1] \times \partial\Omega)$ il grado di $h(t, \cdot)$ su Ω rispetto a y non dipende da t,

$$\deg(h(t, \cdot), \Omega, y) = \deg(h(0, \cdot), \Omega, y), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Addittività numerabile. Sia $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ una successione di aperti disgiunti contenuti in Ω, e supponiamo $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j)$. Allora $\deg(f, \Omega_j, y)$ è nullo eccetto al più per un numero finito di indici j, e

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{j=1}^\infty \deg(f, \Omega_j, y).$$

Mappe prodotto. Siano X e Y spazi di Banach, $\Omega \subset X$ e $\Gamma \subset Y$ aperti limitati, e

$$f : \overline{\Omega} \to X, \quad g : \overline{\Gamma} \to Y,$$

perturbazioni compatte dell'identità tali che $z_1 \notin f(\partial\Omega)$ e $z_2 \notin g(\partial\Gamma)$. Si consideri la mappa:

$$f \times g : \overline{\Omega} \times \overline{\Gamma} \to X \times Y, \quad (x, y) \mapsto (f(x), g(y)).$$

Allora

$$\deg(f \times g, \Omega \times \Gamma, (z_1, z_2)) = \deg(f, \Omega, z_1) \cdot \deg(g, \Gamma, z_2).$$

Dipendenza dai valori al bordo. Se due perturbazioni compatte dell'identità $f, g : \overline{\Omega} \to X$ coincidono su $\partial\Omega$, allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$

Più in generale: se le restrizioni di f e g a $\partial\Omega$ sono omotope tramite un omotopia

$$h : [0, 1] \times \partial\Omega \to X \setminus \{y\},$$

della forma $h(t, x) = x + K(t, x)$ con $K : [0, 1] \times \partial\Omega \to X$ mappa compatta, allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$

Formula di Leray per il grado di una composizione. Siano Ω e Γ aperti limitati di X. Siano $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Gamma}$ e $g : \overline{\Gamma} \to X$ perturbazioni compatte dell'identità. Siano Γ_j, $j \in J$, le componenti connesse di $X \setminus f(\partial\Omega)$ aventi chiusura limitata in X. Allora per ogni $z \in X \setminus g(f(\partial\Omega))$,

$$\deg(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, \Omega, \Gamma_j) \cdot \deg(g, \Gamma_j, z),$$

e la somma di destra contiene un numero finito di termini non nulli.

Teorema di separazione di Jordan-Brower generalizzato. Siano F, G due chiusi limitati di uno spazio di Banach X, tra loro omeomorfi tramite un omeomorfismo $f : F \to G$ della forma $f(x) = x + K(x)$, con K mappa compatta. Allora $X \setminus F$ e $X \setminus G$ hanno lo stesso numero di componenti connesse. Si osservi infatti che in queste ipotesi anche f^{-1} risulta una perturbazione compatta dell'identità.

Teorema di Borsuk generalizzato. Sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to X$ una perturbazione compatta dell'identità, dispari, e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Allora $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero dispari.

Teorema di invarianza del dominio generalizzato. Sia $\Omega \subset X$ un aperto e sia $f : \Omega \to X$ una perturbazione compatta dell'identità localmente iniettiva. Allora la mappa f è aperta.

8.5 Formula del grado per mappe di classe C^1

Abbiamo visto che se la perturbazione compatta dell'identità f è differenziabile, allora $Df(x) = I + T(x)$, con $T(x)$ operatore compatto su X. Gli operatori lineari del tipo identità più compatto non posseggono un determinante. Mostreremo però che il *segno del determinante* risulta ben definito. Questo permetterà di estendere agli spazi di Banach l'usuale formula del grado nel caso di un valore regolare di una mappa di classe C^1.

Sia dunque $K \in L_c(X)$ un operatore compatto e sia $T = I + K$. Essendo un operatore di Fredholm di indice zero (si veda l'Appendice 5.6), T è un isomorfismo se e solamente se il suo nucleo è (0). Se T non è un isomorfismo poniamo

$$\operatorname{sgn} \det T := 0.$$

Sia ora $T = I + K$ un isomorfismo. Dato che lo spettro di un operatore compatto meno lo 0 consiste di autovalori di molteplicità algebrica finita che hanno al più lo 0 come punto di accumulazione, lo spettro di $T = I + K$ meno il punto 1 consiste di autovalori di molteplicità algebrica finita che hanno al più 1 come punto di accumulazione. In particolare, T possiede un insieme finito $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di autovalori reali negativi, ciascuno dei quali ha molteplicità algebrica finita

$$m(\lambda_j) := \dim \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\lambda_j I - T)^i < +\infty.$$

Definiamo allora

$$\operatorname{sgn} \det T = (-1)^m, \quad \text{dove } m = \sum_{j=1}^{k} m(\lambda_j). \tag{1}$$

La proposizione seguente giustifica questa definizione:

Proposizione 8.9. *Valgono i seguenti fatti:*

(i) Se $X = \mathbb{R}^n$, il numero definito in (1) coincide con l'usuale segno del determinante di T.

(ii) Se $T = I + K$ con $K \in L_c(X)$ è un isomorfismo e $B \subset X$ è una palla centrata in 0, si ha

$$\deg(T, B, 0) = \operatorname{sgn} \det T.$$

(iii) La funzione $T \mapsto \operatorname{sgn} \det T$ è localmente costante su $GL_c(X)$, il sottogruppo di $GL(X)$ che consiste degli isomorfismi che sono perturbazioni compatte dell'identità.

(iv) Il sottogruppo $GL_c(X)$ ha esattamente due componenti connesse, su cui la funzione sgn det *assume valori opposti.*

Dimostrazione. (i) Questo è ben noto: segue dal fatto che il determinante di una matrice reale T è il prodotto dei suoi autovalori complessi, contati con molteplicità algebrica, e che se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è autovalore, allora anche $\bar{\lambda}$ lo è, con la stessa molteplicità algebrica.

Per dimostrare (ii), decomponiamo X in somma diretta di sottospazi chiusi T-invarianti $X = X_1 \oplus X_2$, dove X_1 è l'autospazio generalizzato corrispondente agli autovalori di T reali negativi, e dove X_2 è l'autospazio generalizzato corrispondente alla rimanente parte dello spettro di T. Per la formula del grado per mappe prodotto si ha

$$\deg(T, B, 0) = \deg(T, (B \cap X_1) \times (B \cap X_2), 0) = \deg(T|_{X_1}, B \cap X_1, 0) \cdot \deg(T|_{X_2}, B \cap X_2, 0).$$

La restrizione di $T = I + K$ a $X_2 \cap \overline{B}$ è omotopa all'identità tramite l'omotopia della forma identità più mappa compatta

$$(\lambda, x) \mapsto x + \lambda K x.$$

Questa omotopia è ammissibile poichè $x + \lambda K x = 0$ con $\lambda \in [0, 1]$ implica $x = 0$: ciò è ovvio per $\lambda = 0$, mentre per $\lambda \in]0, 1]$ il vettore x risulta un autovettore di K di autovalore $-1/\lambda$ e dunque un autovettore di T di autovalore $1 - 1/\lambda \leq 0$, contro il fatto che $T|_{X_2}$ non ha autovalori reali negativi o nulli. Quindi

$$\deg(T|_{X_2}, B \cap X_2, 0) = 1.$$

D'altra parte X_1 ha dimensione finita, e per il punto (i),

$$\deg(T|_{X_1}, B \cap X_1, 0) = \operatorname{sgn} \det T|_{X_1} = \operatorname{sgn} \det T,$$

il che conclude la dimostrazione di (ii).

L'enunciato (iii) segue dal punto (ii), insieme alla proprietà di omotopia del grado di Leray-Schauder (ma si potrebbe anche darne una dimostrazione diretta usando i risultati sulla continuità degli autovalori).

Per dimostrare (iv), iniziamo con l'osservare che $\operatorname{sgn} \det I = 1$, e che se T è una *riflessione rispetto ad un iperpiano*, cioè se è un isomorfismo del tipo

$$Tx = x - 2\langle \eta, x \rangle y,$$

dove $y \in X$ e $\eta \in X^*$ sono tali che $\langle \eta, y \rangle = 1$, allora $\operatorname{sgn} \det T = -1$. Ricordiamo inoltre che le componenti connesse di $GL(n, \mathbb{R})$ sono il sottogruppo ed il suo laterale

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}, \quad GL^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}.$$

Sia ora $T \in GL_c(X)$. Decomponendo X come nella dimostrazione di (ii), si trova che $T|_{X_2}$ può essere connesso all'identità su X_2 tramite una curva continua di operatori in $GL_c(X_2)$. Se $\operatorname{sgn} \det T = \operatorname{sgn} \det T|_{X_1} = 1$, dal fatto che $GL^+(n, \mathbb{R})$ è connesso, deduciamo che $T|_{X_1}$ può essere connesso all'identità su X_1 tramite una curva continua di operatori in $GL(X_1) = GL_c(X_1)$. Quindi se $\operatorname{sgn} \det T = 1$, T sta nella stessa componente connessa dell'identità di $GL_c(X)$.

Se $\operatorname{sgn} \det T = \operatorname{sgn} \det T|_{X_1} = -1$, dal fatto che anche $GL^-(n, \mathbb{R})$ è connesso, deduciamo che possiamo connettere $T|_{X_1}$ ad una riflessione rispetto ad un iperpiano di X_1 in $GL(X_1) = GL_c(X_1)$,

$$\tilde{T}x = x - 2\langle \eta, x \rangle y,$$

con $y \in X_1$ e $\eta \in X_1^*$, $\langle \eta, y \rangle = 1$. Estendendo η ad un elemento di X^* ponendolo uguale a 0 su X_2, troviamo che $\tilde{T}$ è la restrizione di una riflessione su X rispetto ad un iperpiano che contiene X_2. Quindi nella componente connessa di $GL_c(X)$ contenente T troviamo una riflessione rispetto ad un iperpiano. Per concludere ci basta verificare che due riflessioni rispetto ad iperpiani stanno sempre nella stessa componente connessa di $GL_c(X)$. Consideriamo prima due riflessioni rispetto allo stesso iperpiano,

$$T_0 x = x - 2\langle \eta, x \rangle y_0, \quad T_1 x = x - 2\langle \eta, x \rangle y_1,$$

con $\langle \eta, y_0 \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle = 1$. Possiamo connetterle in $GL_c(X)$ tramite il cammino di riflessioni

$$T_t x = x - 2\langle \eta, x \rangle (t y_1 + (1 - t) y_0).$$

Analogamente, due riflessioni aventi lo stesso autovettore y,

$$T_0 x = x - 2\langle \eta_0, x\rangle y, \quad T_1 x = x - 2\langle \eta_1, x\rangle y,$$

sono connesse in $GL_c(X)$ dal cammino

$$T_t x = x - 2\langle t\eta_1 + (1-t)\eta_0, x\rangle y.$$

Questo mostra che due riflessioni qualsiasi sono connesse in $GL_c(X)$ da un cammino di riflessioni. □

Supponiamo che y sia un valore regolare di una mappa $f \in C^1(\Omega, X)$ che sia una perturbazione compatta dell'identità. Dato che $Df(x)$ è una perturbazione lineare compatta dell'identità, deduciamo che $Df(x)$ è un isomorfismo per ogni $x \in f^{-1}(\{y\})$. Quindi $f^{-1}(\{y\})$ è un sottoinsieme discreto di Ω. Dato che f è propria, questo insieme è pre-compatto in $\overline{\Omega}$. Se supponiamo $y \notin f(\partial\Omega)$, concludiamo che $f^{-1}(\{y\})$ è un insieme finito.

PROPOSIZIONE 8.10. *Sia $f \in C^0(\overline{\Omega}, X) \cap C^1(\Omega, X)$ una perturbazione compatta dell'identità, e sia $y \in X \setminus f(\partial\Omega)$ un valore regolare di f. Allora*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathrm{sgn}\,\det Df(x).$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ tale che le palle $B_\epsilon(x)$ per $x \in f^{-1}(\{y\})$ siano contenute in Ω e risultino due a due disgiunte. Per la proprietà di addittività del grado, è sufficiente dimostrare che per ogni $x \in f^{-1}(\{y\})$ si ha

$$\deg(f, B_\epsilon(x), y) = \mathrm{sgn}\,\det Df(x).$$

Possiamo assumere $x = y = 0$. Usando l'omotopia

$$h(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{t} f(tx) & \text{per } t \in (0,1], \\ Df(0)x & \text{per } t = 0, \end{cases}$$

si trova che

$$\deg(f, B_\epsilon(0), 0) = \deg(Df(0), B_\epsilon(0), 0).$$

La conclusione segue dal punto (ii) della Proposizione 8.9. □

8.6 Dimostrazione della Proposizione 6.7

Possiamo finalmente dimostrare la Proposizione 6.7, uno degli ingredienti della dimostrazione della congettura di Weinstein e del teorema non-squeezing. Ricordiamo le notazioni e l'enunciato.

Abbiamo uno spazio di Hilbert E con una decomposizione ortogonale

$$E = E^+ \oplus E^0 \oplus E^-,$$

e proiettori associati P^+, P^0 e P^-. Usiamo la notazione $x = x^+ + x^0 + x^-$, dove $x^+ = P^+x$, $x^0 = P^0x$ e $x^- = P^-x$. Consideriamo gli insiemi:

$$\begin{aligned} S &:= \left\{ x \in E^+ \mid \|x\| = \rho \right\}, \\ Q &:= \left\{ x = x^0 + x^- + se \mid x^0 \in E^0,\ x^- \in E^-,\ \|x^0\|^2 + \|x^-\|^2 \le R^2,\ 0 \le s \le R \right\}, \end{aligned}$$

dove $0 < \rho < R$ e $e \in E^+$ ha norma 1. Il funzionale azione $\mathbb{A}_H$ è minore o uguale a zero su ∂Q, il bordo di Q relativo al sottospazio $E^0 \oplus E^- \oplus \mathbb{R}e$ (Lemma 6.5), mentre il suo estremo inferiore su S è positivo (Lemma 6.4).

Consideriamo poi il flusso gradiente del funzionale azione $\mathbb{A}_H$, che abbiamo visto essere una mappa $\phi : \mathbb{R} \times E \to E$ della forma

$$\phi(s,x) = e^{-s}P^+x + P^0x + e^sP^-x + K(s,x) = e^{-s}x^+ + x^0 + e^sx^- + K(s,x), \tag{2}$$

con $K : \mathbb{R} \times E \to E$ mappa compatta. Possiamo rienunciare la Proposizione 6.7 come:

Proposizione 8.11. *Per ogni $s \geq 0$ risulta $\phi_t(Q) \cap S \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $t \geq 0$. Dobbiamo mostrare l'esistenza di un x che soddisfa le condizioni:

$$\begin{aligned} x &\in Q, &(3)\\ (P^- + P^0)\phi_t(x) &= 0, &(4)\\ \|\phi_t(x)\| &= \rho. &(5)\end{aligned}$$

Grazie alla forma di ϕ, la (4) si riscrive come

$$e^t x^- + x^0 + (P^- + P^0)K(t,x) = 0,$$

che, moltiplicando la componente E^- per e^{-t}, è equivalente a

$$x^- + x^0 + (e^{-t}P^- + P^0)K(t,x) = 0. \tag{6}$$

La (5) si può riscrivere come

$$P^+(\|\phi_t(x)\| - \rho)e = 0,$$

che, sommando e sottraendo x^+, è equivalente a

$$x^+ + P^+\big((\|\phi_t(x)\| - \rho)e - x\big) = 0. \tag{7}$$

Se poniamo $X = E^- \oplus E^0 \oplus \mathbb{R}e$ ed indichiamo con Ω la parte interna di Q relativa a X, le condizioni (3), (6) e (7) equivalgono al fatto che $x \in \overline{\Omega}$ sia uno zero della mappa $f(t,\cdot) := \mathrm{id} + F(t,\cdot)$, dove

$$F(t,x) := (P^- + P^0)K(t,x) + P^+\big((\|\phi_t(x)\| - \rho)e - x\big).$$

Dato che K è compatta e $P^+x \in \mathbb{R}e$ per $x \in X$, la mappa F risulta compatta. Dato che $t \geq 0$, la mappa $f(t,\cdot)$ non ha zeri su $\partial\Omega$: se $x \in \partial\Omega = \partial Q$ fosse un tale zero, avremmo $\phi_t(x) \in S$, ma le disuguaglianze

$$\mathbb{A}_H(\phi_t(x)) \leq \mathbb{A}_H(x) \leq 0, \qquad \forall t \geq 0,$$

escludono che $\phi_t(x)$ possa appartenere a S per $t \geq 0$. Perciò il grado di Leray-Schauder

$$\deg\big(f(t,\cdot), \Omega, 0\big)$$

è ben definito e non dipende da $t \geq 0$. È sufficiente mostrare che

$$\deg\big(f(0,\cdot), \Omega, 0\big) \neq 0.$$

La condizione $f(0,x) = 0$ equivale a chiedere che x sia un punto di intersezione tra Q e S, ma l'unico punto di intersezione è $x = \rho e$. Dall'espressione

$$f_0(x) := f(0,x) = x + P^+((\|x\| - \rho)e - x\big)$$

ricaviamo che

$$Df_0(x)[u] = u + \frac{(x,u)}{\|x\|}e - P^+u,$$

e per $x = \rho e$ troviamo

$$Df_0(\rho e)[u] = u + \frac{(\rho e, u)}{\rho}e - P^+u = u + (e,u)e - P^+u = u,$$

e dunque

$$\deg(f_0, \Omega, 0) = 1,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Riferimenti bibliografici

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Dug78] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1978, Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.