9 La teoria di Morse

9.1 Forme bilineari simmetriche su spazi di Hibert

Ricordiamo che, grazie al Teorema di Riesz, una forma bilineare continua su uno spazio di Hilbert

$$b : H \times H \to \mathbb{R}$$

può essere rappresentata da un operatore $B : H \to H$ lineare e continuo, ossia

$$b[u,v] = (Bu, v), \qquad \forall u, v \in H.$$

La forma b è simmetrica se e solamente se l'operatore B è autoaggiunto. Se in più B è invertibile, diciamo che la forma b è *non degenere.* Si osservi che nel caso $\dim H = \infty$ questa è una condizione più forte di richiedere l'implicazione

$$b[u,v] = 0 \quad \forall v \in H \qquad \Rightarrow \qquad u = 0.$$

Infatti la condizione sopra equivale a chiedere che B sia iniettivo, ma un operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert di dimensione infinita può essere iniettivo ma non surgettivo (si consideri ad esempio l'operatore di moltiplicazione per la funzione $u(x) = x$ sullo spazio $L^2(0,1)$).

Sia b una forma bilineare continua simmetrica non degenere su H e sia $B : H \to H$ l'operatore autoaggiunto invertibile associato. Lo spazio H si decompone in una somma diretta ortogonale di due sottospazi B-invarianti

$$H = V^+(B) \oplus V^-(B),$$

tali che

$$b[u,u] \geq \beta\|u\|^2 \quad \forall u \in V^+(B), \qquad b[u,u] \leq -\beta\|u\|^2 \quad \forall u \in V^-(B),$$

per un opportuno $\beta > 0$. Questi sottospazi si dicono autospazi positivo e negativo di B. Possono essere definiti per mezzo del calcolo operatoriale: il proiettore P su $V^+(B)$ di nucleo $V^-(B)$ è

$$P = \chi_{]0,+\infty[}(B),$$

dove $\chi_{]0,+\infty[}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $]0,+\infty[$. Simmetricamente, il proiettore P su $V^-(B)$ di nucleo $V^+(B)$ è

$$I - P = \chi_{]-\infty,0[}(B).$$

La dimensione dello spazio $V^-(B)$ si chiama *indice di Morse* della forma bilineare simmetrica b:

$$\mathrm{ind}\,(b) := \dim V^-(B) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Equivalentemente, l'indice di Morse di b può essere definito come

$$\mathrm{ind}\,(b) = \sup\left\{\dim V \mid V \text{ sottospazio vettoriale di } H \text{ tale che } b[u,u] < 0\ \forall u \in V \setminus \{0\}\right\}.$$

La decomposizione $V^+(B) \oplus V^-(B)$ dipende dalla scelta del prodotto scalare su H, che determina l'operatore B, mentre la dimensione di $V^-(B)$ (come quella di $V^+(B)$) è indipendente da questa scelta, come mostra l'identità sopra.

Il *co-indice di Morse* di b è la dimensione di $V^+(B)$, o equivalentemente l'estremo superiore delle dimensioni dei sottospazi su cui b è definita positiva.

Ricordiamo che ogni operatore limitato autoaggiunto T tale che $T \geq 0$, ossia

$$(Tu, u) \geq 0 \qquad \forall u \in H,$$

possiede un'unica radice quadrata, ossia un operatore limitato autoaggiunto R tale che $R^2 = T$. La radice quadrata di T è definita usando il calcolo operatoriale e commuta con T.

Se b è una forma bilineare continua simmetrica non degenere su H e B è l'operatore autoaggiunto associato, allora esiste un isomorfismo lineare $T : H \to H$ tale che

$$b[Tu, Tu] = (Pu, Pu) - ((I-P)u, (I-P)u) = (Pu, u) - ((I-P)u, u), \qquad \forall u \in H,$$

dove P è il proiettore ortogonale su $V^+(B)$. Equivalentemente, l'isomorfismo T verifica l'indentità

$$T^*BT = P - (I-P) = 2P - I.$$

Possiamo definire T nel modo seguente: T preserva la decomposizione ortogonale $V^+(B) \oplus V^-(B)$, coincide con la radice quadrata di B^{-1} su $V^+(B)$ e con la radice quadrata di $-B^{-1}$ su $V^-(B)$. Tale T risulta anche autoaggiunto.

9.2 Lemma di Morse

Sia M una varietà hilbertiana, ossia uno spazio topologico Hausdorff e paracompatto localmente omeomorfo ad uno spazio di Hilbert H e munito di un atlante a valori in H con mappe di transizione di classe C^∞.

Sia $f \in C^2(M)$ una funzione reale e sia $x \in M$ un suo punto critico. Allora è ben definita la forma bilineare continua simmetrica

$$d^2 f(x) : T_x M \times T_x M \to \mathbb{R},$$

che si dice differenziale secondo di f in x. Un modo per definire $d^2 f(x)$ è il seguente: fissato $u \in T_x M$ scegliamo una curva C^∞

$$\gamma :]-1,1[\to M,$$

tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = u$, e definiamo

$$d^2 f(x)[u,u] := \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

Il fatto che x sia un punto critico di f assicura che il numero sopra non dipenda dalla scelta della curva γ, ma solo da $\gamma'(0)$ (in generale, l'espressione sopra dipenderebbe anche da $\gamma''(0)$). La forma $d^2 f(x)$ è definita come l'unica forma bilineare simmetrica che estende la forma quadratica definita sopra.

Quando $M = H$ è uno spazio di Hilbert, $d^2 f(x)$ coincide con $D^2 f(x) \in L(H, H^*)$ nell'identificazione canonica tra le forme bilineari su H e le applicazioni lineari da H in H^*. Utilizzando il prodotto scalare, $D^2 f(x)$ corrisponde all'Hessiano $\nabla^2 f(x) \in L(H, H)$, quindi

$$d^2 f(x)[u,v] = (\nabla^2 f(x) u, v), \qquad \forall u, v \in H.$$

Un altro modo per definire il differenziale secondo in un punto critico per funzioni su varietà è lavorare in carte locali, osservando che se 0 è un punto critico di $f : H \to \mathbb{R}$ e φ è un diffeomorfismo di un intorno di 0 che lascia fisso 0, allora

$$\nabla^2 (f \circ \varphi)(0) = D\varphi(0)^* \nabla^2 f(0) D\varphi(0).$$

Un punto critico x di una funzione $f \in C^2(M)$ si dice *non degenere* se la forma bilineare simmetrica $d^2 f(x)$ è non degenere. Una funzione i cui punti critici siano tutti non degeneri si dice *funzione di Morse.*

L'*indice di Morse di x* è definito come l'indice di Morse di $d^2 f(x)$, e similmente per il co-indice di Morse. Il seguente risultato mostra che il comportamento qualitativo di una funzione vicino ad un suo punto critico non degenere è determinato solamente dal suo indice di Morse:

LEMMA 9.1 (Lemma di Morse). *Sia U un intorno aperto di 0 nello spazio di Hilbert H e sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{k+2}, con $1 \leq k \leq \infty$, per la quale 0 sia un punto critico non degenere. Allora esiste V intorno di 0 ed un diffeomorfismo*

$$\varphi : V \to \varphi(V) \subset U$$

di classe C^k tale che

$$f\big(\varphi(u)\big) = f(0) + \frac{1}{2}\|Pu\|^2 - \frac{1}{2}\|(I-P)u\|^2,$$

dove P è il proiettore ortogonale sull'autospazio positivo di $\nabla^2 f(0)$.

Dimostrazione. A meno di rimpiazzarlo con un intorno più piccolo, possiamo supporre che U sia convesso. Per la formula di Taylor con resto integrale risulta allora

$$f(u) = f(0) + \int_0^1 (1-t) d^2 f(tu)[u]^2 \, dt, \qquad \forall u \in U.$$

Per ogni $u \in U$, definiamo la forma quadratica continua

$$a(u) : H \times H \to \mathbb{R}, \qquad a(u)[v]^2 := 2 \int_0^1 (1-t) d^2 f(tu)[v]^2 \, dt, \qquad \forall v \in H,$$

e sia $A(u) : H \to H$ l'operatore autoaggiunto associato,

$$a(u)[v]^2 = \big(A(u)v, v\big), \qquad \forall v \in H.$$

Allora

$$f(u) - f(0) = \frac{1}{2}\big(A(u)u, u\big), \tag{1}$$

e vorremmo per prima cosa dimostrare che, a meno di restringere U, vale

$$A(u) = \Psi(u)^* A(0) \Psi(u), \qquad \forall u \in U, \tag{2}$$

per un opportuna mappa Ψ da U nello spazio $L(H)$ degli operatori lineari e continui su H. Quando H ha dimensione finita, questo può essere dimostrato in modo elementare diagonalizzando $A(0)$. Per il caso generale, si utilizza il calcolo operatoriale nel modo seguente.

Per cominciare, A risulta una mappa di classe C^k da U in $L(H)$. Inoltre, dato che

$$a(0) = 2\int_0^1 (1-t) d^2 f(0)\, dt = d^2 f(0),$$

risulta

$$A(0) = \nabla^2 f(0).$$

Dato che $A(0)$ è invertibile, a meno di restringere ancora U, possiamo supporre che $A(u)$ sia invertibile per ogni $u \in U$. Se poniamo

$$B(u) := A(u)^{-1} A(0),$$

la mappa B risulta di classe C^k da U in $L(H)$, e vale $B(0) = I$.

Ricordiamo che se $T \in L(H)$ è un operatore di norma minore di 1, allora è ben definita la radice quadrata dell'operatore $I + T$ tramite la serie di potenze

$$(I+T)^{1/2} := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} T^k,$$

che ha per l'appunto raggio di convergenza 1. A meno di restringere ancora l'intorno U, è quindi ben definita la mappa

$$C(u) := B(u)^{1/2},$$

che risulta di classe C^k da U in $L(H)$. Dall'identità

$$B(u)^* A(u) = A(0) A(u)^{-1} A(u) = A(0) = A(u) B(u)$$

deduciamo che

$$g\big(B(u)^*\big) A(u) = A(u) g\big(B(u)\big)$$

per ogni polinomio g, e passando al limite anche per ogni funzione analitica g. In particolare,

$$\big(B(u)^*\big)^{1/2} A(u) = A(u) B(u)^{1/2},$$

ossia

$$C(u)^* A(u) = A(u) C(u).$$

Moltiplicando a destra per $C(u)$ troviamo

$$C(u)^* A(u) C(u) = A(u) C(u)^2 = A(u) B(u) = A(0),$$

da cui

$$A(u) = C(u)^{-*} A(0) C(u)^{-1},$$

dunque (2) vale con $\Psi(u) = C(u)^{-1}$.

Se poniamo

$$\psi(u) := \Psi(u) u,$$

la mappa ψ risulta di classe C^k da U in H, verifica $\psi(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} 2\big(f(u) - f(0)\big) &= \big(A(u)u, u\big) = \big(\Psi(u)^* A(0)\Psi(u)u, u\big) = \big(A(0)\Psi(u)u, \Psi(u)u\big) \\ &= \big(A(0)\psi(u), \psi(u)\big) = \big(\nabla^2 f(0)\psi(u), \psi(u)\big). \end{aligned}$$

Inoltre $\psi(0) = 0$ e, dato che

$$D\psi(0)[v] = D\Psi(0)[v]0 + \Psi(0)v = \Psi(0)v = v, \qquad \forall v \in H,$$

$D\psi(0) = I$ risulta invertibile. Per il teorema della mappa inversa, ψ è un diffeomorfismo di classe C^k in un intorno di 0.

Sia ora P il proiettore ortogonale sull'autospazio positivo di $\nabla^2 f(0)$. Grazie a quanto visto alla fine della sezione precedente, possiamo trovare un isomorfismo T di H in sé tale che

$$T^* \nabla^2 f(0) T = P - (I - P).$$

Se definiamo il diffeomorfismo locale φ come $\varphi := \psi^{-1} T$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(u) - f(0) &= \frac{1}{2}\big(\nabla^2 f(0)\psi(u), \psi(u)\big) = \frac{1}{2}\big(\nabla^2 f(0) T\varphi^{-1}(u), T\varphi^{-1}(u)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(T^* \nabla^2 f(0) T\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(u)\big) = \frac{1}{2}\|P\varphi^{-1}(u)\|^2 - \frac{1}{2}\|(I-P)\varphi^{-1}(u)\|^2, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. □

Osservazione 9.2. *Nella dimostrazione del Lemma di Morse che abbiamo presentato, la funzione f deve essere almeno di classe C^3. Il risultato è ancora vero per f soltanto C^2, come dimostrato da Kuiper (si veda ad esempio [Cha93]).*

9.3 Le relazioni di Morse

Lo scopo di questa sezione è dimostrare il seguente risultato centrale della teoria di Morse:

Teorema 9.3 (Relazioni di Morse). *Sia M una varietà hilbertiana munita di una struttura Riemanniana completa. Sia $f \in C^2(M)$ una funzione di Morse e siano $a < b$ due suoi valori regolari. Supponiamo che f soddisfi la condizione $(PS)_c$ per ogni $c \in [a, b]$. Allora per ogni campo $\mathbb{F}$ esiste un polinomio Q a coefficienti interi non negativi tale che*

$$\sum_{\substack{x \in \mathrm{crit}\, f \\ a < f(x) < b}} t^{\mathrm{ind}(x)} = \sum_{q=0}^{\infty} \dim H_q\big(\{f < b\}, \{f < a\}; \mathbb{F}\big)\, t^q + (1+t)Q(t),$$

dove si è usata la convenzione $t^\infty = 0$.

Nel seguito il campo $\mathbb{F}$ è fissato e non sarà più indicato esplicitamente.

Osserviamo che, dato che i punti critici di una funzione di Morse sono isolati e dato che f soddisfa la condizione $(PS)_c$ per ogni $c \in [a, b]$, l'insieme dei punti critici di f in $\{a < f < b\}$ è finito. Dunque a sinistra delle relazioni di Morse abbiamo un polinomio, e dalle relazioni stesse segue che anche il polinomio di Poincaré

$$P\big(\{f < b\}, \{f < a\}\big)(t) := \sum_{q=0}^{\infty} \dim H_q\big(\{f < b\}, \{f < a\}\big)\, t^q$$

della coppia di spazi topologici $(\{f < b\}, \{f < a\})$ è un genuino polinomio con coefficienti in $\mathbb{N}$. Il lato sinistro delle relazioni di Morse può essere riscritto come

$$\sum_{\substack{x \in \mathrm{crit}\, f \\ a < f(x) < b}} t^{\mathrm{ind}(x)} = \sum_{q=0}^{\infty} \big|\{x \in \mathrm{crit}\, f \mid \mathrm{ind}\,(x) = q,\ a < f(x) < b\}\big|\, t^q$$

e si dice *polinomio di Morse* della funzione f sull'intervallo $]a,b[$. Dal fatto che i coefficienti di Q sono non negativi, seguono le *disuguaglianze di Morse deboli*:

$$\left|\{x \in \operatorname{crit} f \mid \operatorname{ind}(x) = q,\ a < f(x) < b\}\right| \geq \dim H_q\big(\{f < b\}, \{f < a\}\big), \qquad \forall q \in \mathbb{N},$$

che dicono che il numero dei punti critici di indice di Morse q di f su $\{a < f < b\}$ è almeno pari al q-esimo numero di Betti della coppia $(\{f < b\}, \{f < a\})$.

Nel caso in cui M sia una varietà compatta di dimensione n, prendendo $a < \min f$ e $b > \max f$ si ottengono le relazioni:

$$\sum_{x \in \operatorname{crit} f} t^{\operatorname{ind}(x)} = \sum_{q=0}^{n} \dim H_q\big(M\big)\, t^q + (1+t)Q(t),$$

dove Q è un polinomio a coefficienti interi non negativi di grado al più $n-1$.

La dimostrazione di questo teorema si basa su due lemmi, che dicono come cambi la topologia relativa dei sottolivelli di f attraversando un livello critico, insieme a fatti generali sull'omologia singolare.

Iniziamo con una semplice osservazione. Sia

$$i : (A,B) \hookrightarrow (X,Y)$$

un'inclusione di coppie di spazi topologici. Supponiamo che esista una mappa

$$r : (X,Y) \to (A,B)$$

tale che $i \circ r$ sia omotopa a $\mathrm{id}_{(X,Y)}$ tramite un'omotopia che manda (A,B) in sé. Allora i è un'equivalenza omotopica e r è una sua inversa omotopica. Infatti l'omotopia mancante tra $r \circ i$ e $\mathrm{id}_{(A,B)}$ si ottiene restringendo l'omotopia dell'ipotesi alla coppia (A,B). Una coppia di sottospazi $(A,B) \subset (X,Y)$ per cui la mappa d'inclusione ha la proprietà vista sopra si dice *retratto di deformazione forte* di (X,Y).

LEMMA 9.4. *Sia M una varietà hilbertiana munita di una metrica riemanniana completa e sia $f \in C^2(M)$. Siano $a < b \leq c$ e supponiamo che f non possieda punti critici in $\{a \leq f \leq b\}$ e che soddisfi $(PS)_\ell$ per ogni $\ell \in [a,b]$. Allora l'inclusione*

$$\big(\{f < c\}, \{f < a\}\big) \hookrightarrow \big(\{f < c\}, \{f < b\}\big)$$

è un'equivalenza omotopica. In particolare

$$H_*\big(\{f < c\}, \{f < a\}\big) \cong H_*\big(\{f < c\}, \{f < b\}\big).$$

Dimostrazione. Per la completezza di M, il campo di classe C^1 e limitato

$$V(x) = -\frac{\nabla f(x)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2}}, \qquad \forall x \in M,$$

definisce un flusso globale

$$\phi : \mathbb{R} \times M \to M.$$

Grazie all'assenza di punti critici in $\{a \leq f \leq b\}$ e alla condizione di Palais-Smale, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{\|\nabla f\|^2}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2}} > \delta, \qquad \text{su} \quad \{a \leq f \leq b\}.$$

Sia $x \in \{a \leq f < b\}$ e sia $t \geq 0$ tale che

$$\phi\big([0,t] \times \{x\}\big) \subset \{a \leq f < b\}.$$

Allora dalla disuguaglianza

$$a \leq f(\phi(t,x)) = f(x) + \int_0^t \frac{d}{ds} f(\phi(s,x))\, ds = f(x) - \int_0^t \frac{\|\nabla f\|^2}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2}}(\phi(s,x))\, ds < b - \delta t,$$

segue che $t < (b-a)/\delta$. Quindi, posto $T := (b-a)/\delta$, risulta

$$\phi\big(\{T\} \times \{f < b\}\big) \subset \{f < a\}.$$

Insieme al fatto che i sottolivelli di f sono positivamente invarianti per il flusso ϕ, deduciamo che la mappa $x \mapsto \phi(T,x)$ è un'inversa omotopica dell'inclusione di $(\{f < c\}, \{f < a\})$ in $(\{f < c\}, \{f < b\})$. $\square$

LEMMA 9.5. *Sia $f \in C^2(M)$ una funzione che soddisfa $(PS)_c$ per ogni $c \in [a,b]$; supponiamo che $c \in]a,b[$ sia l'unico livello critico di f in $[a,b]$ e che tutti i corrispondenti punti critici $x_1,\dots,x_k$ siano non degeneri. Allora*

$$P\big(\{f<b\},\{f<a\}\big)(t)=\sum_{j=1}^{k} t^{\mathrm{ind}(x_j)},$$

qualunque sia il campo di coefficienti $\mathbb{F}$ dell'omologia singolare.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se

$$a<a'<c<b,$$

allora, dato che f non ha valori critici in $[a,a']$, per il Lemma 9.4,

$$H_*\big(\{f<b\},\{f<a\}\big)\cong H_*\big(\{f<b\},\{f<a'\}\big).$$

In base a questa osservazione, possiamo rimpiazzare il valore a con qualunque valore in $[a,c[$.

Grazie al Lemma di Morse, per ogni $j\in\{1,\dots,k\}$ possiamo identificare un intorno del punto critico non degenere x_j ad un intorno di 0 nello spazio di Hilbert H dove f si scrive come

$$f(x)=c+\frac{1}{2}\|P_jx\|^2-\frac{1}{2}\|(I-P_j)x\|^2,$$

dove P_j è il proiettore ortogonale sul primo spazio della decomposizione ortogonale

$$H=H_j^+\oplus H_j^-,$$

con

$$H_j^{\pm}:=V^{\pm}\big(\nabla^2 f(x_j)\big).$$

Modifichiamo la metrica riemanniana di M in modo che le carte dell'identificazione di cui sopra siano isometrie. Allora ∇f risulta un campo lineare su un intorno di ciascun x_j:

$$\nabla f(x)=P_jx-(I-P_j)x. \tag{3}$$

Sia V il campo vettoriale limitato usato nel Lemma 9.4 e sia ϕ il suo flusso.

Chiamiamo due intorni U_j^0 e U_j^1 di x_j della forma

$$U_j^0:=(B_{r_0}\cap H_j^+)\times(B_{r_0}\cap H_j^-),\qquad U_j^1:=(B_{r_1}\cap H_j^+)\times(B_{r_1}\cap H_j^-),$$

con $r_0<r_1$ e

$$U_j^1\subset\{f<b\}.$$

Poniamo

$$U_j:=\phi\big([0,+\infty[\times U_j^0\big)\cap U_j^1.$$

Grazie a (3), l'insieme $\overline{U_j}\cap\partial U_j^1$ è composto da punti che provengono dalla porzione

$$(\overline{B}_{r_0}\cap H_j^+)\times(\partial B_{r_0}\cap H_j^-)$$

del bordo di U_j^0 tramite il flusso ϕ. Dato che $f\le c$ su tale porzione del bordo di U_j^0, risulta

$$\sup_{x\in\overline{U_j}\cap\partial U_j^1} f(x)<c.$$

Grazie all'osservazione iniziale, possiamo assumere che a soddisfi

$$\sup_{x\in\overline{U_j}\cap\partial U_j^1} f(x)<a<c,\qquad \forall j\in\{1,\dots,k\}.$$

Affermiamo che l'inclusione

$$\Big(\{f<a\}\cup\bigcup_{j=1}^k U_j, \{f<a\}\Big)\hookrightarrow \big(\{f<b\},\{f<a\}\big)$$

è un'equivalenza omotopica.

Dimostriamo questa affermazione. Grazie alla condizione di Palais-Smale, esiste un numero $\delta>0$ tale che

$$\frac{\|\nabla f\|^2}{\sqrt{\|\nabla f\|^2+1}}\geq\delta \qquad \text{su} \quad \{a\leq f\leq b\}\setminus\bigcup_{j=1}^k U_j.$$

Sia $T=(b-a)/\delta$ e sia $x\in\{f<b\}$. Se

$$\phi(t,x)\notin\bigcup_{j=1}^k U_j \qquad \forall t\in[0,T],$$

allora ragionando come nella dimostrazione del Lemma 9.4 si trova che

$$\phi(T,x)\in\{f<a\}.$$

Se invece esiste $t\in[0,T]$ tale che $\phi(t,x)\in U_j$ per un certo j, allora

$$\phi(T,x)\in\{f<a\}\cup U_j,$$

dato che l'insieme di destra è positivamente invariante per il flusso ϕ. Dunque $\phi(T,\cdot)$ manda $\{f<b\}$ in $\{f<a\}\cup\bigcup_{j=1}^k U_j$. Insieme al fatto che per ogni $t\in[0,T]$ la mappa $\phi(t,\cdot)$ manda gli insiemi $\{f<a\}$ e $\{f<a\}\cup\bigcup_{j=1}^k U_j$ in sé stessi, questo implica che $\phi(T,\cdot)$ è un'inversa omotopica dell'inclusione di cui sopra.

Poniamo

$$X:=\{f<a\}\cup\bigcup_{j=1}^k U_j, \qquad Y:=\{f<a\}\setminus\bigcup_{j=1}^k U_j, \qquad A:=\{f<a\}.$$

Per quanto dimostrato sopra,

$$H_*\big(\{f<b\},\{f<a\}\big)\cong H_*(X,A).$$

Dato che Y è relativamente chiuso in X, per escissione si ha

$$H_*(X,A)\cong H_*(X\setminus Y, A\setminus Y).$$

Dato che

$$X\setminus Y=\bigcup_{j=1}^k U_j, \qquad A\setminus Y=\bigcup_{j=1}^k U_j\cap\{f<a\},$$

abbiamo

$$H_*(X\setminus Y,A\setminus Y)\cong\bigoplus_{j=1}^k H_*\big(U_j,U_j\cap\{f<a\}\big).$$

Perciò è sufficiente verificare che

$$P\big(U_j,U_j\cap\{f<a\}\big)(t)=t^{\operatorname{ind}(x_j)}.$$

Dimostriamo questo fatto. L'inclusione

$$\big(B_{r_1}\cap H_j^-, B_{r_1}\cap H_j^-\cap\{f<a\}\big)\hookrightarrow\big(U_j,U_j\cap\{f<a\}\big)$$

è un'equivalenza omotopica: una sua inversa omotopica è data infatti dalla proiezione $(I-P_j)$ su H_j^-, dato che la funzione

$$t\mapsto f\big((I-P_j)x+tP_jx\big)$$

è decrescente. Utilizzando un'omotopia radiale, si verifica facilmente che anche l'inclusione

$$\big(B_{r_1} \cap H_j^-, \partial(B_{r_1} \cap H_j^-)\big) \hookrightarrow \big(B_{r_1} \cap H_j^-, B_{r_1} \cap H_j^- \cap \{f < a\}\big)$$

è un'equivalenza omotopica. Dato che $B_{r_1} \cap H_j^-$ è una palla di dimensione $\mathrm{ind}\,(x_j)$, concludiamo che

$$P\big(U_j, U_j \cap \{f < a\}\big)(t) = P\big(B_{r_1} \cap H_j^-, \partial(B_{r_1} \cap H_j^-)\big)(t) = t^{\mathrm{ind}\,(x_j)},$$

come volevasi dimostrare. Si noti che nel caso $\mathrm{ind}\,(x_j) = \infty$, la palla di H_j^- è deformabile sul suo bordo, dunque

$$H_*\big(B_{r_1} \cap H_j^-, \partial(B_{r_1} \cap H_j^-)\big) = 0,$$

compatibilmente con la convenzione $t^\infty = 0$. □

Per passare dai risultati locali espressi dai Lemmi 9.4 e 9.5 alle relazioni di Morse globali, sarà utile il seguente fatto generale:

LEMMA 9.6. *Siano $X \subset Y \subset Z$ spazi topologici tali che $H_*(Y,X)$ e $H_*(Z,Y)$ siano finitamente generate. Allora anche $H_*(Z,X)$ è finitamente generata e*

$$P(Y,X)(t) + P(Z,Y)(t) = P(Z,X)(t) + (1+t)Q(t),$$

dove Q è un polinomio con coefficienti interi non negativi.

Dimostrazione. Dato che stiamo usando coefficienti in un campo, la successione esatta lunga in omologia

$$\cdots \to H_q(Y,X) \to H_q(Z,X) \to H_q(Z,Y) \to H_{q-1}(Y,X) \to \cdots \to H_0(Z,Y) \to 0$$

splitta, ossia si ha

$$H_q(Y,X) \cong C_q \oplus A_q, \qquad H_q(Z,X) \cong A_q \oplus B_q, \qquad H_q(Z,Y) \cong B_q \oplus C_{q-1},$$

con $C_{-1} = 0$. Dette a_q, b_q e c_q le dimensioni di A_q, B_q e C_q, si trova

$$\begin{aligned} P(Y,X)(t) + P(Z,Y)(t) &= \sum_{q\geq 0}(c_q + a_q)t^q + \sum_{q\geq 0}(b_q + c_{q-1})t^q = \sum_{q\geq 0}(a_q + b_q)t^q + (t+1)\sum_{q\geq 1} c_{q-1}t^q \\ &= P(Z,X)(t) + (t+1)\sum_{q\geq 1} c_{q-1}t^q, \end{aligned}$$

come richiesto. □

Possiamo finalmente dimostrare le relazioni di Morse:

Dimostrazione del Teorema 9.3. Se f non ha valori critici in $[a,b]$, allora per il Lemma 9.4,

$$H_*\big(\{f < b\}, \{f < a\}\big) \cong H_*\big(\{f < b\}, \{f < b\}\big) = 0,$$

e le relazioni di Morse valgono banalmente, prendendo $Q = 0$.

Siano allora $c_1 < c_2 < \cdots < c_h$, $h \geq 1$, i valori critici di f in $]a,b[$ e siano

$$a = a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \cdots < a_{h-1} < c_h < a_h = b.$$

Grazie al Lemma 9.6, possiamo dimostrare che esiste un polinomio Q con coefficienti interi non negativi tale che

$$\sum_{j=1}^{h} P\big(\{f < a_j\}, \{f < a_{j-1}\}\big)(t) = P\big(\{f < b\}, \{f < a\}\big) + (1+t)Q(t). \tag{4}$$

Infatti, ragioniamo per induzione su h. Se $h = 1$, $a_1 = b$ e non c'è nulla da dimostrare. Se l'identità sopra vale con $h-1$ insiemi, ossia se

$$\sum_{j=1}^{h-1} P\big(\{f < a_j\}, \{f < a_{j-1}\}\big)(t) = P\big(\{f < a_{h-1}\}, \{f < a\}\big)(t) + (1+t)Q_{h-1}(t),$$

con $Q_{h-1} \in \mathbb{N}[t]$, applicando il Lemma 9.6 agli insiemi

$$X := \{f < a\}, \qquad Y := \{f < a_{h-1}\}, \qquad Z := \{f < a_h\} = \{f < b\},$$

otteniamo l'esistenza di un polinomio $\hat{Q} \in \mathbb{N}[t]$ tale che

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{h} P\big(\{f < a_j\}, \{f < a_{j-1}\}\big)(t) = \sum_{j=1}^{h-1} P\big(\{f < a_j\}, \{f < a_{j-1}\}\big)(t) + P\big(\{f < a_h\}, \{f < a_{h-1}\}\big)(t) \\
= \quad & P\big(\{f < a_{h-1}\}, \{f < a\}\big) + (1+t)Q_{h-1}(t) + P\big(\{f < a_h\}, \{f < a_{h-1}\}\big)(t) \\
= \quad & (1+t)Q_{h-1}(t) + P\big(\{f < a_h\}, \{f < a\}\big)(t) + (1+t)\hat{Q}(t) \\
= \quad & P\big(\{f < b\}, \{f < a\}\big)(t) + (1+t)\big(Q_{h-1}(t) + \hat{Q}(t)\big),
\end{aligned}$$

dunque l'identità (4) con h insiemi vale con $Q = Q_{h-1} + \hat{Q}$.

Per il Lemma 9.5,

$$P\big(\{f < a_j\}, \{f < a_{j-1}\}\big)(t) = \sum_{\substack{x \in \operatorname{crit} f \\ f(x) = c_j}} t^{\operatorname{ind}(x)},$$

dunque (4) implica le relazioni di Morse. □

Osservazione 9.7. *Per ulteriori informazioni ed applicazioni della teoria di Morse, si possono consultare [Mil63] (dimensione finita), [Pal63] e [Cha93] (dimensione infinita).*

Riferimenti bibliografici

[Cha93] K. C. Chang, *Infinite-dimensional Morse theory and multiple solution problems*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[Mil63] J. Milnor, *Morse theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[Pal63] R. S. Palais, *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology **2** (1963), 299–340.