Operatori Differenziali
Quarto Compito - 19 Gennaio 2009

Esercizio 1. Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} f(x/\epsilon)$, per $\epsilon > 0$. (a) Determinare il limite in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ di f_ϵ per $\epsilon \searrow 0$. (b) Determinare il seguente limite in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon}.$$

Esercizio 2. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia (A_n) una successione di operatori lineari continui su H tale che $A_n u \to Au$ per ogni $u \in H$, dove A è un operatore lineare e continuo su H. Sia (K_n) una successione di operatori lineari compatti su H tale che $K_n \to K$ in norma operatoriale. Dimostrare che $A_n K_n \to AK$ in norma operatoriale.

Esercizio 3. Sia a un numero complesso con parte reale diversa da zero. Dimostrare che l'operatore

$$T : H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad Tu = u' - au,$$

è un isomorfismo. Cosa si può dire nel nucleo e dell'immagine di T nel caso in cui a abbia parte reale nulla?