Operatori differenziali - Esercizi

1. Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$ definita positiva. Dimostrare che
$$\mathscr{F}\left(e^{-(Ax\cdot x)/2}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{-(A^{-1}\xi\cdot\xi)/2}.$$
[Considerare dapprima il caso di A diagonale.]

2. Consideriamo il quadrato $Q = [0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ e sia χ_Q la sua funzione caratteristica. Determinare le derivate distribuzionali prime e seconde di χ_Q.

3. *(Soluzione fondamentale del Laplaciano in dimensione 2)* Sia $E : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la funzione $E(x) = (2\pi)^{-1}\log|x|$. Mostrare che:
   (a) E sta in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$;
   (b) $\partial_j E = x_j/(2\pi|x|^2)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, per $j = 1, 2$;
   (c) $\Delta E = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$;
   (d) $\frac{\partial}{\partial z}E = 1/(4\pi z)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$;
   (e) sfruttando la formula $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar z}$, dedurre che $\frac{\partial}{\partial \bar z}\frac{1}{\pi z} = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

   [Si ricorda che $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2})$ e $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2})$.]

4. *(Soluzione fondamentale dell'equazione di Schrödinger)* Sia $S(t,x) = (4\pi i t)^{-n/2}e^{i|x|^2/(4t)}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Mostrare che S sta in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ e che $(i\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x)S = \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$.

5. *(Valore principale di $1/x$).*
   (a) Dimostrare che la formula
   $$\langle \text{pv}\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$
   definisce una distribuzione su $\mathbb{R}$, determinarne l'ordine e le derivate in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) Dopo aver verificato che la funzione $\log|x|$ è localmente integrabile su $\mathbb{R}$, determinarne la derivata distribuzionale.

6. (a) Mostrare che la formula
   $$\langle u, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi(1/j) - n\cdot\varphi(0) - \log n\cdot\varphi'(0)\right), \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$
   definisce una distribuzione u su $\mathbb{R}$ e determinarne il supporto.

(b) Sia $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ una successione in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi_k(x) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad &\text{per } x \in \mathbb{R}, \\ \varphi_k(x) = 0 \quad \text{per } x \leq \frac{1}{k+1} \ &\text{e per } \forall x \geq 2, \\ \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad &\text{per } \frac{1}{k} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Dimostrare che le derivate di ogni ordine di ciascuna φ_k si annullanno sul supporto di u, ma che

$$\lim_{k\to\infty} \langle u, \varphi_k \rangle = +\infty.$$

7. Determinare la distribuzione u su $\mathbb{R}$ definita dalla formula

$$u = x^p \frac{d^q}{dx^q} \delta_0,$$

al variare di $p, q \in \mathbb{N}$.

8. Determinare la distribuzione u su $\mathbb{R}$ definita dalla formula

$$u = e^{\alpha x} \frac{d^q}{dx^q} \delta_0,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}$.

9. Si consideri il funzionale lineare u su $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)\, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

(a) Mostrare che u è una distribuzione di ordine zero.

(b) Qual è il supporto di u? Mostrare che u non è una funzione continua.

(c) Determinare $(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y})u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

10. Si consideri l'operatore differenziale su $\mathbb{R}$ definito da

$$P = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Siano $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ tali che $Pf = Pg = 0$, $f(0) = g(0)$ e $f'(0) - g'(0) = 1$. Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definita da

$$\langle u, \varphi \rangle = -\int h(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

dove h è la funzione

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq 0, \\ g(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Determinare Pu.

11. *(Equazione delle onde)* Nel piano $\mathbb{R}^2$ con coordinate (t, x) si consideri la distribuzione W definita dalla funzione localmente integrabile

$$W(t,x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } t > |x|, \\ 0 & \text{se } t \leq |x|. \end{cases}$$

Determinare $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})W$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

12. Dato $\epsilon > 0$ poniamo $u_\epsilon(x) = \epsilon |x|^{\epsilon - 1}$. Determinare il limite di u_ϵ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ per $\epsilon \to 0$.

13. (a) Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$u_a = \sum_{n=1}^{\infty} n^a (\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(b) Dimostrare che questa serie converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se e solamente se $a < 0$.

(c) Per $0 \leq a < 1$ trovare una distribuzione $v_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la cui restrizione a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sia u_a.