OPERATORI DIFFERENZIALI - Programma dettagliato

Alberto Abbondandolo

Gli argomenti in **grassetto** sono quelli di cui occorre conoscere nei dattagli le dimostrazioni.

SERIE DI FOURIER. I coefficienti di Fourier di una funzione sommabile sul toro n-dimensionale. Gli spazi $\ell^p(\mathbb{Z}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $c_0(\mathbb{Z}^n)$, $s(\mathbb{Z}^n)$. **Coefficienti di Fourier e derivate**. **Teorema di Riemann-Lebesgue: l'operatore di Fourier manda $L^1(\mathbb{T}^n)$ in $c_0(\mathbb{Z}^n)$. Teorema di inversione: l'operatore di Fourier è un isomorfismo da $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ su $s(\mathbb{Z}^n)$. L'equazione del calore sul toro**. **La teoria L^2: l'operatore di Fourier è un'isometria da $L^2(\mathbb{T}^n)$ su $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.** Coefficienti di Fourier e convoluzione.

TRASFORMATA DI FOURIER. La trasformata di Fourier di una funzionale sommabile su $\mathbb{R}^n$. Lo spazio di Schwarz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. **Trasformata di Fourier e derivate**. **Teorema di Rieman-Lebesgue: la trasformata di Fourier manda $L^1(\mathbb{R}^n)$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$. La trasformata di Fourier della Gaussiana**. **Teorema di inversione: la trasformata di Fourier è un automorfismo di $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.** Trasformata di Fourier e riscalamenti. Trasformata di Fourier e prodotti. **La teoria L^2: la trasformata di Fourier si estende ad un'isometria su $L^2(\mathbb{R}^n)$.**

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI. **Convergenza negli spazi $\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ e $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Distribuzioni sull'aperto Ω e ordine di una distribuzione**. **Esempi**: la delta di Dirac, misure, funzioni L^1. **Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni**. **Convergenza nello spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il supporto di una distribuzione**. **Caratterizzazione delle distribuzioni supportate in un punto. Differenziazione e moltiplicazione per funzioni**. **Esempio: le derivate della funzione caratteristica di un aperto con frontiera di classe C^1. Soluzioni fondamentali**. **Soluzioni fondamentali dell'operatore di Cauchy-Riemann, del Laplaciano, dell'operatore del calore**. Convoluzione tra una distribuzione su $\mathbb{R}^n$ ed una funzione C^∞ a supporto compatto. Densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Convoluzione tra distribuzioni, di cui una a supporto compatto. Commutatività, associatività, derivazione. Il supporto singolare di una distribuzione. Teorema di regolarità ellittica: se l'operatore differenziale a coefficienti costanti P possiede una soluzione fondamentale supportata in 0, allora il supporto singolare di u coincide con quello di Pu, per ogni distribuzione u. **Lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, convergenza in questo spazio**. **La trasformata di Fourier su $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Esempi**: la trasformata di Fourier di una costante, della delta, della funzione Heaviside. Teorema di Paley-Wiener: la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto si estende ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}^n$. **Teorema di Liouville generalizzato: se una distribuzione temperata è armonica allora è un polinomio**. Trasformata di Fourier e prodotti.

ALCUNE EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA. **L'equazione del calore su $\mathbb{R}^n$**: esistenza ed unicità nello spazio delle distribuzioni temperate. Esempio di non unicità. Equazione del calore su parallelepipedi. **Potenziali di Bessel: soluzione fondamentale dell'operatore $-\Delta + \omega$, per $\omega > 0$. Equazione delle onde**. **Distribuzione di Green per l'equazione delle onde e suo utilizzo nella risoluzione del problema di Cauchy**. **Calcolo della distribuzione di Green per l'equazione delle onde in dimensione 1,2,3**. Analisi qualitativa delle soluzioni dell'equazione delle onde.

TEORIA SPETTRALE. Lo spazio degli operatori lineari limitati, la norma operatoriale, l'aperto degli operatori invertibibili. Spettro di un operatore lineare limitato e sue proprietà. Formula del raggio spettrale. Operatori compatti e loro proprietà. Il teorema spettrale per gli operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert. Caratterizzazione variazionale degli autovalori di Courant-Fischer. Operatori non limitati. Operatori chiusi, simmetrici, autoaggiunti. Per un operatore T con dominio denso nello spazio di Hilbert H sono fatti equivalenti: (1) T è autoaggiunto, (2) T è chiuso e $\ker(T^* \pm iI) = (0)$, (3) $R(T \pm iI) = H$. Teorema spettrale: ogni operatore autoaggiunto è isometricamente equivalente ad un operatore di moltiplicazione su L^2 di un opportuno spazio di misura. Interpolazione complessa.

SPAZI DI SOBOLEV. Lo spazio $H^s(\mathbb{R}^n)$ definito mediante la trasformata di Fourier. Se $s > n/2$, c'è un'immersione continua $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$. Se $s > n/2 + k$ con $k \in \mathbb{N}$, c'è un'immersione continua $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Se $s = n/2 + \alpha$ con $0 < \alpha < 1$, allora le funzioni $H^s(\mathbb{R}^n)$ sono α-Höldieriane. Il duale di $H^s(\mathbb{R}^n)$ si identifica con $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. **Per $0 \leq s < n/2$ c'è un'immersione continua $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, per ogni $p \in [2, 2n/(n-2s)[$. Spazi di Sobolev su varietà compatta. Il caso del toro e relazione con i coefficienti di Fourier. Se $s > r$ l'immersione $H^s(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T}^n)$ è compatta**. Conseguenza: immersioni compatte per gli spazi di Sobolev su variet'a compatte. Se $s > 1/2$, l'operatore di restrizione a $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ si estende ad un operatore continuo $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. **Spazi di Sobolev sul semispazio $\mathbb{R}^n_+$**. L'operatore di restrizione $H^k(\mathbb{R}^n) \to H^k(\mathbb{R}^n_+)$ possiede un'inversa destra lineare e continua. **Spazi di Sobolev su domini limitati e regolari**. Immersioni compatte. **Lo spazio $H_0^s(\Omega)$**. Il duale di $H_0^k(\Omega)$ è $H^{-k}(\Omega)$. **Disuguaglianza di Poincarè: se Ω è un aperto limitato, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.**

L'OPERATORE DI LAPLACE SU DOMINI Ω LIMITATI E REGOLARI. L'operatore $-\Delta$ è un isomorfismo da $H_0^1(\Omega)$ su $H^{-1}(\Omega)$. Il suo inverso si restringe ad un operatore autoaggiunto compatto positivo su $L^2(\Omega)$. Conseguenza: l'operatore $-\Delta$ con dominio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ possiede un sistema ortonormale completo di autofunzioni, con autovalori positivi e divergenti. Stime ellittiche per $L = -\Delta + X$, con X operatore del primo ordine con coefficienti in $C^\infty(\overline{\Omega})$: se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $Lu \in H^{k-1}(\Omega)$, allora $u \in H^{k+1}(\Omega)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Conseguenze: le autofunzioni del Laplaciano sono regolari fino al bordo. **Il problema di trovare una funzione armonica u con dato assegnato al bordo $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ possiede una ed una sola soluzione $u = PIf$. L'operatore PI nel caso $n = 2$, Ω disco unitario**. L'operatore PI ha un'estensione continua a $PI : H^s(\partial\Omega) \to H^{s+1/2}(\Omega)$, inversa destra dell'operatore di traccia. Il problema di Poisson $-\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ possiede soluzione unica. Il caso di $L = -\Delta + X$: alternativa di Fredholm. L'operatore di Laplace-Beltrami su varietà compatta.

Testi consigliati

- Lars Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer 1990.
- Michael E. Taylor, *Partial differential equations - Basic theory*, Springer 1996.
- Claude Zuily, *Problems in distributions and partial differential equations*, Hermann 1988.
- Aleksandr Kirillov, Aleksej Gvišiani, *Teoria e problemi dell'analisi funzionale*, Edizioni Mir 1983.