Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Teoremi di funzione implicita vecchi e nuovi

30 settembre 2011

Tesi di Laurea Magistrale

Candidato
Angelo Lucia
lucia@poisson.phc.unipi.it

Relatore
Prof. Alberto Abbondandolo
Università di Pisa

Controrelatore
Prof. Antonio Tarsia
Università di Pisa

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Introduzione

Il teorema di funzione implicita è stato, al di là di uno strumento straordinario per lo sviluppo dell'Analisi Matematica, uno dei paradigmi più longevi e proficui della matematica moderna. Presente in forma embrionale nei lavori di Newton e di Leibniz, e formulato nella forma in cui la conosciamo oggi da Dini, il teorema di funzione implicita ha oltrepassato il contesto nel quale è nato diventando non solo un risultato valido sotto le più diverse ipotesi, ma una categoria di pensiero con il quale si affrontano i problemi. Probabilmente il più importante risultato in tal senso è il teorema di Nash-Moser, il quale mostra che un teorema di funzione implicita può essere usato per risolvere non solo problemi concreti, ma è anche uno strumento teorico di grande valore.

Un teorema di funzione implicita è, in maniera astratta, una maniera per assegnare ad una funzione $f : X \times Y \to Z$, alcune condizioni di *non degenerazione* che assicurino l'esistenza (locale) di soluzioni $y = h(x)$ dell'equazione,

$$f(x, y) = 0.$$

Com'è ben noto, nel teorema di Dini la condizione di non degenerazione è una richiesta sull'invertibilità del differenziale parziale $\partial_y f(x, y)$.

La tesi tratta le possibili generalizzazioni di questo risultato al contesto degli spazi di Banach. Il tal senso la letteratura è molto ricca, anche se talvolta carente di organicità: uno degli obiettivi dell'elaborato è anche quello di cercare di presentare con maggior uniformità i risultati ottenuti finora.

In particolare, una delle costanti ritrovate praticamente nella totalità dei risultati studiati, è la dipendenza da un risultato di esistenza molto elementare. Nella maggior parte dei risultati questo fondamento si trova nel teorema delle contrazioni, e difatti ci sono affinità enormi tra questi risultati. Un recente risultato di Ekeland utilizza al contrario l'omonimo teorema variazionale, e di fatto il "teorema di funzione implicita" (trattasi in realtà di teorema di locale surgettività) che si può ottenere ha ipotesi non comparabili con i teoremi che si basano sul teorema delle contrazioni.

Nel primo capitolo si affronta in maniera molto generale quali possono essere le definizioni di differenziabilità di mappe tra spazi di Banach. Si danno quattro diverse definizioni, due delle quali universalmente conosciute (differenziabilità di Gâteaux e di Fréchet), mentre altre due meno note: la differenziabilità debole secondo Gâteaux, e la quasi-differenziabilità. Di queste quattro diverse definizioni si danno proprietà essenziali ed in particolare si dimostra che è possibile ordinarle in una scala, dalla definizione più forte (quella di Fréchet) a quella più debole (quella di Gâteaux debole). Si mostra altresì, tramite controesempi, che le implicazioni sono strette, e si danno condizioni sotto le quali è possibile invertire tali implicazioni, sintetizzate dallo schema di figura 1.

$$
\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[r, Rightarrow] & \text{quasi-diff.} \arrow[l, bend right, "\dim X<\infty"'] \arrow[r, Rightarrow] & \text{G-diff.} \arrow[l, bend right, "f \text{ lipschitz}"'] \arrow[r, Rightarrow] & \text{debole G-diff.} \arrow[l, bend right, "\dim Y<\infty"'] \arrow[lll, bend left, "Df\in C(U,L(X,Y))"] \arrow[ll, bend left, "Df\in C(U\times X,Y)"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1: Relazioni tra le diverse definizioni di differenziale per una funzione continua $f : X \to Y$.

Nel secondo capitolo, si presentano alcune classi di operatori tra spazi L^p, i cosiddetti operatori di sovrapposizione o di Nemistki e quelli di Hammerstein, che forniscono utili esempi, dal momento che sotto opportune ipotesi essi sono operatori quasi-differenziabili ma non Fréchet differenziabili.

Nel terzo capitolo si affronta un problema collegato a quello di funzione implicita, ovvero il problema di determinare condizioni sufficienti per assicurare l'iniettività locale di una data mappa f. Si dimostra una condizione molto semplice nel caso in cui f sia F-differenziabile, mentre nel caso in cui il dominio abbia dimensione finita, si ottengono condizioni dipendenti dal solo differenziale di Gâteaux. In particolare, se $Df(x)$ è iniettivo in un intorno di x_0, anche f lo è. Questo risultato non si estende, senza ulteriori ipotesi, in dimensione infinita, come mostra un semplice controesempio.

Nel quarto capitolo si affronta finalmente il problema della funzione implicita, presentando una serie di risultati che si basano sul teorema delle contrazioni tra spazi metrici. Dal risultato oramai classico di Hildebrandt-Graves, che richiede la F-differenziabilità, si arriva ai risultati di Deimling e di Tarsia, dove si richiede l'esistenza di una funzione invertibile che approssimi, in un senso opportuno, la mappa in esame. In particolare si mostra come questi due teoremi, nonostante abbiano avuto una genesi radicalmente diversa, sono equivalenti. Si mostra altresì sotto quali ipotesi il differenziale di Gâteaux può essere la funzione approssimante richiesta.

Infine, nell'ultimo capitolo, si presenta il risultato più recente, dovuto a Ekeland. Si discute l'omonimo principio variazionale sul quale questo si basa, e se ne da una interpretazione di tipo geometrico immediatamente comprensibile. Si presenta poi il risultato di Ekeland, che è un teorema di locale surgettività, e se ne mostra una formulazione equivalente come teorema di funzione implicita.

Capitolo 1

Differenziabilità

1.1 Differenziabilità di mappe tra spazi di Banach

Iniziamo fissando qualche notazione e ricordando qualche definizione classica. D'ora in avanti indicheremo con X e Y due spazi di Banach. Indicheremo inoltre con $L(X, Y)$ lo spazio delle mappe lineari e continue tra X e Y; tale spazio, dotato della norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leqslant 1}} \|Tx\|_Y \,,$$

è a sua volta uno spazio di Banach. Come d'uso, lo spazio $L(X, \mathbb{R})$ verrà indicato con X^* e sarà chiamato duale topologico di X (o semplicemente duale).

Utilizzeremo la notazione di Landau, e dal momento che saremo interessati solo al comportamento asintotico in un intorno dell'origine, tralasceremo la dicitura "per x che tende a 0". Indicato con $U \subset X$ un intorno di 0, diremo che una mappa

$$f : U \subset X \to Y,$$

è infinitesima rispetto a $g : U \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$, e scriveremo $f = o(g)$, se

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{1.1}$$

Diremo invece che f è limitata rispetto a g, e scriveremo $f = O(g)$, se

$$\limsup_{x \to 0} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} < \infty. \tag{1.2}$$

Ricordiamo che la topologia debole su X è la topologia meno fine che rende continui tutti i funzionali lineari di X^*. In tale topologia, una successione $(x_n) \subset X$ converge debolmente a $x \in X$ se e solo se $x^*(x_n) \to x^*(x)$ per ogni $x^* \in X^*$.

Diremo dunque che f è debolmente infinitesima rispetto a g, e scriveremo $f = w\text{-}o(g)$, se

$$\text{w-}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{1.3}$$

Osserviamo che

$$f = o(g) \Rightarrow f = w\text{-}o(g) \Rightarrow f = O(g),$$

e che i viceversa sono in generale falsi.

Vogliamo ora presentare alcune generalizzazioni del concetto classico di derivata, estendendolo al caso di mappe definite su spazi di dimensione infinita. Secondo un'impostazione oramai consolidata (si veda [Zei86]), cercheremo di dare varie definizioni di cosa vuol dire *approssimare* una mappa non lineare con un operatore lineare.

Per facilitare il confronto tra le diverse definizioni che daremo, proveremo ad impostarle in maniera da rendere tra di loro simili, e quindi da evidenziare in maniera più netta le differenze: per una panoramica generale tra le diverse generalizzazioni di derivata nell'ambito degli spazi vettoriali topologici, si veda [AS68].

Nelle definizioni che seguono, $U \subset X$ è un aperto, x è un elemento di U, f una mappa definita su U a valori in Y, e T un operatore lineare e continuo tra X e Y.

Definizione 1.1 (Derivata secondo Fréchet). Una mappa $f : U \to Y$ si dice *differenziabile secondo Fréchet* in un punto $x \in U$ se esiste un operatore lineare e continuo $T \in L(X, Y)$ tale che

$$f(x + h) = f(x) + Th + o(\|h\|). \tag{1.4}$$

Per brevità, useremo a volte anche l'espressione F-differenziabile.

Definizione 1.2 (Quasi-derivabilità). Una funzione $f : U \to Y$ si dice *quasi-differenziabile* in un punto $x \in U$ se esiste un operatore lineare e continuo $T \in L(X, Y)$ tale che, per ogni curva continua $g : [-1, 1] \to U$, che verifica $g(0) = x$ e derivabile in 0, ovvero tale che esista il limite

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \in X$$

vale

$$\begin{aligned} f(g(t)) = f(x) + tTg'(0) + o(t) \\ \text{per } \mathbb{R} \ni t \to 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

In altre parole, stiamo richiedendo che la curva $f \circ g : [-1, 1] \to Y$ sia differenziabile in 0 per ogni curva g che soddisfi le proprietà elencate.

Definizione 1.3 (Derivata secondo Gâteaux). Una mappa $f : U \to Y$ si dice *differenziabile secondo Gâteaux* in un punto $x \in U$ se esiste un operatore lineare e continuo $T \in L(X, Y)$ tale che

$$\begin{aligned} \forall h \in X, \quad f(x+th) = f(x) + tTh + o(|t|) \\ \text{per } \mathbb{R} \ni t \to 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Per brevità, useremo a volte anche l'espressione G-differenziabile.

Osservazione 1.1. Nella definizione di G-differenziabilità, la richiesta che esista un operatore lineare che verifica l'equazione (1.6) è più forte del semplice fatto che, per ogni h in X, esista il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Tale limite potrebbe esistere per ogni $h \in X$, ma non dipendere linearmente da h. Consideriamo infatti il seguente

Esempio 1.1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } xy > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} &= 0, \\ \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} &= 0, \\ \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ma ovviamente non esiste un operatore lineare che soddisfi l'equazione (1.6): dovrebbe infatti valere 0 su una base di $\mathbb{R}^2$ senza essere nullo. Quindi f non è G-differenziabile in 0, anche se ristretto ad una qualsiasi retta passante per l'origine è differenziabile.

Definizione 1.4 (Derivata debole secondo Gâteaux). Una mappa $f : U \to Y$ si dice *debolmente differenziabile secondo Gâteaux* in un punto $x \in U$ se esiste un operatore lineare e continuo $T \in L(X, Y)$ tale che

$$\begin{aligned} \forall h \in X, \quad f(x+th) = f(x) + tTh + w\text{-}o(|t|) \\ \text{per } \mathbb{R} \ni t \to 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

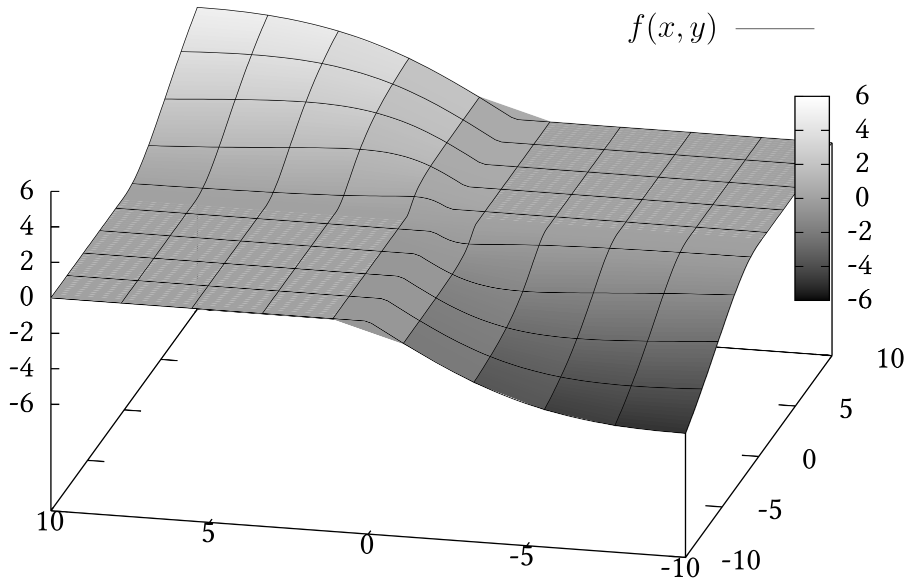

Figura 1.1: Grafico di $f(x, y)$ dell'esempio 1.1.

Se per ogni $x \in U$, f risulta differenziabile (secondo una qualsiasi di queste quattro definizioni) in x, allora diremo che f è differenziabile in U (o su tutto U).

In seguito mostreremo che per tutte queste definizioni, se un siffatto operatore lineare T esiste, allora è unico. Dando per buono questo risultato, possiamo già anticipare una definizione: chiameremo tale unico operatore T *differenziale* di f in x, e lo indicheremo con $Df(x)$, quando non ci sarà ambiguità rispetto a quale definizione di differenziale ci stiamo riferendo. Com'è uso, identificheremo $L(X, \mathbb{R})$ con X^*, e $L(\mathbb{R}, X)$ con X, e quindi a volte identificheremo il differenziale rispettivamente con un elemento di X^* o di X.

In particolare, se $f : \mathbb{R} \to Y$ è una curva, le definizioni di F-differenziabilità, quasi-differenziabilità, e G-differenziabilità coincidono tra loro, e coincidono con la definizione tradizionale di derivata. D'altra parte, se $f : X \to Y$ e Y ha dimensione finita, allora la topologia debole su Y coincide con la topologia forte, e quindi la G-differenziabilità debole implica la G-differenziabilità. Vedremo in seguito sotto quali altre ipotesi è possibile avere equivalenze tra le definizioni date. Mostreremo inoltre che in generale queste definizioni non sono equivalenti, grazie ad alcuni controesempi: in particolare si vedano gli esempi 1.2, 1.3 e l'osservazione 2.1.

Le definizioni date di derivata secondo Fréchet e Gâteaux sono elementi basilari dell'analisi nonlineare, e possono essere trovate in praticamente ogni libro di testo sull'argomento - per esempio, in [Zei86] e [Dei85]. La definizione di differenziabilità debole, per quanto coerente con il linguaggio solitamente utilizzato, è di uso meno frequente: si veda [Dei85, Ch. 4] o [AVZ96]. La definizione di quasi-differenziabilità è dovuta a Dieudonné ([Die60]).

1.2 Relazioni tra le diverse definizioni di differenziabilità

Analizziamo ora le connessioni tra le quattro diverse definizioni di differenziabilità date. Diremo che una definizione è più forte di un altra, se ogni funzione differenziabile in un punto rispetto alla prima lo è anche rispetto alla seconda. In particolare, vogliamo dimostrare che le definizioni date sono una più forte dell'altra, nell'ordine

$$\text{F-diff.} \Rightarrow \text{quasi-diff.} \Rightarrow \text{G-diff.} \Rightarrow \text{G-diff. debole}$$

e che in generale i viceversa sono falsi.

Proposizione 1.1. *Sia $f : U \to Y$ una funzione, e x un elemento di U. Allora*

1. *se f è F-differenziabile in x, allora è quasi-differenziabile in x, ed i due differenziali in x coincidono;*
2. *se f è quasi-differenziabile in x, allora è G-differenziabile in x, ed i due differenziali in x coincidono;*
3. *se f è G-differenziabile in x, allora è G-differenziabile debolmente in x, ed i due differenziali in x coincidono.*

Dimostrazione.

1. Se $f(x+h) = f(x) + Th + r(h)$, con $r(h) = o(\|h\|)$, allora si ha che, per ogni g che verifica le proprietà descritte nella definizione di quasi-differenziabilità:

   $$f(g(t)) = f(x) + T(g(t) - g(0)) + o(g(t) - g(0)).$$

   Dal momento che g è derivabile in 0, si ha che

   $$g(t) = g(0) + tg'(0) + o(t),$$

   e dunque possiamo scrivere

   $$f(g(t)) = f(x) + tTg'(0) + o(t) + o(O(t)) = f(x) + tTg'(0) + o(t).$$

2. Fissato $h \in X$, sia $g : [-1, 1] \to X$ il segmento di retta congiungente $x - h$ e $x + h$:
$$g(t) = x + th.$$
Con tale definizione, g è continua e vale $g'(0) = h$. Se h è sufficientemente piccolo, si ha che $g([-1, 1]) \subset U$. Allora per l'ipotesi di quasi-differenziabilità su f si ha che
$$f(g(t)) = f(x + th) = f(x) + tTg'(0) + o(t) = f(x) + tTh + o(t).$$

3. Ovvio: se $\frac{r(t)}{t}$ tende a 0 per $t \to 0$, allora ci tende anche debolmente.

□

Per mostrare che le implicazioni inverse sono false, forniremo tre controesempi. Per una mappa quasi-differenziabile ma non F-differenziabile, si veda l'osservazione 2.1.

Esempio 1.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita come
$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0, \\ \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che f è continua, e scelto un elemento $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, si ha
$$\frac{f(tv, tw) - f(0, 0)}{t} = t\frac{v^3 w}{t^2 v^2 + w^2} \to 0 \quad \text{per } t \to 0,$$
e quindi f è G-differenziabile in 0, e vale $Df(0) = 0$.

D'altra parte, consideriamo la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$. γ è continua, differenziabile in 0 e $\gamma'(0) = (1, 0)$. Abbiamo che
$$f \circ \gamma(t) = \frac{t^3 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}t,$$
e quindi $(f \circ \gamma)'(0) = 1/2$.

Questo ci dice che f non può essere quasi-differenziabile: se lo fosse, il suo differenziale dovrebbe essere 0, ma abbiamo appena visto che ciò non è possibile, dato che la curva γ costruita ha derivata in 0 uguale a $(1, 0)$, e quindi si avrebbe $Df(0)[(1, 0)] = 1/2 \neq 0$.

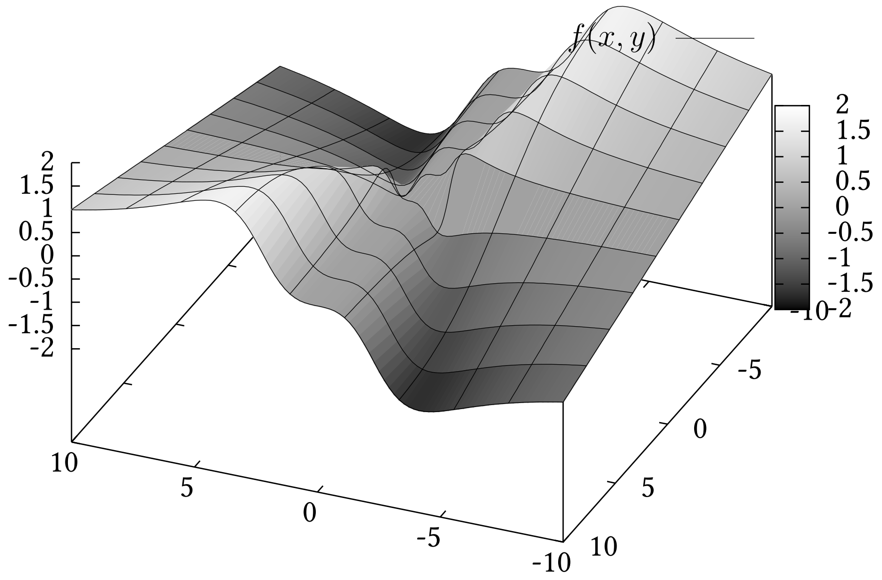

Figura 1.2: Grafico di $f(x, y)$ dell'esempio 1.2.

Esempio 1.3. Consideriamo lo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni reali quadrato sommabili, con la base canonica data da

$$e_n(k) = \delta_n^k.$$

Sia $\eta : (0, 1) \to B_{\ell^2}$ una curva continua che verifichi

$$\eta(1/n) = e_n,$$

e che sia affine sull'intervallo $[1/(n + 1), 1/n]$.

Sia infine $f : (-1, 1) \to \ell^2$ data da

$$f(t) = t\,\eta(|t|).$$

Allora f è continua (η è limitata), e vale

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \eta(|t|).$$

Osserviamo che, dal momento che e_n converge debolmente a 0 in ℓ^2, allora $\eta(|t|) = w\text{-}o(|t|)$, e quindi f è debolmente G-differenziabile in 0, e vale $Df(0) = 0$. D'altra parte e_n non converge fortemente a 0 (la norma degli e_n è costantemente uguale ad 1), e quindi $\delta(|t|)$ non è un $o(|t|)$. f quindi è debolmente G-differenziabile, ma non G-differenziabile.

1.3 Proprietà del differenziale

Alla luce della proposizione 1.1, osserviamo che ci basta dimostrare l'unicità del G-differenziale debole, per ottenere automaticamente l'unicità di tutti i differenziali e la loro coincidenza. Questo giustifica dunque l'utilizzo di un unico simbolo $Df(x)$: in tal modo si individua un unico operatore lineare, anche se rimane ambiguo (e dovrà essere chiarito dal contesto) quali delle definizioni di differenziale verifichi.

Proposizione 1.2. *Se $f : U \to Y$ è debolmente G-differenziabile in x, e T è l'operatore lineare che soddisfa l'equazione* (1.7)*, allora T è unico.*

Dimostrazione. Sia $T' \in L(X, Y)$ un altro operatore che verifica l'equazione (1.7). Allora, sottraendo le due equazioni termine a termine, otteniamo

$$0 = 0 + t(T - T')h + r_h(t) \; \forall h \in X, \quad \text{con } \operatorname*{w-lim}_{t \to 0} \frac{r_h(t)}{|t|} = 0,$$

e quindi

$$(T - T')h = \frac{r_h(t)}{|t|} = w\text{-}o(1).$$

Concludendo

$$\begin{aligned} \|T - T'\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1} \|(T - T')h\| = \\ \sup_{\|h\| \leqslant 1} \max_{\|y^*\| \leqslant 1} y^*((T - T')h) = \\ \sup_{\|h\| \leqslant 1} \max_{\|y^*\| \leqslant 1} y^* \left(\frac{r_h(t)}{|t|} \right) = 0; \end{aligned}$$

e quindi $T = T'$. □

È inoltre evidente, che se f e g sono due mappe da U in Y, che sono differenziabili in $x \in U$ secondo una qualche definizione, sommando le relative equazioni di linearizzazione si ha immediatamente che $f + g$ è differenziabile in x, e vale $D(f + g)(x) = Df(x) + Dg(x)$. Analogamente, se $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λf è differenziabile in x e vale $D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x)$. L'operazione di differenziazione è quindi lineare.

Utilizzando la terminologia di [AS68], diremo che un metodo di derivazione (nel nostro caso, una definizione di differenziale) è *regolare* se vale il teorema di derivazione di funzioni composte, ovvero se la composizione di mappe differenziabili è differenziabile ed il differenziale è la composizione dei differenziali.

La derivazione secondo Gâteaux, sia nella formulazione forte che in quella debole, non è regolare: in generale composizione di mappe G-differenziabili non è a sua volta G-differenziabile, come mostra il seguente esempio:

Esempio 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x) = (x, x^2)$, e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x = y^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $D(g \circ f)(0) = 1$, $Dg(0) = 0$ e $Df(0) = (1, 0)$. Non vale quindi il teorema di derivazione di funzioni composte, dato che $D(g \circ f)(0) \neq Dg(f(0))Df(0)$.

Invece, la derivazione secondo Fréchet è un metodo regolare, mentre la quasi-differenziabilità lo è solo se ristretta alle funzioni continue (del resto, una funzione F-differenziabile è sempre anche continua, come si vede dall'equazione (1.4)). Come mostra l'esempio precedente, neanche se ci restringiamo alle funzioni di classe C^∞ la G-differenziabilità è regolare.

Proposizione 1.3. *Siano $f : U \subset X \to Y$, $g : V \subset Y \to Z$ mappe tra spazi di Banach, tali che $f(U) \subset V$, e supponiamo che f sia continua. Se f è quasi-differenziabile in $x_0 \in U$, e g è quasi-differenziabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è quasi-differenziabile in x_0 e vale*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg\left(f(x_0)\right)[Df(x_0)].$$

Dimostrazione. Sia $h : [-1,1] \to U$ una curva continua, tale che $h(0) = x_0$ e che esista $h'(0) \in X$. Allora $f \circ h : [-1,1] \to f(U) \subset V$ è a sua volta una curva continua, $f \circ h(0) = f(x)$ e vale

$$\lim_{t\to 0} \frac{f \circ h(t) - f \circ h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{tDf(x)h'(0)}{t} = Df(x)h'(0).$$

Quindi possiamo prendere $f \circ h$ come curva a valori in V che verifica le proprietà richieste nella definizione di quasi-differenziabilità per g, e otteniamo che

$$g(f \circ h(t)) = g(f(x)) + tDg(f(x))Df(x)h'(0) + o(t).$$

Ma questo vuol dire che $g \circ f$ è quasi-differenziabile, e vale la solita regola di derivazione di funzioni composte. $\square$

Proposizione 1.4. *Siano $f : U \subset X \to Y$, $g : V \subset Y \to Z$ mappe tra spazi di Banach, tali che $f(U) \subset V$. Se f è F-differenziabile in $x_0 \in U$, e g è F-differenziabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è F-differenziabile in x_0 e vale*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg\left(f(x_0)\right)[Df(x_0)].$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi segue che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)h + o(h),$$
$$g(y_0 + k) = g(y_0) + Dg(y_0)k + o(k);$$

allora, componendo

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + Df(x_0)h + o(h)) &= g(y_0 + \underbrace{Df(x_0)h + o(h)}_{k}) \\ &= g(y_0) + Dg(y_0)\,[Df(x_0)h + o(h)] + o(Df(x_0)h + o(h)) \\ = g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))Df(y_0)h + &\underbrace{\overbrace{Dg(y_0)o(h)}^{O(o(h))} + \overbrace{o\,(Df(x_0)h + o(h))}^{o(O(h))}}_{o(h)}; \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $o(O(h)) = O(o(h)) = o(h)$. □

Valgono inoltre una serie di proposizioni su "composizioni miste", oltre a quelle ovvie che si possono ottenere applicando la proposizione 1.1. Le dimostrazioni sono banali variazioni delle due precedenti, e quindi le omettiamo.

Proposizione 1.5. *Siano $f : U \subset X \to Y$, $g : V \subset Y \to Z$ mappe continue tra spazi di Banach, tali che $f(U) \subset V$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) Se f è G-differenziabile, e g è quasi-differenziabile, allora $g \circ f$ è G-differenziabile.

(ii) Se f è debolmente G-differenziabile, e g è quasi-differenziabile, allora $g \circ f$ è debolmente G-differenziabile.

Un caso particolare si ha quando si compone una funzione G-differenziabile con una segmento di retta.

Lemma 1.6. *Sia $f : U \subset X \to Y$ una mappa (debolmente) G-differenziabile in U. Sia $x_0 \in U$ e $h \in X$. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo che contiene 0 tale che, per ogni $t \in I$, $x_0 + th \in U$. La curva $\delta : I \to Y$ definita da*

$$\delta(t) = f(x_0 + th)$$

è (debolmente) differenziabile su tutto I e vale $\delta'(t) = Df(x_0 + th)[h]$.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso in cui f è G-differenziabile in senso forte.

$$\delta'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0 + t_0 h)}{t - t_0} =$$
$$\lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + t_0 h + sh) - f(x_0 + t_0 h)}{s} = Df(x_0 + t_0 h)[h].$$

Il caso in cui f è debolmente G-differenziabile è analogo, sostituendo al limite il limite debole. □

1.4 Differenziale di Gâteaux e norme

Se Y è uno spazio di Banach, allora l'applicazione $y \to \|y\|$ è convessa e continua, e dunque vale questo classico lemma dell'analisi convessa (si veda il Teorema 11 in [Roc74]).

Lemma 1.7. *Siano y e $z \in Y$. Allora, esiste un $y^* \in Y^*$ (dipendente sia da y che eventualmente da z) tale che $\|y^*\| = 1$, $\langle y^*,\, y \rangle = \|y\|$, ed inoltre*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|y + tz\| - \|y\|}{t} = \langle y^*,\, z \rangle\,. \tag{1.8}$$

Dal lemma precedente segue questo utile risultato.

Proposizione 1.8. *Sia $f : U \subset X \to Y$ G-differenziabile in U. Sia $x_0 \in U$, $h \in X$, e $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo contenente l'origine tale che, per ogni $t \in I$, $x_0 + th \in U$. Definiamo quindi $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ come*

$$g(t) = \|f(x_0 + th)\|\,.$$

Allora g è derivabile a destra su I, e per ogni $t \in I$ esiste un y^* tale che:

$$\begin{aligned} \|y^*\| &= 1, \\ \langle y^*,\, f(x_0 + th) \rangle &= \|f(x_0 + th)\|\,, \\ \lim_{s \to 0^+} \frac{g(t+s) - g(t)}{s} &= \langle y^*,\, Df(x_0 + th)h \rangle\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Nella definizione di g sostituiamo l'equazione (1.6):

$$g(t+s) = \|f(x_0 + th) + sDf(x_0 + th)h + o(s)\|\,.$$

Per il lemma 1.7 si ha che esiste un $y^* \in Y^*$ tale che

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{\|f(x_0 + th) + sDf(x_0 + th)h\| - \|f(x_0 + th)\|}{s} = \langle y^*,\, Df(x_0 + th)h \rangle\,,$$

dove $\|y^*\| = 1$, $\langle y^*,\, Df(x_0 + th) \rangle = \|Df(x_0 + th)h\|$ e y^* dipende da h e da t.

D'altra parte, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} \big|\|f(x_0 + th) + sDf(x_0 + th)h + o(s)\| - \|F(x_0 + th) + sDf(x_0 + th)h\|\big| \leqslant \\ \leqslant \|o(s)\| = o(s), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0^+} & \frac{g(t+s) - g(t)}{s} = \\ &= \lim_{s \to 0^+} \frac{\|f(x_0 + th) + sDf(x_0 + th)h\| - \|f(x_0 + th)\|}{s} = \\ &= \langle y^*,\, Df(x_0 + th)h \rangle\,. \end{aligned}$$

□

1.5 Generalizzazione del teorema del valor medio

Uno degli strumenti tecnici più utili che ci servirà in seguito, è una generalizzazione del teorema del valor medio. Nel contesto degli spazi di Banach, non esiste un equivalente esatto del teorema del valor medio classico. Già nel caso di una mappa $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, in generale non c'è motivo per cui esista un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.

Esempio 1.5. Consideriamo infatti la funzione $f(t) = e^{it}$ vista come mappa in da $[0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}^2$. Allora abbiamo che

$$f(b) - f(a) = 0 \neq 2\pi f'(\xi) = 2\pi i e^{i\xi}.$$

Per generalizzare l'enunciato valido in dimensione 1, è necessario modificare leggermente la tesi. Accettando un indebolimento della tesi è possibile

1. prendere codominio uno spazio di Banach;
2. sostituire la differenziabilità con la differenziabilità debole;
3. prendere dominio di dimensione maggiore di 1, eventualmente infinita, purché sia convesso.

Vediamo come.

Teorema 1.9 (Valor medio). *Sia $\varphi : [a, b] \to Y$ una mappa continua definita su un intervallo, con Y uno spazio di Banach. Se φ è debolmente differenziabile in $]a, b[$, allora vale*

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leqslant \sup_{a<t<b} \|\varphi'(t)\| (b - a). \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Sia $v \in Y^*$ e consideriamo la mappa da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ data da

$$[a, b] \ni t \longmapsto \langle v, \varphi(t) \rangle \in \mathbb{R}.$$

Per le ipotesi di debole differenziabilità, tale mappa è continua e differenziabile su $]a, b[$. Allora, per il teorema noto in dimensione 1, si ha, per un opportuno $\xi \in]a, b[$ (dipendente da v)

$$|\langle v, \varphi(b) - \varphi(a) \rangle| = (b - a) |\langle v, \varphi'(\xi) \rangle|$$
$$\leqslant (b - a) \sup_{a<t<b} \langle v, \varphi'(\xi) \rangle \leqslant (b - a) \|v\| \sup_{a<t<b} \|\varphi'(t)\| .$$

Applichiamo ora un corollario del Teorema di Hahn-Banach.

$$\|y\|_Y = \sup_{\substack{v \in Y^* \\ \|v\|=1}} |\langle v, y \rangle| ,$$

e quindi otteniamo:

$$\|\varphi(b)-\varphi(a)\|_Y = \sup_{\substack{v\in Y^*\\ \|v\|=1}} |\langle v,\, \varphi(b)-\varphi(a)\,\rangle| \leqslant$$

$$\sup_{\substack{v\in Y^*\\ \|v\|=1}} (b-a)\underbrace{\|v\|}_{1} \sup_{a<t<b} \|\varphi'(t)\| = (b-a)\sup_{a<t<b}\|\varphi'(t)\|\,.$$

□

Corollario 1.10. *Sia U un aperto convesso di uno spazio di Banach X, e supponiamo che $f : U \to Y$ sia continua e debolmente G-differenziabile in U. Allora, se indichiamo con*

$$]x,y[= \{x+t(y-x) \mid t\in(0,1)\} \subset U,$$

si ha che, per ogni x, $y\in U$

$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \sup_{\xi\in]x,y[} \|Df(\xi)\|\,\|x-y\|\,.$$

In particolare quindi vale

$$\forall x,y\in U \quad \|f(x)-f(y)\| \leqslant \sup_{\xi\in U}\|Df(\xi)\|\,\|x-y\|\,; \tag{1.11}$$

e dunque, se $\|Df(x)\|\leqslant K<+\infty$ per ogni x in U, allora f è K-lipschitziana.

Dimostrazione. Fissiamo $x,y\in U$. Allora per la convessità di U, $]x,y[$ è contenuto in U, e di conseguenza possiamo definire

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [0,1] & \longrightarrow & Y, \\ & t & \longmapsto & f\left(x+t(y-x)\right). \end{array}$$

Per il lemma 1.6 φ è debolmente differenziabile, e quindi possiamo applicare il teorema del valor medio (teo 1.9) e otteniamo

$$\|f(x)-f(y)\| = \|\varphi(0)-\varphi(1)\| \leqslant \sup_{0<t<1}\|\varphi'(t)\| =$$

$$\sup_{0<t<1}\|Df(x+t(y-x))[y-x]\| \leqslant \sup_{\xi\in]x,y[}\|Df(\xi)\|\,\|x-y\|\,.$$

□

Sotto le ipotesi di continuità e debole G-differenziabilità, la condizione che la norma del differenziale sia limitata in realtà non è strettamente più forte della lipschitzianità:

Proposizione 1.11. *Se $f : U \subset X \to Y$ è continua, lipschitziana di costante K e debolmente G-differenziabile su U, allora* $\sup_{\xi \in U} \|Df(\xi)\| \leqslant K$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in U$ e indichiamo con L il differenziale $Df(x_0)$. Sia $u \in X$ tale che $\|u\| = 1$: per la debole G-differenziabilità, si ha che

$$f(x_0 + tu) - f(x_0) = tLu + w\text{-}o(t).$$

Sia $y^* \in Y^*$, tale che $\|y^*\| = 1$ e $\langle y^*, Lu \rangle = \|Lu\|$. Fissiamo un $\delta \in (0, 1)$ e scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che

$$|\langle y^*, tLu + w\text{-}o(t) \rangle| \geqslant |\langle y^*, tLu \rangle| = (1 - \delta) |t| \|Lu\|, \quad \text{se } |t| < \varepsilon.$$

D'altra parte, se indichiamo con K la costante di Lipschitz di f,

$$|\langle y^*, f(x_0 + tu) - f(x_0) \rangle| \leqslant \|y^*\| \|f(x_0 + tu) - f(x_0)\| \leqslant K |t|;$$

dunque

$$(1 - \delta) |t| \|Lu\| \leqslant K |t|, \quad \text{se } |t| < \varepsilon.$$

Di conseguenza

$$(1 - \delta) \|Lu\| \leqslant K;$$

per l'arbitrarietà di δ, deve essere $\|Lu\| \leqslant K$, e quindi

$$\|L\| \leqslant K.$$

Ma anche x_0 era un punto scelto arbitrariamente, e quindi abbiamo dimostrato che

$$\sup_{\xi \in U} \|Df(\xi)\| \leqslant K.$$

□

1.6 Continuità del differenziale

Ci poniamo ora il problema di individuare sotto quali ipotesi e condizioni le implicazioni della proposizione 1.1 possano essere rovesciate. Iniziamo ripetendo un'osservazione già fatta precedentemente, riguardante il caso il cui la funzione da differenziare abbia valori in uno spazio di dimensione finita, dove quindi la topologia di spazio vettoriale è unica.

Osservazione 1.2. Sia $f : U \to Y$ una funzione debolmente G-differenziabile in $x_0 \in U$. Se $\dim Y < \infty$, allora f è G-differenziabile in x_0.

Il seguente risultato è nuovamente una generalizzazione del calcolo differenziale in dimensione finita: se f è una funzione debolmente G-differenziabile in una aperto, ed il differenziale varia con continuità, allora si ha la F-differenziabilità.

Teorema 1.12. *Sia $f : U \to Y$ una mappa debolmente G-differenziabile su tutto U, e supponiamo che l'applicazione*

$$\begin{aligned} Df : \ U &\longrightarrow L(X,Y), \\ x &\longmapsto Df(x). \end{aligned}$$

sia continua in $x_0 \in U$, allora f è F-differenziabile in x_0 (e quindi i differenziali coincidono).

Dimostrazione. Sia $h \in X$, e consideriamo l'applicazione $\varphi : \mathbb{R} \to Y$ definita da

$$\varphi(t) = f(x_0 + th) - tDf(x_0)h.$$

Per il lemma 1.6, φ è debolmente G-differenziabile in un intorno di 0 e vale

$$\varphi'(t) = \left(Df(x_0 + th) - Df(x_0)\right) h.$$

applicando il teorema 1.9 segue che

$$\begin{aligned} &\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leqslant \\ &\quad \sup_{0<t<1} \|\varphi'(t)\| \leqslant \sup_{0<t<1} \|Df(x_0 + th) - Df(x_0)\| \, \|h\| = o(\|h\|) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{per } h \to 0). \end{aligned}$$

□

Possiamo finalmente dare una definizione di cosa si intenda per mappe di classe C^1: abbiamo evitato fino ad ora di farlo perché alla luce del teorema 1.12, non c'è motivo per dare definizioni diverse per i vari differenziali che abbiamo definito.

Definizione 1.5. Sia $f : U \to Y$ una mappa continua e F-differenziabile in U. f si dice *di classe* C^1 se il differenziale, inteso come mappa $U \to L(X,Y)$, è continuo in ogni punto di U.

Indicheremo lo spazio vettoriale delle funzioni C^1 definite su U e a valori in Y con il simbolo $C^1(U,Y)$.

Nella definizione 1.5, abbiamo specificato che la continuità del differenziale è intesa come continuità come mappa a valori in $L(X,Y)$. Questa non è l'unica possibilità: avremmo potuto richiedere che il differenziale fosse continuo come mappa del tipo

$$\begin{array}{rccc} Df: & U \times X & \longrightarrow & Y, \\ & (x,h) & \longmapsto & Df(x)[h]. \end{array}$$

Questa richiesta è più debole della precedente, ma ci permette ugualmente di ottenere interessanti risultati, per cui merita un nome.

Definizione 1.6. Sia $f : U \to Y$ una mappa continua e debolmente G-differenziabile in U. f si dice *di classe* C^1_q se il differenziale, inteso come mappa $U \times X \to Y$, è continuo in ogni punto di U.

Indicheremo lo spazio vettoriale delle funzioni C^1_q definite su U e a valori in Y con il simbolo $C^1_q(U, Y)$.[1]

Vogliamo mostrare che una funzione di classe C^1_q è in effetti non solo debolmente G-differenziabile, ma quasi-differenziabile (e che quindi avremmo potuto scegliere la quasi-differenziabilità nella definizione di C^1_q). Ma prima, ci serve un utile strumento tecnico.

Lemma 1.13. *Sia $f : [a, b] \to X$ una funzione continua. Allora esiste un unico elemento $I(f) \in X$ che verifica:*

i) per ogni $\varphi \in X^*$, $\varphi(I(f)) = \int_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t$,

ii) $\|I(f)\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$,

iii) I è lineare in f,

iv) se indichiamo con $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := I(f)$, si ha che

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dunque, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ è l'*integrale di Riemann* a valori in X. È possibile definire direttamente l'integrale come limite delle somme parziali ([Ham82]), oppure utilizzare un concetto più forte di integrale, analogo all'integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$, ovvero l'integrale di Bochner ([Yos80], sezione V.5). In ogni caso, non ci servirà mai di integrare funzioni al di fuori delle curve continue a supporto compatto.

Possiamo enunciare un analogo del teorema fondamentale del calcolo integrale.

[1] Questa definizione di cotinua differenziabilità è quella usualmente data in contesti più generali degli spazi di Banach, per esempio gli spazi di Fréchet, dove la topologia di $L(X, Y)$ non è dello stesso tipo di quella degli spazi X e Y.

Teorema 1.14. *Sia $f : [a,b] \to X$ una curva C^1_q. Allora vale*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in X^*$. Allora per ipotesi, $\varphi \circ f$ è di classe C^1, e inoltre vale $(\varphi \circ f)' = \varphi \circ f'$. Allora, dal teorema fondamentale del calcolo integrale nel caso reale, si ha che

$$\varphi(f(b) - f(a)) = \int_a^b \varphi(f'(t))\,\mathrm{d}t = \varphi\left(\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Ma dal momento che φ era un arbitrario elemento di X^*, per il teorema di Hahn-Banach si ha che

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Corollario 1.15. *Sia $f : U \subset X \to Y$ di classe C^1_q, Se $]x,y[\subset U$, si ha che*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y-x))[y-x]\,\mathrm{d}t.$$

Dimostrazione. Sia $\delta(t) = f(x + t(y-x))$. Per il lemma 1.6, δ è di classe C^1_q. Possiamo quindi applicare il teorema 1.14 e otteniamo la tesi. □

Come conseguenza del teorema appena enunciato, abbiamo che effettivamente le mappe di classe C^1_q sono quasi-differenziabili.

Teorema 1.16. *Sia $f : U \subset X \to Y$. Se f è di classe C^1_q, allora f è quasi-differenziabile su U.*

Dimostrazione. Sia $g : [-1,1] \to U$ una curva continua e differenziabile in 0. Allora, per il corollario 1.15 del teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che

$$\frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t} = \int_0^1 Df\big(g(t) - s(g(t) - g(0))\big)\left[\frac{g(t) - g(0)}{t}\right]\mathrm{d}s.$$

Sia $\gamma(t,s) = g(t) - s(g(t) - g(0))$. Per continuità si ha che, per ogni $s \in [0,1]$,

$$\gamma(t,s) \to g(0)$$

per t che tende a 0, mentre abbiamo per ipotesi che

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \to g'(0) \quad \text{per } t \to 0.$$

Dal momento che f è di classe C^1_q, la funzione

$$(t,s) \to \eta(t,s) := Df(\gamma(t,s)) \left[\frac{g(t) - g(0)}{t} \right] \in Y$$

è continua, perché composizione di funzioni continue.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste quindi un $\delta > 0$ tale che

$$\|\eta(t,s) - \eta(0,s)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, |t| < \delta, \forall s \in [0,1].$$

Dunque si ha, per le proprietà dell'integrale, che

$$\left\| \int_0^1 \eta(t,s) - \eta(0,s)\, \mathrm{d}s \right\| \leqslant \int_0^1 \|\eta(t,s) - \eta(0,s)\|\, \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon \quad \forall\, |t| < \delta,$$

e che quindi la funzione

$$t \to \int_0^1 \eta(t,s)\, \mathrm{d}s,$$

è continua in 0. Possiamo quindi calcolarne il limite, e passare l'operazione di limite sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t} = \int_0^1 \lim_{t\to 0} Df(\gamma(t,s)) \left[\frac{g(t) - g(0)}{t} \right] \mathrm{d}s = Df(g(0))[g'(0)].$$

□

1.7 (Altre) relazioni tra le diverse definizioni di differenziabilità

Mostriamo ora come, se f è una mappa G-differenziabile che è anche lipschitziana (per esempio, perché è differenziabile in un aperto con differenziale limitato, vedi 1.10), allora f è quasi-differenziabile.

Proposizione 1.17. *Sia $f : U \to Y$ una mappa G-differenziabile in x_0 e lipschitziana. Allora f è quasi differenziabile in x_0.*

Dimostrazione. Sia $g : [-1, 1] \to X$ una curva continua, con $g(0) = x_0$ e derivabile in 0. Sia K la costante di Lipschitz di f, e $L = Df(x_0)$, e $u = g'(0)$. Allora si ha che

$$\begin{aligned}\|f(g(t)) - f(x_0) - tDf(x_0)g'(0)\| &\leqslant \\ \|f(g(t)) - f(x_0 + tu)\| + \|f(x_0 + tu) - f(x_0) - tLu\| &\leqslant \\ K\,\|g(t) - g(0) + tg'(0)\| + \|f(x_0 + tu) - f(x_0) - tLu\| &= o(t).\end{aligned}$$

□

Come ultimo risultato, mostriamo che nel caso in cui il dominio di una funzione abbia dimensione finita, la quasi-differenziabilità implichi la F-differenziabilità.

Proposizione 1.18. *Sia $f : U \subset X \to Y$ una mappa quasi-differenziabile in x_0, con $\dim X < \infty$. Allora f è F-differenziabile in x_0.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che

$$\|f(x_0 + u) - f(x_0) - Df(x_0)u\| = o(\|u\|).$$

Supponiamo per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ ed una successione $(u_n) \subset X$ che converge a 0 e tale che

$$\|f(x_0 + u_n) - f(x_0) - Df(x_0)u_n\| > \varepsilon\,\|u_n\|\,.$$

A meno di passare a sotto-successioni, possiamo supporre che $\|u_n\|$ sia strettamente decrescente. Indichiamo con

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|} \in S_X.$$

Dal momento che X ha dimensione finita, S_X è compatto, e quindi possiamo estrarre da (v_n) una sotto-successione (v_{n_k}) che converge a $v \in S_X$. Per i corrispondenti valori degli indici, possiamo estrarre una sotto-successione (u_{n_k}) da (u_n). Per semplicità di notazione, rinomineremo tutte e due le sotto-successioni (v_n) e (u_n). Indichiamo con $\alpha_n = \|u_n\|$.

Definiamo quindi una curva continua $g : [-1, 1] \to X$ nel seguente modo: $g(\pm\alpha_n) = x_0 \pm u_n$, ed inoltre g è affine su $[\alpha_{n+1}, \alpha_n]$ e su $[-\alpha_n, -\alpha_{n+1}]$. Per continuità, si ha che $g(0) = x_0$, ed inoltre che

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\|u_n\|} = v.$$

Per la quasi-differenziabilità di f si ha che

$$f(g(t)) - f(x_0) - tDf(x_0)g'(0) = o(t),$$

e quindi in particolare

$$\|f(x_0 + u_n) - f(x_0) - \alpha_n Df(x_0)g'(0)\| < \frac{\varepsilon}{2}\alpha_n \text{ definitivamente.}$$

Abbiamo ottenuto un assurdo: infatti

$$\begin{aligned}
\varepsilon \|u_n\| &< \|f(x_0 + un) - f(x_0) - tDf(x_0)u_n\| \leqslant \\
&\leqslant \|f(x_0 + u_n) - f(x_0) - \alpha_n Df(x_0)v\| + \|Df(x_0)\| \|\alpha_n v - u_n\| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\alpha_n + \|Df(x_0)\| \|\alpha_n v - u_n\| \Rightarrow \\
\Rightarrow \varepsilon &< \frac{\varepsilon}{2} + \|Df(x_0)\| \left\| v - \frac{u_n}{\alpha_n} \right\| = \frac{\varepsilon}{2} + o(n).
\end{aligned}$$

□

Esempio 1.6. Le ipotesi del teorema 1.12 sono sufficienti, ma non necessarie, come mostra il seguente esempio.

Sia $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che, per ogni $u \in \mathbb{R}$, con $u \neq 0$, si ha che

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{f_2(x + tu) - f_2(x)}{t} &= \\
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[(x + tu)^2 \cos(1/(x + tu)) \right] |_{t=0}& \\
&= (2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x))\, u,
\end{aligned}$$

Dunque f_2 è G-differenziabile su tutto il suo dominio, e vale

$$Df_2(x) = 2x \cos(1/x) + \operatorname{sen}(1/x).$$

$Df_2(x)$ non è continua per $x \to 0$ ($\operatorname{sen}(1/x)$ oscilla senza convergere), ma $\|Df_2(x)\| \leqslant 2|x| + 1$. Dunque f_2 è localmente lipschitziana in un intorno di 0, e quindi per le proposizioni 1.17 e 1.18 è F-differenziabile, anche se non verifica le ipotesi del teorema 1.12.

Concludiamo questa sezione con uno schema riassuntivo delle quattro definizioni di differenziale date, e delle relazioni tra queste. Data una mappa $f : U \subset X \to Y$, valgono le relazioni indicate in figura 1.3.

$$
\begin{tikzcd}
\text{F-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{quasi-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[u, bend right, "\dim X<\infty"'] \\
\text{G-diff.} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[u, bend right, "f \text{ lipschitz}"'] \\
\text{debole G-diff.} \arrow[u, bend right, "\dim Y<\infty"'] \arrow[uuu, bend left, "Df \text{ continuo da } U \text{ in } L(X,Y)"] \arrow[uu, bend left, "Df \text{ continuo da } U\times X \text{ in } Y"]
\end{tikzcd}
$$

Figura 1.3: Relazioni tra le diverse definizioni di differenziale.

Capitolo 2

Operatori di Nemitski e di Hammerstein

Presentiamo una classe di operatori nonlineari tra spazi funzionali, il cui uso deriva da equazioni integrali, dette equazioni di Hammerstein ([AVZ96]), della forma

$$u(x) = \int_\Omega k(x,t) f(t, u(t))\,\mathrm{d}t; \tag{2.1}$$

dove Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vedremo come trasformare l'equazione (2.1) in un problema di funzione implicita, che quindi potremo affrontare con gli strumenti presentati in seguito.

Iniziamo con una definizione che ci servirà più volte in questo capitolo:

Definizione 2.1. Una funzione $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una *funzione di Carathéodory* se soddisfa:

(i) $t \to f(t,u)$ è misurabile per ogni $u \in \mathbb{R}$,

(ii) $u \to f(t,u)$ è continua per quasi ogni $t \in \Omega$.

Osserviamo immediatamente che se $f(t,u)$ è una funzione di Carathéodory, e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è un'applicazione misurabile, allora $t \to f(t,u(t))$ è misurabile. Infatti ciò è evidente per le funzioni semplici, e se χ_n è una successione di funzioni semplici che tendono a u quasi ovunque in Ω, allora le condizioni di 2.1 sono esattamente quelle che assicurano che $f(t,\chi_n(t)) \to f(t,u(t))$ per quasi ogni $t \in \Omega$.

Presentiamo ora una serie di operatori non lineari, che ci permetteranno di trasformare l'equazione (2.1) in un problema di funzione implicita. Una trattazione completa degli operatori seguenti si può trovare in [KZPS76].

Nel seguito, dato $p \geqslant 1$, indicheremo con $L^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ p-integrabili secondo Lebesgue, e con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ essenzialmente limitate (rispetto alla misura di Lebesgue). Con le norme usuali, tali spazi sono spazi di Banach. Quando non ci sarà ambiguità, scriveremo L^p al posto di $L^p(\Omega)$.

2.1 Operatori di moltiplicazione

Ricordiamo che, per la disuguaglianza di Hölder, che se $u \in L^p$ e $v \in L^q$, allora la funzione $u \cdot v$ appartiene a L^r, dove r è definito da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Questo ci permette di definire, per ogni $u \in L^p$, un'applicazione lineare

$$\begin{array}{rccc} M_u : & L^q & \longrightarrow & L^r, \\ & v(x) & \longmapsto & u(x)v(x). \end{array} \tag{2.2}$$

Per la disuguaglianza di Hölder, si ha che $\|M_u v\|_r \leqslant \|u\|_p \|v\|_q$, e quindi M_u è continua e ha norma esattamente $\|M_u\| = \|u\|_p$. Infatti, se $u \in L^p$ e $u \geqslant 0$, allora $u^{p/q} \in L^q$, e $u \cdot u^{p/q} = u^{p/r} \in L^r$. Ma allora $\left\|u^{p/r}\right\|_r = \|u\|_p \left\|u^{p/q}\right\|_q$.

Guardando tale costruzione da un punto di vista più astratto, si osserva che abbiamo in realtà definito una applicazione del tipo

$$\begin{array}{rccc} M : & L^p & \longrightarrow & L\left(L^q, L^r\right), \\ & u & \longmapsto & M_u. \end{array} \tag{2.3}$$

M è nuovamente lineare e continua, e anzi è un'isometria lineare.

Chiameremo un operatore lineare della forma (2.2) un *operatore di moltiplicazione.*

Dal momento che ci saranno utili in seguito, studiamo rapidamente le proprietà degli operatori di moltiplicazione.

Teorema 2.1. *Sia $u \in L^p$, e $M_u : L^q \to L^r$ un operatore di moltiplicazione. Allora valgono i seguenti fatti*

(i) M_u è iniettivo se e solo se $u(x) \neq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$,

(ii) M_u è surgettivo se e solo se $u(x) \neq 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$, $\frac{1}{u} \in L^\infty$, $p = \infty$ e quindi $q = r$.

In particolare, M_u è surgettivo se e solo se è invertibile se e solo se sia u che $1/u$ appartengono a L^∞.

Dimostrazione.

(i) Indichiamo con $\operatorname{supp-ess} u$ il supporto essenziale di $u(x)$, ovvero l'insieme, definito a meno di insiemi di misura nulla,

$$\operatorname{supp-ess} u = \bigcap \{\Omega \setminus U \,|\, U \subset \Omega \text{ aperto}, \; u|_U = 0 \text{ q.o. }\}\,.$$

Sia $E = \Omega \setminus \operatorname{supp-ess} u$, e indichiamo con $\chi_E(x)$ la funzione caratteristica di E. Se E ha misura positiva, allora χ_E come funzione di L^q è diversa da zero, ma si ha che $u(x)\chi_E(x) = 0$ per quasi ogni $x \in \Omega$, e quindi M_u non è iniettiva. Viceversa, se esiste una funzione $v(x) \in L^q \setminus \{0\}$, tale che

$$u(x)v(x) = 0 \quad \text{quasi ovunque,}$$

si ha che $\operatorname{supp-ess} u \cap \operatorname{supp-ess} v$ ha misura nulla. Ma dal momento che $\operatorname{supp-ess} v$ ha misura positiva, $\operatorname{supp-ess} u$ non può essere tutto Ω, e quindi $u(x)$ è zero su un insieme di misura positiva.

(ii) Se M_u è surgettivo, allora la funzione $\chi_\Omega(x)$ appartiene all'immagine di M_u. Esiste dunque un $v(x) \in L^q$ tale che

$$u(x)v(x) = 1 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega.$$

Dunque, deve essere che $u(x) \neq 0$ quasi ovunque. Per il punto precedente, si ha che Mu è anche iniettivo, e quindi per il teorema della mappa aperta è un operatore invertibile e la sua inversa è data da

$$(Mu)^{-1} = M(u^{-1}) : L^r \to L^q.$$

Ma L^q e L^r sono isomorfi se e solo se $r = q$, e quindi $p = \infty$.

Se per assurdo $1/u \notin L^\infty$, allora per ogni $K > 0$ esisterebbe un insieme di misura positiva E tale che

$$\frac{1}{u(x)} > K \quad \text{q. o. } x \in E;$$

e quindi si avrebbe che, per ogni $w \in L^2$ con supporto essenziale contenuto in E

$$\|uw\|_q \leqslant \frac{\|w\|_q}{K},$$

il che è assurdo, dato che per l'invertibilità di Mu si ha che esiste un $\delta > 0$ che verifica

$$\|uw\|_q \geqslant \delta \|w\|_q \quad \forall w \in L^q.$$

Il viceversa è immediato.

□

2.2 Operatori di Nemitski

Data una funzione $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, e tale che f sia una funzione di Carathéodory, possiamo definire:

$$T_f u(x) = f(x, u(x)). \tag{2.4}$$

L'operatore così definito è detto *operatore di Nemitski* o *operatore di sovrapposizione*. Esistono condizioni molto semplici per la continuità di T_f tra gli spazi L^p, presentate per esempio in [AP95].

Teorema 2.2. *Supponiamo che esistano p, q, con $1 \leqslant p,\ q < \infty$, una costante $b > 0$, e $a(x) \in L^q$, tali che*

$$|f(x,s)| \leqslant a(x) + b\,|s|^{\frac{p}{q}} \quad \textit{per q.o } x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Allora l'operatore di Nemitski T_f è un'applicazione continua tra L^p e L^q.

Dimostrazione. Dall'equazione (2.5) segue che se $u(x) \in L^p$, allora $f(x, u(x)) \in L^q$.

Per mostrare la continuità, supponiamo che $(u_n) \subset L^p$ sia una successione che tende a $u \in L^p$:

$$\|u_n - u\|_p \to 0.$$

Allora, per il Teorema di Lebesgue Inverso (cfr. [Bre83]), esiste una sottosuccessione (che indicheremo nuovamente con u_n) che converge puntualmente quasi ovunque a u, ed è dominata da una funzione $g \in L^p$. Per le ipotesi di Carathéodory su f, si ha che

$$f(x, u_n(x)) \to f(x, u(x)) \quad \text{q.o. in } \Omega;$$

ed inoltre $f(x, u_n(x))$ è dominata da $a(x) + b\,|g(x)|^{\frac{p}{q}} \in L^q$. Quindi, per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue, si ha che $f(x, u_n(x))$ tende a $f(x, u(x))$ anche in norma L^q. □

Osserviamo che, nel caso $q = \infty$, una funzione che verifichi

$$|f(x,s)| \leqslant a(x) \in L^\infty$$

non definisce necessariamente un operatore di Nemitski $T_f : L^p \to L^\infty$ continuo, come ci mostra questo controesempio:

Esempio 2.1. Sia
$$f(x,s) = \mathrm{sen}(s).$$
f è una funzione di Carathéodory, ed inoltre $|f(x,s)| \leqslant 1$. Dunque è ben definita
$$T_f : L^2(0,1) \to L^\infty(0,1),$$
ma T_f non è continua: consideriamo infatti la successione
$$u_n(x) = \frac{\pi}{2}\chi_{[0,1/n^2]}(x).$$
Allora $\mathrm{sen}(u_n(x)) = \chi_{[0,1/n^2]}(x)$, $\|u_n\|_2 = 1/n$. Quindi $u_n \xrightarrow{L^2} 0$, ma
$$\|f(u_n(x)) - f(0)\|_\infty = \left\|\chi_{[0,1/n^2]}(x)\right\|_\infty = 1,$$
e quindi $T_f(u_n) \not\to T_f(0) = 0$ in L^∞.

Possiamo anzi enunciare un risultato molto più generale, analogo ad un risultato presente in [AP95] (ma riferito agli operatori di Nemitski differenziabili), del quale ci occuperemo in seguito.

Teorema 2.3. *Sia $f(x,s)$ una funzione di Carathéodory, e supponiamo che esista una costante K tale che*
$$|f(x,s)| \leqslant K < \infty. \tag{2.6}$$
Allora $T_f : L^p \to L^\infty$ è ben definito. Se inoltre esiste un $\bar{u} \in L^p$ tale che T_f è continuo in $\bar{u}$, allora vale
$$f(x,s) = a(x)\ \forall s \in \mathbb{R},$$
per una opportuna funzione $a(x) \in L^\infty$, e quindi T_f è un operatore costante.

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $\bar{u} = 0$ e che $f(x,0) \equiv 0$.

Sia ω_n la misura della palla unitaria n-dimensionale, con $n = \dim\Omega$, e fissati un $x_0 \in \Omega$ e un $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo, per ogni $\delta > 0$,
$$v_\delta(x) = \lambda\chi_{B(x_0,\delta)}(x),$$
di maniera che
$$\|v_\delta(x)\|_p = |\lambda|\left(\omega_n\delta^n\right)^{1/p} \to 0 \quad \text{per } \delta \to 0.$$

Dunque, per la continuità di T_f in $\bar{u} = 0$, si ha che $T_f(v_\delta) \to 0$ in L^∞. Osserviamo che
$$T_f(v_\delta)(x) = \chi_{B(x_0,\delta)}(x)f(x,\lambda),$$

e che quindi

$$\|T_f(v_\delta)\|_\infty = \sup_{x\in B(x_0,\delta)} |f(x,\lambda)| \to 0 \quad \text{per } \delta \to 0.$$

Ma allora si ha che

$$|f(x_0,\lambda)| \leqslant \sup_{x\in B(x_0,\delta)} |f(x,\lambda)| \to 0 \quad \text{per } \delta \to 0,$$

e quindi $f(x_0,\lambda) = 0$. Per l'arbitrarietà di x_0 e di λ, deve essere

$$f(x,s) \equiv 0.$$

Se $\bar{u} \neq 0$ e $f(x,0) \not\equiv 0$, definiamo una nuova funzione $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come segue

$$g(x,s) = f(x, s + \bar{u}(x)) - f(x, \bar{u}(x)).$$

g è di Carathéodory, limitata, T_g è continua in 0, ed inoltre $g(x,0) \equiv 0$. Quindi, per quanto appena dimostrato, $g(x,s) = 0$ e quindi

$$f(x, s + \bar{u}(x)) = f(x, \bar{u}(x)).$$

Se indichiamo con $a(x) = f(x, \bar{u}(x)) \in L^\infty$, allora si ha che

$$f(x,s) = f(x, (s - \bar{u}(x)) + \bar{u}(x)) = f(x, \bar{u}(x)) = a(x).$$

□

Se supponiamo che esista la derivata parziale $f_s = \partial f/\partial s$, e che $f_s : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia a sua volta una funzione di Carathéodory, possiamo definire un nuovo operatore di Nemitski:

$$T_{f_s} u(x) = f_s(x, u(x)).$$

In tal caso, siano $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, e supponiamo come ulteriore ipotesi che esistano $a > 0$, $b > 0$ tali che

$$|f_s(x,s)| \leqslant a + b\,|s|^{\frac{p}{r}} \ \text{ con } r = \frac{pq}{p-q}. \tag{2.7}$$

Allora T_{f_s} è una applicazione da L^p e L^r. Componendo con l'operatore M definito da (2.3), otteniamo che è ben definita

$$MT_{f_s} : L^p \to L(L^p, L^q).$$

Se inoltre $r < \infty$, per il teorema 2.2 si ha che T_{f_s} è continuo tra L^p e L^r, e quindi anche MT_{f_s} è continuo. Se invece $r = \infty$, per il teorema 2.3 si ha che T_{f_s} (e quindi MT_{f_s}) è continuo se e solo se è costante.

Sotto queste ipotesi, è legittimo aspettarsi un qualche risultato sulla differenziabilità dell'operatore T_f.

Teorema 2.4. *Sia $f : \Omega \times \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, con derivata parziale $f_s = \partial f / \partial s$ che sia a sua volta di Carathéodory. Siano $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, e supponiamo che f_s verifichi* (2.7)*. Allora, l'operatore*

$$T_f : L^p \to L^q$$

è continuo e G-differenziabile su tutto L^p e vale

$$DT_f(u) = MT_{f_s}(u) \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Integrando la disuguaglianza (2.7), otteniamo che per $f(x,s)$ vale

$$|f(x,s)| \leqslant c + d\,|s|^{\frac{p}{q}} ,$$

e quindi per il teorema 2.2 T_f è effettivamente continuo tra L^p e L^q.

Fissiamo u e v due funzioni di L^p, consideriamo

$$\|T_f(u+tv) - T_f(u) - tT_{f_s}(u)v\|_q .$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale applicato $f(x,s)$, si ha che

$$f(x,u(x)+tv(x)) - f(x,u(x)) = \int_0^1 f_s\left(x, u(x) + \xi t v(x)\right) v(x)\,\mathrm{d}\xi$$

e quindi

$$\begin{aligned} f(x,u(x)+tv(x)) - f(x,u(x)) - tf_s(x,u(x))v(x) &= \\ = v(x) \int_0^1 f_s(x,u(x)+\xi t v(x)) - f_s(x,u(x))\,\mathrm{d}\xi &= v(x) w_t(x). \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Hölder si ha che

$$\begin{aligned} &\|T_f(u+tv) - T_f(u) - tT_{f_s}(u)v\|_q^q = \\ &\quad = \int_\Omega |f(x,u(x)+tv(x)) - f(x,u(x)) - tf_s(x,u(x))v(x)|^q \,\mathrm{d}x = \\ &\quad = \int_\Omega |v(x)w_t(x)|^q \,\mathrm{d}x \leqslant \\ &\quad \leqslant \left(\int_\Omega |v(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |w_t(x)|^r \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{r}} = \|v\|_p^q \, \|w_t\|_r^q . \end{aligned}$$

Non ci resta quindi che dimostrare che $w_t \to 0$ in L^r, per $t \to 0$. Ma se t tende a zero, allora $v_t(x) = t\xi v(x)$ tende a zero puntualmente per quasi ogni $x \in \Omega$, e per la proprietà di Carathéodory

$$g_t(\xi, x) = f_s(x, u(x) + t\xi v(x)) - f_s(x, u(x)) \xrightarrow{t\to 0} 0 \quad \text{q.o. } x \in \Omega.$$

Ma per ipotesi,

$$|g_t(\xi, x)| \leqslant 2a + 2\,|u(x)|^{\frac{p}{r}} + |t|\,|v(x)|^{\frac{p}{r}} \in L^r(\Omega),$$

e quindi, per il teorema di Convergenza Dominata di Lebesgue

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 g_t(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 \lim_{t\to 0} g_t(\xi, x)\,\mathrm{d}\xi = 0,$$

e la convergenza è in L^r. □

In realtà, vale un risultato molto più forte del precedente.

Corollario 2.5. *Sia f come nel teorema 2.4. Allora valgono i seguenti fatti:*

(i) se $p > q$, allora T_f è F-differenziabile,

(ii) se $p = q$, allora T_f è quasi-differenziabile,

(iii) se $p = q$ e T_f è F-differenziabile in un punto, allora T_f è affine, ovvero esistono $a(x), b(x) \in L^p$ tale che

$$f(x, s) = a(x)s + b(x).$$

Dimostrazione.

(i) per il teorema 2.2, T_{f_s} è continua e quindi, come già osservato,

$$DT_f = MT_{f_s} : L^p \to L(L^p, L^q)$$

è continuo. Ma per il teorema 1.12 questo implica che T_f sia F-differenziabile.

(ii) fissato $u \in L^p$, si ha che

$$\sup_{v\in B(u,1)} \|DT_f(v)\| = \sup_{v\in B(u,1)} \|MT_{f_s}(v)\| \leqslant \sup_{v\in B(u,1)} K\,\|v\|_2 \leqslant K$$

e quindi (per il teorema 1.9) T_f è localmente lipschitziana in ogni punto di L^q. Ma per la proposizione 1.17, questo implica che T_f è quasi-differenziabile.

(iii) Supponiamo inizialmente che T_f sia F-differenziabile in 0, e che $f(x,0) = 0$. Sia ω_n la misura della palla unitaria n-dimensionale, con $n = \dim \Omega$. Fissiamo un $x_0 \in \Omega$ ed un $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo per ogni $\delta > 0$

$$v_\delta(x) = \lambda \chi_{B(x_0,\delta)}(x).$$

Con questa definizione si ha che

$$\|v_\delta\|_p = |\lambda| \left(\omega_n \delta^n\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad \text{per } \delta \to 0.$$

Dunque, per la F-differenziabilità di T_f in 0, si ha che

$$\|T_f(v_\delta) - T_f(0) - MT_{f_s}(0)v_\delta\|_p = o(\|v_\delta\|_p),$$

ovvero

$$\frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int\limits_{B(x_0,\delta)} \left| \frac{f(x,\lambda) - f_s(x,0)\lambda}{\lambda} \right|^p \mathrm{d}x \to 0 \text{ per } \delta \to 0.$$

Sia $\psi_\lambda(x) = \left| \frac{f(x,\lambda) - f_s(x,0)\lambda}{\lambda} \right|^p$. Dal teorema di differenziabilità di Lebesgue, segue che

$$\frac{1}{|B(x_0,\delta)|} \int\limits_{B(x_0,\delta)} \psi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x \to \psi_\lambda(x_0) \text{ per } \delta \to 0$$

per quasi ogni $x_0 \in \Omega$. Questo implica che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, esiste un insieme N_λ mi misura nulla, tale che $\psi_\lambda(x) = 0$ fuori da N_λ. Se scegliamo un sottoinsieme denso Λ di $\mathbb{R}$, allora $N = \cup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ è ancora di misura nulla, e quindi si ha che

$$\forall \lambda \in \Lambda, \text{ q.o.} x \in \Omega,\ f(x,\lambda) = f_s(x,0)\lambda.$$

Per continuità di $f(x,s)$, tale relazione deve valere per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, e quindi $f(x,s) = f_s(x,0)s$, e si ottiene la tesi con $a(x) = f_s(x,0)$ e $b(x) = 0$.

Nel caso generale, supponiamo che T_f sia continua in $\bar{u} \in L^p$. Allora definiamo una nuova funzione

$$g(x,s) = f(x, s + \bar{u}(x)) - f(x, \bar{u}(x)).$$

g è di Carathéodory, definisce un operatore $T_g : L^p \to L^p$ continuo e vale

$$T_g u = f(x, u(x) + \bar{u}(x)) - f(x, \bar{u}(x)) = T_f(u - \bar{u}) - T_f(\bar{u}).$$

Dunque, T_g è F-differenziabile in 0, e $g(x, 0) = 0$: per il punto appena dimostrato, vale

$$g(x, s) = g_s(x, 0)s \quad \text{q.o.}$$

e quindi

$$f(x, s) = f(x, \bar{u}(x)) + f_s(x, \bar{u}(x))(s - \bar{u}(x)).$$

Abbiamo ottenuto la tesi con $b(x) = f(x, \bar{u}(x)) - f_s(x, \bar{u}(x))\bar{u}(x)$ e $a(x) = f_s(x, \bar{u}(x))$.

□

Osservazione 2.1. La proposizione precedente dà il primo esempio di applicazioni che siano quasi-differenziabili ma non F-differenziabili: basta infatti scegliere un operatore di Nemitski $T_f : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ che sia differenziabile ma che non sia affine (per esempio, scegliendo $f(x, s) = \operatorname{sen}(s)$).

Osserviamo infine un fatto molto semplice, ma con conseguenze importanti: in una palla arbitrariamente piccola di L^p, con $1 \leqslant p < \infty$, esistono funzioni che arbitrariamente distanti rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideriamo infatti, a meno di traslazioni, la palla $B(0, \varepsilon) \subset L^p$, e la funzione

$$\varphi(x) = \alpha \chi_{B(0,\delta)}(x),$$

con α e δ parametri positivi. Allora si ha che

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_\infty &= \alpha, \\ \|\varphi\|_p &= \alpha \omega_n \delta^{n/p}; \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con n la dimensione di Ω e con $\omega_n = |B(0, 1)|$. Dunque, per ogni α arbitrariamente grande, è possibile scegliere δ sufficientemente piccolo in maniera che $\|\varphi\|_p < \varepsilon$, e quindi di modo che $\varphi \in B(0, \varepsilon)$.

Questa semplice osservazione ha come conseguenza che, nel caso di operatori di Nemitski $T_f : L^p \to L^p$, proprietà locali del differenziale si riflettano in proprietà globali di $f(x, s)$ e $f_s(x, s)$. Più precisamente:

Proposizione 2.6. *Sia $T_f : L^p \to L^p$ un operatore di Nemitski, tale che f_s sia di Carathéodory e verifichi* (2.7). *Allora*

i) *$DT_f(u)$ è iniettivo per ogni u in un aperto di L^p se e solo se*

$$f_s(x, s) \neq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \ \textit{q.o. } x \in \Omega;$$

ii) *$DT_f(u)$ è surgettivo (o equivalentemente invertibile) per ogni u in un aperto di L^p se e solo se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che*

$$|f_s(x, s)| > \varepsilon, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \ \textit{q.o. } x \in \Omega.$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.1, $DT_f(u) = Mf_s(u)$ è iniettivo se e solo se $f_s(x, u(x)) \neq 0$ quasi ovunque. Ma per l'osservazione precedente, in ogni aperto di L^p ci sono funzioni $u(x)$ che assumono valori arbitrari, e quindi $DT_f(u)$ è iniettivo in un aperto se e solo se $f_s(x, s) \neq 0$ per ogni s e per quasi ogni x.

La dimostrazione del secondo punto è analoga, se osserviamo che sempre per il teorema 2.1, se $DT_f(u)$ è surgettiva allora $f_s(x, u(x))^{-1}$ appartiene a L^∞, ovvero se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x, u(x))| > \varepsilon.$$

Nuovamente, se questa condizione vale per ogni u in un aperto di L^p, allora deve valere ovunque:

$$|f(x, s)| > \varepsilon \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ q.o. } x \in \Omega.$$

$\square$

2.3 Operatori di Hammerstein

Consideriamo ora un operatore della forma

$$Hu(x) = \int_\Omega k(x, t) f(t, u(t))\, \mathrm{d}t, \tag{2.9}$$

dove $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile, detto *nucleo*, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory. Operatori di questa forma sono detti *operatori di Hammerstein* ([KZPS76]), e sono un caso particolari dei cosiddetti operatori di Uryson, o operatori integrali:

$$Au(x) = \int_\Omega k(x, t, u(t))\, \mathrm{d}t.$$

Osserviamo che un operatore di Hammerstein si può scrivere come composizione di due funzioni

$$H = K \circ T_f,$$

$$Ku(x) = \int_\Omega k(x, t) u(t)\, \mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

$$T_f u(x) = f(x, u(x)), \tag{2.11}$$

dove K è un operatore lineare, e T_f è un operatore di Nemitski. Possiamo quindi ricondurre il problema della continuità e della differenziabilità di H a quello della continuità e della differenziabilità di K (semplice, perché K è lineare) e di T_f (noto dalla sezione precedente).

In particolare, se esistono tre spazi di Banach X, Y, e Z tali per cui $T_f : X \to Y$ è continua e quasi-differenziabile (F-differenziabile), e $K : Y \to Z$ è continua, allora $H = K \circ T_f$ è continua e quasi-differenziabile (F-differenziabile) e vale

$$DHu[v](x) = (K \circ DT_f(u))[v](x) = \int_\Omega k(x,t) f_s(t, u(t)) v(t) \, \mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

Presentiamo brevemente alcune condizioni di continuità per l'operatore K definito in (2.10).

Proposizione 2.7. *Sia K l'operatore definito in* (2.10). *Siano p, $q \in [1, \infty]$, e indichiamo con $p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato di p e con $p^\star = \frac{pq}{p-q}$. Se vale una delle seguenti*

$$\|k\|_{p',q} := \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,t)|^{p'} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{q}{p'}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} < \infty; \tag{2.13}$$

$$p \geqslant q \text{ e } \|k\|^\star_{p^\star,q} := \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,t)|^{q} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{p^\star}{q}} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p^\star}} < \infty; \tag{2.14}$$

allora $K : L^p \to L^q$ è continuo.

Dimostrazione. Iniziamo supponendo che k verifichi (2.13). Allora

$$\begin{aligned}
\|Ku\|_q^q = \int_\Omega |Ku(x)|^q \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,t) u(t) \, \mathrm{d}t \right|^q \mathrm{d}x \leqslant \\
\leqslant \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,t)| \, |u(t)| \, \mathrm{d}t \right)^q \mathrm{d}x \leqslant \\
\leqslant \int_\Omega \left(\int_\Omega |u(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |k(x,t)|^{p'} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{q}{p'}} \mathrm{d}x = \\
= \|k\|_{p',q}^q \, \|u\|_p^q ;
\end{aligned}$$

e quindi $\|K\| = \|k\|_{p',q}$.

Analogamente, se vale (2.14) e $p \geqslant q$, allora si ha

$$\|Ku\|_q^q = \int_\Omega |Ku(x)|^q \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,t)u(t)\,\mathrm{d}t \right|^q \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant \int_\Omega \int_\Omega |k(x,t)u(t)|^q \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |u(t)|^q \left(\int_\Omega |k(x,t)|^q \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega |u(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,t)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p-q}} \mathrm{d}t \right)^{\frac{p-q}{p}} =$$
$$= \|u\|_p^q \,(\|k\|_{p^\star,q}^\star)^q,$$

e quindi $\|K\| = \|k\|_{p^\star,q}^\star$. □

Un risultato più generale, presentato in [Vät96], ci dice che sotto tali ipotesi l'operatore K è in realtà compatto.

Abbiamo già osservato che il differenziale dell'operatore di Hammerstein è dato da (2.12), e che se l'operatore di Nemitski T_f è solo quasi-differenziabile e non F-differenziabile (per esempio, perché è definito da L^p in sé e non è affine), non è detto che $H = K \circ T_f$ sia F-differenziabile. Vediamo che in effetti, per il caso $p = 1$, questo non è possibile, a meno che $f(x,s)$ non sia affine.

Teorema 2.8. *Sia $H : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ un operatore di Hammerstein della forma* (2.9)*, e che sia quasi-differenziabile con differenziale dato da* (2.12)*. Supponiamo che valga*

$$\int_\Omega k(x,t)\,\mathrm{d}x \neq 0 \quad \textit{q.o. } t \in \Omega.$$

Se H è F-differenziabile in $u^* \in L^1$, allora $f(x,s)$ è affine in s, ovvero è della forma

$$f(x,s) = a(x)s + b(x),$$

e quindi H è F-differenziabile ovunque.

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che $u^* = 0$, e che $f(x,0) = 0$ per quasi ogni x.

Utilizzeremo le stesse notazioni della dimostrazione del corollario 2.5. Fissiamo un $t_0 \in \Omega$, un $\lambda \in \mathbb{R}$, e definiamo, per ogni $\delta > 0$,

$$v_\delta(t) = \lambda \chi_{B(t_0,\delta)}(t).$$

Abbiamo già visto che

$$\|v_\delta\|_1 = |\lambda|\,\omega_n\delta^n \to 0 \quad \text{per } \delta \to 0,$$

dove ω_n è la misura di $B(0,1)$. Dunque v_δ tende a 0 in L^1: per la F-differenziabilità si ha che

$$\|H(v_\delta) - H(0) - DH(0)[v_\delta]\|_1 = o(\|v_\delta\|_1),$$

e che quindi, se indichiamo con

$$\psi_\lambda(t) = \frac{f(t,\lambda) - \lambda f_s(t,0)}{\lambda},$$

si ha che, per $\delta \to 0$:

$$\int\limits_\Omega \left| \frac{1}{\omega_n\delta^n} \int\limits_{B(t_0,\delta)} k(x,t)\psi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \to 0.$$

Indichiamo con

$$w_\delta(x) = \frac{1}{\omega_n\delta^n} \int\limits_{B(t_0,\delta)} k(x,t)\psi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t;$$

l'equazione precedente ci dice quindi che w_δ tende a 0 in L^1: per il teorema di Lebesgue Inverso, esiste una successione δ_n tale che

$$w_{\delta_n}(x) \to 0 \quad \text{q.o. } x \in \Omega,$$

ovvero, che esiste un insieme $M = M(t_0,\lambda)$ di misura nulla, e tale che

$$\frac{1}{\omega_n\delta^n} \int\limits_{B(t_0,\delta)} k(x,t)\psi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus M.$$

Fissato un $x \in M$, per il Teorema di differenziabilità di Lebesgue, si ha che per quasi ogni $t_0 \in \Omega$, se $\delta \to 0$,

$$\frac{1}{\omega_n\delta^n} \int\limits_{B(t_0,\delta)} k(x,t)\psi_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \to k(x,t_0)\psi_\lambda(t_0).$$

Sia N_λ un insieme di misura nulla, tale per cui per ogni $t_0 \in \Omega \setminus N_\lambda$, valga la convergenza dell'ultima espressione. Ma allora, per ogni $t_0 \in \Omega \setminus N_\lambda$, si ha che

$$\int\limits_\Omega k(x,t_0)\psi_\lambda(t_0)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega\setminus M(t_0,\lambda)} k(x,t_0)\psi_\lambda(t_0)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ma dal momento che avevamo supposto che

$$\int_\Omega k(x,t)\,\mathrm{d}x \neq 0 \quad \text{q.o. } t$$

si ha che

$$0 = \int_\Omega k(x,t_0)\psi_\lambda(t_0)\,\mathrm{d}x = \psi_\lambda(t_0)\int_\Omega k(x,t_0)\,\mathrm{d}x,$$

e quindi $\psi_\lambda(t_0) = 0$ per quasi ogni $t_0 \in \Omega \setminus N_\lambda$.

Sia N'_λ l'insieme di misura nulla, fuori dal quale vale $\psi_\lambda(t) = 0$, e scegliamo un sottoinsieme denso Λ di $\mathbb{R}$. Allora $N = \cup_{\lambda\in\Lambda} N'_\lambda$ è ancora di misura nulla, e quindi vale

$$\forall\lambda \in \Omega, \forall x \in \Omega \setminus N,\ f(t,\lambda) = \lambda f_s(t,0).$$

Dal momento che $f(x,s)$ è continua in s, la relazione precedente deve valere anche per ogni s in $\mathbb{R}$; si ha dunque

$$f(x,s) = sf_s(x,0) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega.$$

Abbiamo ottenuto la tesi, nel caso in cui $u^* = 0$ e $f(x,0) = 0$.

In generale, consideriamo

$$g(x,s) = f(x, s+u^*(x)) - f(x,u^*(x)),$$

ed un nuovo operatore di Hammerstein

$$Gu(x) = \int_\Omega k(x,t)g(t,u(t))\,\mathrm{d}t.$$

G è continuo da L^1 in L^1, quasi-differenziabile ovunque e F-differenziabile in 0, ed inoltre $g(x,0) = 0$. Per quanto appena dimostrato, deve essere

$$g(x,s) = sg_s(x,0) \quad \text{per q.o. } x$$

e quindi

$$f(x,s) = f(x,u^*(x)) + f_s(x,u^*(x))(s - u^*(x)).$$

$\square$

2.4 Un problema di funzione implicita

Con gli strumenti che abbiamo sviluppato, osserviamo che l'equazione (2.1) può essere riscritta come un problema di punto fisso:

$$u = H(u),$$

dove H è un opportuno operatore di Hammerstein, che agisce su un opportuno spazio di funzioni.

Un problema analogo si ottiene considerando un'equazione di Hammerstein dipendente da un parametro λ:

$$u(x) = \int_\Omega k(x,t) f(\lambda, t, u(t)) \, \mathrm{d}t. \tag{2.15}$$

Data una soluzione u_0 dell'equazione per un parametro fissato λ_0, ci domandiamo se è possibile trovare soluzioni della stessa equazione per un parametro λ vicino a λ_0, e come queste soluzioni si comportino rispetto a u_0. Questo problema può essere presentato come un problema di funzione implicita: definiamo infatti

$$F(\lambda, u) = u - H_\lambda(u),$$

dove H_λ è l'operatore di Hammerstein dato da

$$H_\lambda u(x) = \int_\Omega k(x,t) f(\lambda, t, u(t)) \, \mathrm{d}t.$$

Ci stiamo quindi domandando se, dati λ_0 e u_0 che verifichino

$$F(\lambda_0, u_0) = 0,$$

se è possibile trovare un intorno Λ di λ_0 ed una mappa $u(\lambda)$ tali che

$$\begin{cases} F(\lambda, u(\lambda)) = 0, \\ u(\lambda_0) = u_0. \end{cases}$$

Capitolo 3

Locale iniettività

Allo scopo di ridurre le ipotesi necessarie per ottenere risultati di inversione locale, una strategia può essere quella di separare il problema considerando separatamente le condizioni per avere locale iniettività e locale surgettività. In questo capitolo ci occuperemo della prima richiesta.

Iniziamo con un risultato che mostra come la F-differenziabilità è un'ipotesi abbastanza forte da non necessitare ulteriori condizioni.

Lemma 3.1. *Sia $f : U \subset X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi di Banach. Sia $x_0 \in U$ e supponiamo che f sia F-differenziabile in x_0. Se $Df(x_0)$ è un'inversa destra, allora esiste un intorno V di x_0 tale che $f|_V$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non esista tale intorno V. Possiamo quindi trovare una coppia di successioni $(x_n),\ (y_n) \subseteq U$ tali che per ogni n si ha $x_n \neq y_n$ e che

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}, \quad \|y_n - x_0\| < \frac{1}{n}, \quad f(x_n) = f(y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha

$$f(x_n) = f(x_0) + Df(x_0)[x_n - x_0] + o(\|x_n - x_0\|),$$
$$f(y_n) = f(x_0) + Df(x_0)[y_n - x_0] + o(\|y_n - x_0\|);$$

e quindi sottraendo si ha

$$Df(x_0)[x_n - y_n] = o(\|x_n - y_n\|).$$

Sia $L : Y \to X$ l'inversa sinistra di $Df(x_0)$. Allora si ha che

$$\|x_n - y_n\| = \|LDf(x_0)[x_n - y_n]\| \leqslant \|L\| \, \|Df(x_0)[x_n - y_n]\| = o(\|x_n - y_n\|),$$

con il quale abbiamo ottenuto un assurdo, dato che avevamo supposto $x_n \neq y_n$. $\square$

3.1 Dimensione finita

Come abbiamo mostrato nel primo capitolo, nel caso il cui il dominio di definizione di una funzione abbia dimensione finita, allora la quasi-differenziabilità e la F-differenziabilità coincidono: in maniera alquanto intuitiva, possiamo dire che le curve di classe C^1 "esauriscono" tutte le possibili traiettorie di un parametro h che tende a 0. Questo non è più vero in dimensione infinita (sempre utilizzando un linguaggio informale, h potrebbe tendere a zero senza avere nessuna direzione tangente al limite).

Questo fatto, assieme alla proprietà (vera in domini di dimensione qualsiasi) che una mappa G-differenziabile e lipschitziana sia quasi-differenziabile, ci permette di osservare che una funzione lipschitziana con dominio di dimensione finita è G-differenziabile se e solo se è F-differenziabile. D'altra parte, per le proposizioni 1.10 e 1.11, una mappa G-differenziabile in un aperto è lipschitziana se e solo se ha differenziale limitato, e questo permette di caratterizzare in maniera molto semplice le funzioni F-differenziabili definite su un dominio di dimensione finita.

Sintetizziamo questo ragionamento, che è il frutto di una serie di risultati dimostrati in precedenza, alla luce del lemma 3.1 appena enunciato.

Corollario 3.2. *Sia $f : U \subset X \to Y$ una mappa continua tra spazi di Banach, e supponiamo che X abbia dimensione finita. Sia V un aperto contenuto in U tale che f sia G-differenziabile secondo Gâteaux in U e vale $\sup_{x\in V} \|Df(x)\| < \infty$. Allora se $Df(x_0)$ è iniettivo, per un qualche $x_0 \in V$, esiste un intorno W di x_0 tale che $f|_W$ è iniettiva.*

Ci rimane da verificare cosa succede eliminando l'ipotesi di lipschitzianità (ovvero l'ipotesi di limitatezza di $\|Df(x)\|$), ed inoltre se possiamo ottenere qualche risultato (eventualmente più debole) se richiediamo che la nostra mappa sia G-differenziabile solo in un punto e non in un aperto. Sorprendentemente, possiamo trovare risultati positivi in entrambi i casi.

Proposizione 3.3. *Sia $f : U \subset X \to Y$ una mappa continua tra spazi di Banach, e supponiamo che X abbia dimensione finita. Se f è differenziabile secondo Gâteaux in $x_0 \in U$, e $Df(x_0)$ è iniettivo, allora esiste un intorno V di x_0 tale che*

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\} \quad f(x) \neq f(x_0). \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, per il lemma 1.6, la restrizione di f ad una retta passante per x_0 è una curva differenziabile in x_0, ed il differenziale è iniettivo: quindi, per il lemma 3.2, f è localmente iniettiva se ristretta alle rette passanti per x_0.

Sia S_X la sfera unitaria di X, e definiamo $g : S_X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ come segue

$$g(u) = \inf\{t > 0 \mid f(tu) = f(x_0)\} \in [0, +\infty].$$

Per quanto detto, f è localmente iniettiva lungo le rette: dunque $g(u) > 0$ per ogni $u \in S_X$. Vogliamo provare che g è semicontinua inferiormente. Dalla continuità della f segue che l'inf della definizione di $g(u)$ è in effetti un minimo. Sia quindi $(u_n) \subset S_X$ una successione che tende a u; allora

$$f(x_0) = f\left(g\left(u_n\right) u_n\right)\right) \quad \forall n;$$

e di conseguenza

$$f\left(\left[\liminf_n g\left(u_n\right)\right] u\right) = f(x_0),$$

il che implica $\liminf_n g(u_n) \geqslant g(u)$.

Dunque g è semicontinua inferiormente; dal momento che X ha dimensione finita, S_X è compatto, e quindi g ha minimo, che indichiamo con $\bar{t} > 0$. Ma allora

$$f(tu) \neq f(x_0) \quad \forall t \leqslant \bar{t},\ \forall u \in S_X;$$

da cui segue la tesi, scegliendo $V = B\left(x_0, \bar{t}\right)$. □

Proposizione 3.4. *Sia $f : U \subset X \to Y$ una mappa continua tra spazi di Banach, e supponiamo che X abbia dimensione finita. Supponiamo che f sia G-differenziabile in U, e per ogni $x \in U$ risulti che $Df(x)$ è un'applicazione iniettiva. Allora per ogni $x_0 \in U$ esiste un intorno $V(x_0) \subset U$ tale che $f|_{V(x_0)}$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Con un ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione della proposizione precedente, come conseguenza del lemma 1.6 e del lemma 3.2 si ha che f è localmente iniettiva lungo le rette. Definiamo ora una applicazione $g : U \times S_X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ come segue

$$g(x, u) = \inf\left\{t > 0 \mid f(x + tu) = f(x)\right\} \in [0, +\infty].$$

Dalla locale iniettività lungo le rette, segue che $g(x, u) > 0$ per ogni scelta di $x \in U$ e $u \in S_X$. Inoltre, dal momento che f è continua, nella definizione di g l'estremo inferiore può essere sostituito con un minimo:

$$g(x, u) = \min\left\{t > 0 \mid f(x + tu) = f(x)\right\} \in (0, +\infty].$$

Vogliamo dimostrare che g è semicontinua inferiormente: prendiamo due successioni $(x_n) \subset U$ e $(u_n) \subset S_X$ convergenti rispettivamente a $x \in U$ e a $u \in S_X$, e indichiamo con $t_n = g(x_n, u_n)$. Allora per definizione si ha

$$f(x_n) = f(x_n + t_n u_n);$$

e quindi, passando al limite

$$f(x) = f\left(x + \left(\liminf_n t_n\right) u\right),$$

e quindi $g(x, u) \leqslant \liminf_n g(x_n, u_n)$, col quale abbiamo dimostrato la semicontinuità inferiore di g.

Fissiamo x_0, e scegliamo $U' \subset U$ un intorno compatto di x_0. Allora $U' \times S_X$ è compatto (X ha dimensione finita), e di conseguenza g ha minimo su tale insieme. Indichiamo con $\varepsilon > 0$ tale minimo, e sia $V(x_0) = B(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$.

Prendiamo due punti distinti $x, y \in V(x_0)$. Allora $\|x - y\| = \delta < \varepsilon$, e quindi se indichiamo con $u = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S_X$, possiamo scrivere $y = x + \delta u$. Ma allora deve essere $f(x) \neq f(x + \delta u) = f(y)$, perché $\delta < \varepsilon$. Abbiamo quindi dimostrato che $f|_{V(x_0)}$ è iniettiva, e per l'arbitrarietà di x_0 abbiamo ottenuto la tesi. □

3.2 Controesempi

Esempio 3.1. Sia $T : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ definito da

$$Tu(x) = \operatorname{sen}(u(x)). \tag{3.2}$$

T è un operatore di Nemitski associato alla funzione $f(x, s) = \operatorname{sen}(s)$. f verifica le ipotesi di Carathéodory, e vale $|f(x, s)| \leqslant |s|$. Sia inoltre $f_s = \frac{\partial}{\partial s} f(x, s) = \cos(s)$; allora anche f_s verifica le ipotesi di Carathéodory e $|f_s(x, s)| \leqslant 1$. Di conseguenza T è un operatore continuo e differenziabile secondo Gâteaux su tutto $L^2(0, 1)$, e vale

$$DT(u)[v] = \cos(u) \cdot v.$$

D'altra parte non essendo lineare, T non è differenziabile secondo Fréchet in nessun punto di $L^2(0, 1)$.

Osserviamo che $\|DT(u)\| \leqslant 1$, e che quindi T è lipschitziana di costante minore o uguale ad 1.

Definiamo una successione di funzioni in $L^2(0, 1)$:

$$g_n = 2\pi \chi_{[0,1/n^2]} \qquad \forall n \in \mathbb{N}; \tag{3.3}$$

sia ha dunque che $\|g_n\|_2 = \frac{2\pi}{n}$, e che $g_n \to 0$. D'altra parte

$$Tg_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi)\chi_{[0,1/n^2]} + \operatorname{sen}(0)\chi_{(1/n^2,1]} = 0.$$

Inoltre è evidente che, per ogni $u \in L^2(0, 1)$, si ha che $T(u + g_n) = Tu$. Dunque T non è localmente iniettiva per nessun $u \in L^2(0, 1)$. Del resto $DT(0) =$

id, e quindi nel corollario 3.2 non si estende senza ulteriori ipotesi al caso in cui X abbia dimensione infinita.

Sia
$$u_n = \frac{\pi}{2}\left(\left\lfloor \frac{2u(x)}{\pi} \right\rfloor\right)\chi_{[0,1/n^2]} + u(x)\chi_{(1/n^2,1]}.$$
Allora
$$\|u - u_n\|_2 \leqslant \frac{\pi}{2n},$$
ed inoltre
$$DT(u_n)[v] = v\chi_{[1/n^2,1]}.$$
Dunque il differenziale di T, pur potendo essere iniettivo in alcuni punti (in 0 è addirittura l'identità), non lo è mai in un aperto.

Esempio 3.2. Consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(\Omega,\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\Omega,\mathbb{R}^2), \\ & u(x) & \longmapsto & (\cos u(x), \operatorname{sen} u(x)). \end{array}$$

Una dimostrazione analoga a quella di teoremi 2.2 e 2.4, mostra che F è continua e quasi-differenziabile, e che vale

$$DF(u)[v](x) = v(x)(-\operatorname{sen} u(x), \cos u(x)).$$

Osserviamo che $\|Df(u)[v]\| = \|v\|$ per ogni $u \in L^2$, e che quindi $DF(u)$ è una isometria: di conseguenza è iniettiva e ha immagine chiusa, e la sua inversa sinistra è data da

$$L(u)[a,b](x) = -\operatorname{cotan}(u(x))\frac{a(x)}{b(x)}.$$

Ma F non è mai localmente iniettivo, dal momento che, per ogni $E \subset \Omega$ misurabile, si ha
$$F(u) = F(u + 2\pi\chi_E).$$

Dunque, in dimensione infinita, l'invertibilità ovunque del quasi-differenziale non è sufficiente neanche per avere locale iniettività.

3.3 Il teorema di Jittorntrum-Kumagai

L'enunciato che segue è apparso originariamente in [Jit78] ad opera di K. Jittorntrum, e seppur poco conosciuto, ha avuto una sua diffusione nell'ambito della programmazione e ottimizzazione matematica. La dimostrazione originale, così come è formulata, contiene una ambiguità abbastanza sostanziale: Jittorntrum fa riferimento ad una richiesta di "locale iniettività", senza precisare se sia da intendere in un punto o in un intorno. Questo rende la sua dimostrazione non completamente chiara.

A pochi anni dalla pubblicazione, S. Kumagai in [Kum80] propone una dimostrazione alternativa, senza però chiarire l'ambiguità riguardo a come vada interpretata la richiesta di locale iniettività.

Presentiamo qui l'enunciato nella forma data da Jittorntrum e Kumagai, interpretando la dicitura "locale iniettività" come "locale iniettività in x_0".

Enunciato 3.5. *Sia $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Supponiamo che $F(x_0, y_0) = 0$, e che esistano due aperti $A \subset \mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ intorni rispettivamente di x_0 e y_0, tali che per ogni $y \in B$, $F(\cdot, y) : A \to \mathbb{R}^n$ vista come funzione della sola variabile x sia una mappa localmente iniettiva in x_0. Allora esistono due aperti $A_0 \subset A$ e $B_0 \subset B$ intorni rispettivamente di x_0 e y_0 tali che, per ogni $y \in B_0$, esiste un unico $x = H(y) \in A_0$ tale che*

$$F(x, y) = 0,$$

ed inoltre la mappa $y \mapsto H(y)$ è una mappa continua tra B_0 e A_0.

Con questa formulazione, il teorema è falso, come mostra in seguente controesempio.

Esempio 3.3.

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 - y^2 x. \tag{3.4}$$

f è continua, ed inoltre $f(0, 0) = 0$. Osserviamo che

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2 - y^2,$$

e che quindi $\partial_x f(0, y) = -y^2$. Se $y \neq 0$, $\partial_x f(0, y) < 0$ e dunque $f(\cdot, y)$ come funzione della sola x è localmente iniettiva in 0 (perché è derivabile con derivata diversa da zero). D'altra parte se $y = 0$, la funzione si riduce a

$$f(x, 0) = x^3,$$

che è chiaramente iniettiva su tutto $\mathbb{R}$.

Ma evidentemente $f(x,y)=0$ non è il grafico di nessuna funzione continua in un intorno di 0, dato che

$$f(0,y)=f(x,y)=f(-x,y)=0, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

D'altra parte, come già notato da Kumagai stesso in [Kum80], il teorema è dimostrabile sostituendo all'ipotesi di locale iniettività in x_0 la seguente, strettamente più forte, e la dimostrazione che presentiamo è quella originale di Jittorntrum:

Proposizione 3.6. *Sia $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ una funzione continua. Supponiamo che $F(x_0,y_0)=0$, e che esistano due aperti $A\subset\mathbb{R}^n$ e $B\subset\mathbb{R}^m$ intorni rispettivamente di x_0 e y_0, tali che per ogni $y\in B$, $F(\cdot,y):A\to\mathbb{R}^n$ vista come funzione della sola variabile x sia una mappa iniettiva, e $0\in F(A,y)$. Allora esistono due aperti $A_0\subset A$ e $B_0\subset B$ intorni rispettivamente di x_0 e y_0 tali che, per ogni $y\in B_0$, esiste un unico $x=H(y)\in A_0$ tale che*

$$F(x,y)=0,$$

ed inoltre la mappa $y\mapsto H(y)$ è una mappa continua tra B_0 e A_0.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & A\times B & \longrightarrow & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\\ & (x,y) & \longmapsto & (F(x,y),y).\end{array}$$

Dalle ipotesi su F segue che Ψ è continua e iniettiva. Allora, per il teorema di Invarianza del Dominio, $\Psi(A\times B)$ è aperto e Ψ è un omeomorfismo sull'immagine. Indichiamo con Φ la sua inversa

$$\Phi=\Psi^{-1},$$
$$\Phi(\xi,\eta)=(\Phi_1(\xi,\eta),\Phi_2(\xi,\eta))\in A\times B.$$

Allora per ogni $y\in B$ si ha che

$$(0,y)=\Psi\Phi(0,y)=\left(F\left(\Phi_1\left(0,y\right),\Phi_2\left(0,y\right)\right),\Phi_2\left(0,y\right)\right),$$

e quindi

$$y=\Phi_2(0,y),\quad F(\Phi_1(0,y),y)=0,$$

e la funzione cercata è $H(y)=\Phi_1(0,y)$. □

In effetti, è da sperare che l'uso successivo del teorema di Jittorntrum sia compatibile con le ipotesi più restrittive che abbiamo presentato. L'ultima pubblicazione (in ordine cronologico) che ne fa uso in effetti rientra in questo caso: si veda [Shv11].

Resta tuttavia aperta la domanda se sia possibile dimostrare il teorema 3.5, sostituendo all'ipotesi di locale iniettività in x_0, quella di locale iniettività in tutto l'aperto A, ovvero l'ipotesi che, per ogni $x\in A$, $F(\cdot,y)$ sia localmente iniettiva in x.

Capitolo 4

Teoremi di funzione implicita e teorema delle contrazioni

I risultati che presentiamo in questo capitolo, pur nella diversità delle ipotesi e dei contesti in cui sono formulati, si basato tutti, in ultima analisi, sul ben noto teorema delle contrazioni, o teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli. Sarà questo lo strumento con cui sarà possibile "costruire' le funzioni implicite cercate. In particolare, questi teoremi si distinguono da quelli presentati nel prossimo capitolo, dato che questi ultimi si basano su un risultato sugli spazi metrici diverso dal teorema delle contrazioni, il cosiddetto principio variazionale di Ekeland.

Teorema 4.1 (Teorema delle contrazioni). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e $f : X \to X$ una funzione che verifica*

$$d(f(x), f(x')) \leqslant kd(x, x') \quad \forall x, x' \in X, \tag{4.1}$$

con $k < 1$. Allora f ammette un unico punto fisso x^*, che verifica

$$x^* = \lim_n f^n(x_0) \quad \forall x_0 \in X.$$

Definizione 4.1. Diremo che una funzione $f : U \subset X \to X$, è una *contrazione* se è lipschitziana di costante $k < 1$.

4.1 Perturbazioni lipschitziane dell'identità

Teorema 4.2. *Sia X uno spazio di Banach, $U \subseteq X$ un aperto e $g : U \to X$ una contrazione di constante $\mu < 1$. Allora, indicando con I la funzione identica, $f = I + g$ verifica* *i)* $f(U)$ *è aperto, e più precisamente*

$$\forall x \in U \; \forall r > 0 \text{ t.c. } \overline{B(x,r)} \subset U$$

allora

$$f\left(\overline{B(x,r)}\right) \supseteq \overline{B\left(f(x),(1-\mu)r\right)}\,;$$

ii) f *è un omeomorfismo tra* U *e* $f(U)$.

Dimostrazione. Sia $x \in U$, e $r > 0$ tale che $\overline{B(x,r)} \subseteq U$. Vogliamo provare l'inclusione, ovvero che $f\left(\overline{B(x,r)}\right) \supseteq \overline{B\left(f(x),(1-\mu)r\right)}$, cioè

$$\forall y \in \overline{B\left(f(x),(1-\mu)r\right)} \quad \exists \xi \in \overline{B(x,r)} \text{ tale che } f(\xi) = y.$$

Dalla definizione di f abbiamo che $f(\xi) = \xi + g(\xi) = y$, e che quindi $\xi = y - g(\xi)$. Consideriamo dunque l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} T: & \overline{B(x,r)} & \longrightarrow & X, \\ & \xi & \longmapsto & y - g(\xi). \end{array}$$

Mostriamo che $\overline{B(x,r)}$ è T-invariante e che T è una contrazione rispetto alle seminorme.

T verifica l'equazione (4.1): infatti, se $x_1, x_2 \in \overline{B(x,r)}$, allora

$$\|Tx_1 - Tx_2\| = \|y - g(x_1) - y + g(x_2)\| = \\ \|g(x_1) - g(x_2)\| \leqslant \mu \|x_1 - x_2\|\,.$$

Verifichiamo che $T\left(\overline{B(x,r)}\right) \subset \overline{B(x,r)}$. Se $\|\xi - x\| \leqslant r$, abbiamo che

$$\|T\xi - x\| = \|y - g(\xi) - x\| = \|y - x - g(\xi) - g(x) + g(x)\| \leqslant \\ \|y - x - g(x)\| + \|g(x) - g(\xi)\| = \|y - f(x)\| + \|g(x) - g(\xi)\| \leqslant \\ \|y - f(x)\| + \mu\|x - \xi\| \leqslant (1-\mu)r + \mu r = r.$$

Dunque, possiamo applicare il teorema 4.1, e per tanto T ha un unico punto fisso. Ma un punto fisso per T è proprio il punto ξ cercato, e abbiamo quindi dimostrato l'inclusione (e di conseguenza che $f(U)$ è aperto).

Dall'unicità del punto fisso di T, segue che f è una bigezione sull'immagine, e dato che abbiamo dimostrato che è anche aperta, segue che f è un omeomorfismo tra U e $f(U)$. □

Definizione 4.2. Una funzione della forma $f = I + g$, dove I è l'identità e g è una contrazione, è detta *perturbazione lipschitziana dell'identità.*

4.2 Il teorema di Hildebrandt-Graves

Il primo teorema di funzione implicita per mappe tra spazi di Banach fu formulato da Hildebrandt e Graves nel 1927 ([HG27]). Nella sua formulazione "moderna", è uno dei teoremi più noti (viene difatti inserito nei corsi introduttivi di Analisi Nonlineare, e viene semplicemente chiamato "teorema di funzione implicita" senza ulteriori specificazioni), ma è anche quello con le ipotesi più restrittive: viene infatti richiesta la F-differenziabilità.

Presentiamo qui l'enunciato, senza dimostrazione: oltre all'articolo originale, è possibile fare riferimento a [Dei85].

Teorema 4.3 (Hildebrandt-Graves). *Siano Y, Z spazi di Banach, X uno spazio topologico, $V \subset Y$ un aperto e $F : X \times V \to Z$ una funzione continua. Siano $x_0 \in X$, e $y_0 \in V$, e supponiamo che $F(x_0, y_0) = 0$. Supponiamo inoltre che F sia F-differenziabile rispetto alla seconda variabile in V, che il suo differenziale $(x, y) \to D_2F(x, y)$ sia un'applicazione continua da $X \times V$ in $L(Y, Z)$, e che $D_2F(x_0, y_0)$ sia invertibile.*

Allora esistono un intorno aperto U_0 di x_0 ed un intorno aperto V_0 di y_0, ed una unica mappa continua $G : U_0 \to V_0$, tali che

$$F(x, G(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0.$$

In realtà l'ipotesi di F-differenziabilità non è strettamente necessaria per la dimostrazione del teorema, ma è necessaria una sua conseguenza. Dunque è possibile ridurre le ipotesi del teorema precedente, come mostra il seguente risultato, presentato in [Dei85] sotto forma di teorema di funzione inversa.

Teorema 4.4 (Deimling). *Sia $F : X \times V \to Z$ una mappa continua, con X spazio topologico, Y e Z spazi di Banach, e $V \subset Y$ un aperto. Supponiamo che esista una applicazione $T \in L(Y, Z)$ tale che*

$$\|F(x, y) - F(x, y') - T(y - y')\| \leqslant k \|y - y'\|, \tag{4.2}$$

per ogni x, y, y' in $X \times V$. Sia inoltre $F(x_0, y_0) = 0$.

Se T è invertibile e $k < 1/ \|T^{-1}\|$, allora esiste un intorno $U_0 \subset X$ di x_0 ed una unica funzione continua $G : U_0 \to V$ tale che

$$F(x, G(x)) = 0, \quad \forall x \in U_0.$$

Dimostrazione. A meno di traslazioni, possiamo supporre che $y_0 = 0$. Definiamo

$$\begin{array}{rccc} H: & X \times V & \longrightarrow & Y, \\ & (x, y) & \longmapsto & T^{-1}F(x, y) - y. \end{array}$$

Evidentemente si ha che

$$F(x,y)=0 \iff y+H(x,y)=0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\operatorname{lip}_y H(x,y) := \sup_{y\neq y'\in V} \frac{\|H(x,y)-H(x,y')\|}{\|y-y'\|} = \\
\sup_{y\neq y'} \frac{\|T^{-1}[F(x,y)-F(x,y')]-(y-y')\|}{\|y-y'\|} = \\
\sup_{y\neq y'} \frac{\|T^{-1}[F(x,y)-F(x,y')-T(y-y')]\|}{\|y-y'\|} \leqslant \\
\left\|T^{-1}\right\| \sup_{y\neq y'} \frac{\|F(x,y)-F(x,y')-T(y-y')\|}{\|y-y'\|} \leqslant k\left\|T^{-1}\right\| < 1.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni $x \in V$, $H(x,y)$ è lipschitziana di costante $\theta = k\|T^{-1}\| < 1$ nella variabile y. Dal momento che $H(x_0,0)=0$, per la continuità della F per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una palla $B(x_0,\delta) \subset X$ su cui vale

$$\|H(x,0)\| < \varepsilon.$$

Si ha quindi che, preso $x \in B(x_0,\delta)$ e $y \in V$

$$\|H(x,y)\| \leqslant \|H(x,y)-H(x,0)\| + \|H(x,0)\| \leqslant \theta\|y\| + \varepsilon.$$

Fissato un $r > 0$ tale per cui la palla chiusa $\overline{B(0,r)}$ sia contenuta in V, scegliamo $\varepsilon = (1-\theta)r$, di maniera che si abbia, per ogni $x \in B(x_0,\delta)$ e per ogni $y \in \overline{B(0,r)}$

$$\|H(x,y)\| \leqslant \theta\|y\| + (1-\theta)r \leqslant r.$$

Con questa scelta, si ha che per ogni $x \in B(x_0,\delta)$, la funzione $y \to -H(x,y)$ è una θ-contrazione in y, e manda la palla chiusa $\overline{B(0,r)}$ in sé: per il teorema delle contrazioni 4.1, esiste un unico $y \in B(0,r)$ tale che

$$y + H(x,y) = 0,$$

ovvero tale che $F(x,y)=0$. Indichiamo con $U_0 = B(x_0,\delta)$, e $G(x)=y$ è la funzione cercata. Non ci resta che dimostrare che $G(x)$ è continua.

Siano x e $x' \in U_0$. Allora

$$G(x) + H(x,G(x)) = 0 = G(x') + H(x',G(x')),$$

e quindi

$$\begin{aligned}\|G(x') - G(x)\| = \|H(x', G(x')) - H(x, G(x))\| \leqslant \\ \|H(x', G(x')) - H(x', G(x))\| + \|H(x', G(x)) - H(x, G(x))\| \leqslant \\ \theta \|G(x') - G(x)\| + \left\|T^{-1}\right\| \|F(x', G(x)) - F(x, G(x))\| .\end{aligned}$$

Spostando il primo termine a sinistra otteniamo

$$\|G(x') - G(x)\| \leqslant \frac{\|T^{-1}\|}{1-\theta} \|F(x', G(x)) - F(x, G(x))\| ;$$

facendo tendere $x' \to x$ otteniamo che G è continua. □

È relativamente semplice osservare che le ipotesi del teorema di Hildebrandt-Graves implichino quelle del teorema di Deimling: infatti, scegliendo come operatore lineare T lo stesso differenziale $D_2F(x_0, y_0)$, dall'ipotesi di F-differenziabilità segue che

$$\begin{aligned}&\|F(x, y) - F(x, y') - D_2F(x_0, y_0)(y - y')\| \\ &\leqslant \sup_{\xi \in [y, y']} \|D_2F(x, \xi) - D_2F(x_0, y_0)\| \|y - y'\| ,\end{aligned}$$

e dala continuità di $(x, y) \to D_2F(x, y)$ segue che

$$\|D_2F(x, y) - D_2F(x_0, y_0)\| = o(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|).$$

Dunque, con una opportuna scelta di intorni per x_0, e y_0, $T = D_2F(x_0, y_0)$ soddisfa l'equazione (4.2) con una costante k arbitrariamente piccola (e quindi è possibile scegliere gli aperti in maniera che $k < 1/ \|D_2F(x_0, y_0)^{-1}\|$).

4.2.1 Operatori di Nemitski, operatori di Hammerstein e contrazioni

Consideriamo il caso di un operatore di Nemitski $T_f : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, ovvero una funzione definita come

$$T_f(u)(x) = f(x, u(x)),$$

con $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory (definizione 2.1). Se $f(x, s)$ è derivabile nella seconda variabile s, ed inoltre $|f_s(x, s)|$ è limitata per ogni s e per quasi ogni x, allora, per il teorema 2.4, T_f è G-differenziabile e vale $DT_f(u)[v] = T_{f_s}(u) \cdot v$. Sappiamo dal corollario 2.5, che T_f è F-differenziabile se e solo se è affine, ovvero se $f(x, s)$ è della forma

$$f(x, s) = a(x)s + b(x).$$

Dunque, se $f(x, s)$ non è affine in s, non è possibile applicare il teorema 4.3.

Vale però la seguente osservazione.

Osservazione 4.1. Sia $T_f : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ un operatore di Nemitski definito come sopra, e supponiamo che valga la seguente ulteriore ipotesi su $f(x,s)$:

$$|f(x,s) - f(x,t)| \leqslant k\,|s-t| \quad \text{con } k \geqslant 0. \tag{4.3}$$

Allora T_f è k-lipschitziana:

$$\int_\Omega |f(x,u(x)) - f(x,v(x))|^p \,\mathrm{d}x \leqslant k^p \int_\Omega |u(x) - v(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

In particolare, se $k < 1$ allora T_f è una contrazione. Più in generale per ogni $\gamma \in (-1/k, 1/k)$ la funzione $I + \gamma T_f$ è una perturbazione lipschitziana dell'identità, e quindi un omeomorfismo.

Osserviamo che, se $f(x,s)$ è derivabile rispetto a s, e $f_s(x,s)$ verifica (2.6), allora la condizione (4.3) è verificata per $k = \text{supp-ess}\,|f_s(x,s)|$, e quindi $F = I + \gamma T_f$ è un omeomorfismo per $|\gamma| < 1/k$. Ricordiamo che, per il teorema 2.4, F è G-differenziabile e vale

$$DF(u) = I + \gamma M T_{f_s}(u) = M(1 + \gamma T_{f_s}(u)).$$

Dato che, per le ipotesi su γ, si ha che

$$1 + \gamma f_s(x,s) > 1 - \gamma k,$$

per la proposizione 2.6 $DF(u)$ è invertibile ovunque.

Consideriamo un operatore di Hammerstein H della forma (2.9)

$$Hu(x) = \int_\Omega k(x,t) f(t,u(t))\,\mathrm{d}t.$$

In particolare, richiediamo che H sia continuo a $L^1(\Omega)$ in sé: in particolare, supponiamo che l'operatore

$$\begin{aligned} T_f :\ L^1(\Omega) &\longrightarrow L^1(\Omega), \\ u(t) &\longmapsto f(t,u(t)), \end{aligned}$$

sia continuo e quasi-differenziabile, e che il nucleo k verifichi la condizione (2.14):

$$\|k\|^\star_{\infty,1} = \operatorname*{sup\,ess}_{t\in\Omega} \int_\Omega |k(x,t)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Supponiamo inoltre che $f(x,s)$ verifichi una condizione di Lipschitz

$$|f(x,s) - f(x,t)| \leqslant \alpha\,|s-t|\,,$$

e che $\alpha \|k\|^{\star}_{\infty,1}$ sia strettamente minore di 1. Allora H è una contrazione: si ha infatti che

$$\|H(u) - H(v)\|_1 = \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,t)(f(t,u(t)) - f(f,v(t)))\,\mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_\Omega \int_\Omega |k(x,t)|\, \alpha\, |u(t) - v(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$
$$= \alpha \int_\Omega |u(t) - v(t)| \left(\int_\Omega |k(x,t)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \leqslant \alpha \|k\|^{\star}_{\infty,1} \|u - v\|_1 .$$

In particolare, esiste un unico $u \in L^1(\Omega)$ che risolve l'equazione

$$u = H(u).$$

Consideriamo il problema di trovare un $u \in L^1(\Omega)$ che verifichi

$$u = H(u) + y, \tag{4.4}$$

dove y è un elemento fissato di $L^1(\Omega)$. Dal momento che H è una contrazione, per il teorema 4.2 si ha che $f = I - H$ è un omeomorfismo da $L^1(\Omega)$ in sé, e che quindi per ogni y esiste uno ed un solo $u = G(y) \in L^1(\Omega)$ che risolve l'equazione (4.4). Inoltre la mappa $G = (I - H)^{-1} : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ è lipschitziana.

Riassumiamo quindi quanto appena dimostrato nella seguente proposizione.

Proposizione 4.5. *Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, e supponiamo che $f(x,s)$ sia lipschitziana di costante α rispetto alla seconda variabile. Sia inoltre $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, e tale che $\|k\|^{\star}_{\infty,1} < \infty$. Allora valgono i seguenti fatti*

i) *se $\alpha < 1$, allora l'operatore di Nemitski $T_f : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ definito da $f(x,s)$, è una contrazione per ogni $1 \leqslant p < \infty$, ed quindi $I + T_f$ è un omeomorfismo. In particolare, per ogni $y \in L^p(\Omega)$, l'equazione*

$$u = T_f(u) + y,$$

ha una unica soluzione $u \in L^p(\Omega)$.

ii) *se $\alpha \|k\|^{\star}_{\infty,1} < 1$, allora l'operatore di Hammerstein $H : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$, definito da $k(x,t)$ e da $f(x,s)$ è una contrazione, e quindi per ogni $y \in L^1(\Omega)$, l'equazione*

$$u = H(u) + y,$$

ha una unica soluzione $u \in L^1(\Omega)$.

4.3 Operatori vicini

Presentiamo ora una definizione, quella di *operatori vicini*, dovuto a Campanato ([Cam89]) e sviluppata nell'ambito della teoria delle equazioni alle derivate parziali ellittiche. La versione originale è stata enunciata nel contesto degli spazi di Hilbert, per poi venire generalizzata agli spazi di Banach ([Cam94]). Esiste anche una estensione ulteriore agli spazi vettoriali topologici dotati di una metrica completa ([Leo93]).

Come vedremo, la definizione di operatori vicini può essere ricondotta a quelle, già presentate, di contrazioni e di perturbazioni lipschitziane dell'identità. Ciò nonostante, la formulazione è comunque uno strumento che si presta a varie applicazioni: recenti sviluppi in tal senso sono stati effettuati da A. Tarsia ([Tar00, Tar04, Tar08]).

Nelle definizioni e dimostrazioni che seguono, indicheremo con X un insieme (privo di struttura), e con $(Y, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach.

Definizione 4.3. Siano $A,\ B : X \to Y$, con Y spazio di Banach. Diremo che A è *vicino* a B se esiste un $\alpha > 0$ ed un $k < 1$ tale che valga

$$\|B(x) - B(y) - \alpha(A(x) - A(y))\| \leqslant k \|B(x) - B(y)\| \quad \forall x, y \in X. \tag{4.5}$$

Osserviamo ogni funzione è vicina a sé stessa ($\alpha \in (0,1), k = 1 - \alpha$), e che la definizione non è simmetrica in A e B: se A è vicino a B, in generale non è detto che B sia vicino ad A.

Dalla definizione di funzioni vicine, segue immediatamente la seguente proprietà.

Proposizione 4.6. *Siano $A,\ B : X \to Y$, con Y uno spazio di Banach. Supponiamo che A sia vicino a B, con costanti α e k che verificano l'equazione* (4.5). *Allora valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$\|B(x) - B(y)\| \leqslant \frac{\alpha}{1-k} \|A(x) - A(y)\|, \tag{4.6}$$

$$\|A(x) - A(y)\| \leqslant \frac{1+k}{\alpha} \|B(x) - B(y)\|. \tag{4.7}$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi di vicinanza segue che

$$\begin{aligned} &\|B(x) - B(y)\| \leqslant \\ &\qquad \|B(x) - B(y) - \alpha(A(x) - A(y))\| + \alpha \|A(x) - a(y)\| \leqslant \\ &\qquad\qquad k \|B(x) - B(y)\| + \alpha \|A(x) - A(y)\|. \end{aligned}$$

E l'altra disuguaglianza segue in modo analogo:

$$\begin{aligned}\alpha \|A(x)-A(y)\| \leqslant \\ \|B(x)-B(y)-\alpha(A(x)-A(y))\| + \|B(x)-B(y)\| \leqslant \\ (1+k)\|B(x)-B(y)\|.\end{aligned}$$

□

Dalle disuguaglianze appena dimostrate, segue una interessante proprietà sulle fibre di A e B, dove per fibre intendiamo gli insiemi della forma $A^{-1}(a) = \{x \in X \,:\, A(x) = a\}$.

Corollario 4.7. *Siano A, $B : X \to Y$. Supponiamo che A sia vicino a B. Dati x, $y \in X$, si ha che $A(x) = A(y)$ se e solo se $B(x) = B(y)$. In particolare ogni fibra di A è una fibra di B (per un diverso punto), e viceversa: per ogni $a \in A(X)$, esiste un $b \in B(X)$ tale che $A^{-1}(a) = B^{-1}(b)$.*

In particolare, se B è iniettivo, anche A lo è.

Corollario 4.8. *Siano A, $B : X \to Y$. Supponiamo che A sia vicino a B. Allora A è iniettivo se e solo se B è iniettivo.*

Osservazione 4.2. Dalla proprietà di cui al corollario 4.7, segue che se A è vicino a B, è ben definita la mappa

$$\begin{array}{rccc} S: & B(X) & \longrightarrow & A(X), \\ & y & \longmapsto & A(B^{-1}(y)). \end{array}$$

Infatti, A manda tutti gli elementi di $B^{-1}(y)$ nella stessa immagine.

In realtà, non solo S è ben definita, ma sotto opportune ipotesi su $B(X)$, è anche un omeomorfismo.

Lemma 4.9. *Siano A, $B : X \to Y$, con A vicino a B, e supponiamo che $B(X)$ sia aperto. Allora $A \circ B^{-1} : B(X) \to A(X)$ è ben definito ed è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Siano α e k le costanti che verificano l'equazione (4.5). Indichiamo con $g = \alpha A \circ B^{-1}$: come già osservato, g è ben definita.

Siano y_1, $y_2 \in B(X)$, e x_1, x_2 due elementi di X tali che $B(x_1) = y_1$ e $B(x_2) = y_2$. Dato che A è vicino a B vale

$$\|B(x_1)-B(x_2)-\alpha(A(x_1)-A(x_2))\| \leqslant k\|B(x_1)-B(x_2)\|,$$

ovvero

$$\|y_1 - g(y_1) - (y_2 - g(y_2))\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|.$$

Dunque, $g - I$ è una contrazione: per il teorema 4.2, $I + (g - I) = g$ è un omeomorfismo tra $B(X)$ e $g(B(X)) = \alpha A(X)$. Dal momento che $\alpha \neq 0$, si ottiene la tesi. □

Osservazione 4.3. Se indichiamo con $S = A \circ B^{-1}$, abbiamo che $A(x) = S \circ B(x)$. Dunque, se A è vicino a B e $B(X)$ è aperto, esiste un omeomorfismo $S : B(X) \to A(X)$ tale che

$$A = S \circ B.$$

Come conseguenza, si ha il seguente teorema, enunciato originalmente da Campanato.

Teorema 4.10 (Campanato). *Siano $A, B : X \to Y$, con A vicino a B. Allora valgono i seguenti fatti*

i) A è iniettivo se e solo se B è iniettivo;

ii) A è surgettivo se e solo se B è surgettivo;

iii) A è bigettivo se e solo se B è bigettivo;

Dimostrazione. Il primo punto è il corollario 4.8. Gli altri seguono tutti dall'osservazione 4.3. □

Più in generale, A eredita da B tutte le proprietà che si conservano per omeomorfismi.

4.3.1 Un esempio: operatori di Nemitski vicini all'identità

Osservazione 4.4. Sia $T_f : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ un operatore di Nemitski definito da

$$T_f(u)(x) = f(x, u(x)),$$

e supponiamo che esista un $K > 0$ tale che

$$|f_s(x, s)| \leqslant K \quad \forall s, \text{ q.o } x;$$

di maniera che T_f risulti G-differenziabile, con differenziale $DT_f(u)[v] = T_{\partial_s f}(u)v$. Supponiamo che DT_f sia invertibile su tutto $L^p(\Omega)$, ovvero che esista un $\varepsilon > 0$ tale che $|f_s(x, s)| > \varepsilon$ per ogni s e per quasi ogni x (si veda la proposizione 2.6).

Osserviamo che, fissato un $x \in \Omega$, dalla continuità di $s \to f_s(x, s)$ e dalla maggiorazione precedente, segue che $f_s(x, s)$ ha segno costante. Possiamo quindi definire

$$g(x) = \operatorname{sgn} f_s(x, s) \in \{-1, 1\},$$

che risulta essere una funzione di $L^\infty(\Omega)$.

Sia $F = Mg$, ovvero

$$\begin{array}{rccc} F: & L^p(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega), \\ & u(x) & \longmapsto & g(x)u(x). \end{array}$$

Dato che $g(x)$ assume solo valori $+1$ e -1, F è chiaramente invertibile (è un isomorfismo isometrico). Vogliamo mostrare che T_f è vicino a F, con in quale risulterà dimostrato che T_f è un omeomorfismo.

Allora si ha che, per quasi ogni x e per ogni s, vale

$$K > g(x)f_s(x,s) > \varepsilon > 0,$$

da cui segue, preso un $\delta > 1$, che

$$1 > \frac{1}{\delta} > \frac{g(x)f_s(x,s)}{\delta K} > \frac{\varepsilon}{\delta K} > 0,$$

e quindi che

$$\left| g(x) - \frac{f_s(x,s)}{\delta K} \right| < 1 - \frac{\varepsilon}{\delta K} < 1.$$

Siano ora $u, v \in L^p(\Omega)$. Si ha che

$$\begin{aligned}
&\left\| F(u) - F(v) - \frac{1}{\delta K}(T_f(u) - T_f(v)) \right\|_p^p = \\
&\quad \int_\Omega \left| g(x)u(x) - g(x)v(x) - \frac{1}{\delta K}(f(x,u(x)) - f(x,v(x))) \right|^p \mathrm{d}x = \\
&\qquad \int_\Omega \left| g(x) - \frac{f_s(x,w(x))}{\delta K} \right|^p |g(x)u(x) - g(x)v(x)|^p \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema del valor medio a $f(x,s)$, ed il fatto che $|g(x)| = 1$.

Da quanto appena dimostrato segue che

$$\left\| F(u) - F(v) - \frac{1}{\delta K}(T_f(u) - T_f(v)) \right\|_p \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta K}\right) \|F(u) - F(v)\|_p \,,$$

e quindi T_f è vicino a F.

Non solo T_f è localmente iniettivo (come ci si sarebbe potuti aspettare dalle ipotesi sul differenziale), ma è globalmente un omeomorfismo.

4.4 Il teorema di Tarsia

Il seguente teorema è stato formulato da A. Tarsia in [Tar98].

Teorema 4.11 (Tarsia). *Sia X uno spazio topologico, Y un insieme, e Z un spazio di Banach. Sia $F : X \times Y \to Z$ una funzione che verifica le seguenti condizioni:*

1. *esiste* $(x_0, y_0) \in X \times Y$ *tali che* $F(x_0, y_0) = 0$,
2. *la mappa* $x \to F(x, y_0)$ *è continua in* x_0,
3. *esiste una funzione* $A : Y \to Z$, *due costanti* $\alpha > 0$ *e* $k \in (0, 1)$, *ed un intorno* U *di* x_0 *tali che,*

$$\|A(y_1) - A(y_2) - \alpha(F(x, y_1) - F(x, y_2))\| \leqslant k \|A(y_1) - A(y_2))\| \qquad \forall x \in U,\ y_1, y_2 \in Y,$$

   (ovvero, $F(x, \cdot)$ *è vicino a* A*, uniformemente per ogni* $x \in U$*),*
4. $A(Y)$ *è un intorno di* $z_0 = A(y_0)$.

Allora, per ogni $k \geqslant 0$ *e per ogni palla* $B(z_0, \sigma) \subset A(Y)$*, esiste un intorno* $V \subset U$ *di* x_0 *ed una funzione* $H : V \to A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ *che verifica*

$$F(x, H(x)) = 0 \quad \forall x \in V.$$

Inoltre, se A *è iniettiva, allora* $y = H(x)$ *è l'unica soluzione di* $F(x, y) = 0$*, per* $x \in V$ *e* $y \in A^{-1}(B(z_0, \sigma))$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & X \times A(Y) \subset X \times Z & \longrightarrow & Z, \\ & (x, z) & \longmapsto & F(x, A^{-1}(z)). \end{array}$$

Φ è ben definita: infatti se $y_1,\ y_2 \in A^{-1}(z)$, per il corollario 4.7, si ha che $F(x, y_1) = F(x, y_2)$.

Dunque, dalle ipotesi segue che

1. $\Phi(x_0, z_0) = F(x_0, y_0) = 0$,
2. $x \to \Phi(x, z_0) = F(x, y_0)$ è continua in x_0,
3. per l'osservazione 4.3, se $\Omega \subset A(Y)$ è un aperto, allora $\alpha\Phi_x(z) = \alpha\Phi(x, z)$ è una perturbazione lipschitziana dell'identità, e quindi Φ_x un omeomorfismo da Ω sulla sua immagine.

Indichiamo dunque con $h_x = I - \alpha\Phi_x$: per quanto detto h_x è una contrazione, con costante k indipendente da x.

Fissiamo un $\sigma > 0$ tale che $B(z_0, \sigma) \subset A(Y)$. Per continuità, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $V \subset U$ tale che

$$\|\Phi(x, z_0) - \Phi(x_0, z_0)\| = \|\Phi(x, z_0)\| < \varepsilon \quad \forall x \in V,$$

e quindi si ha che, per ogni $x \in V$,

$$\|h_x(z) - z_0\| \leqslant \|h_x(z) - h_x(z_0)\| + \|h_x(z_0) - z_0\| \leqslant \\ k\,\|z - z_0\| + \|\alpha\Phi(x, z_0)\| \leqslant k\sigma + \varepsilon\alpha.$$

quindi, se scegliamo $\varepsilon < \frac{1-k}{\alpha}\sigma$, si ha che $h_x(B(z_0, \sigma)) \subset B(z_0, \sigma)$.

Applichiamo il teorema delle contrazioni 4.1 a h_x, e otteniamo che per ogni $x \in V$ esiste un unico $z = \widetilde{H}(x) \in B(z_0, \sigma)$ tale che

$$z = h_x(z) \Rightarrow \Phi(x, \widetilde{H}(x)) = 0,$$

e quindi $F(x, A^{-1}\widetilde{H}(x)) = 0$. La funzione $H = A^{-1} \circ \widetilde{H}$ (dove con A^{-1} intendiamo una arbitraria sezione di A) è quella cercata.

Dal momento che abbiamo dimostrato che $\Phi(x, \cdot)$ è vicino all'identità, per la disuguaglianza (4.6), si ha che

$$\|z_1 - z_2\| \leqslant \frac{\alpha}{1-k} \|\Phi(x, z_1) - \Phi(x, z_2)\|,$$

e quindi si ha che

$$\left\|\widetilde{H}(x) - z_0\right\| \leqslant \frac{\alpha}{1-k} \left\|\Phi(x, \widetilde{H}(x)) - \Phi(x, z_0)\right\| = \frac{\alpha}{1-k} \|\Phi(x, z_0)\|,$$

e $\widetilde{H}$ è continua in x_0.

Se inoltre A è iniettiva, allora per il corollario 4.8, $y \to F(x, y)$ è iniettivo, e quindi la soluzione $H(x)$ è necessariamente unica.

□

Corollario 4.12. *Se Y è uno spazio topologico, e A^{-1} è continua in z_0, allora dalla dimostrazione del teorema precedente segue che la funzione $H = A^{-1}\widetilde{H}$ è continua in x_0.*

Più in generale, si possono ottenere condizioni molto ragionevoli per avere regolarità della soluzione.

Teorema 4.13 (Regolarità della soluzione). *Nelle ipotesi del teorema 4.11, supponiamo che A sia iniettiva. Indichiamo con $H : V \to A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ la funzione che verifica $F(x, H(x)) = 0$. Allora valgono le seguenti:*

(i) *se $x \to F(x, y)$ è iniettiva in V, allora anche H è iniettiva;*

(ii) *se Y è uno spazio topologico e A^{-1} è continua in z_0, allora H è continua in x_0;*

(iii) *se Y è uno spazio topologico e A^{-1} è continua su $B(z_0, \sigma)$, ed inoltre per ogni $y \in A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ si ha che $x \to F(x, y)$ è continua su V, allora H è continua su V;*

(iv) *se X e Y sono spazi metrici, e se A^{-1} ha modulo di continuità ω_1 su $B(z_0, \sigma)$, e per ogni $y \in A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ si ha che $x \to F(x, y)$ ha modulo di continuità ω_2, su V, allora H ha modulo di continuità $\omega_1 \circ \omega_2$ su V.*

Dimostrazione. Utilizziamo la notazione della dimostrazione del teorema 4.11. In particolare, $\Phi(x, z) = \Phi_x(z) = F(x, A^{-1}(z))$, $\Phi(x, \widetilde{H}(x)) = 0$ e $H = A^{-1}\widetilde{H}$.

(i) Le ipotesi su F implicano che

$$\left\|\Phi(x_1, \widetilde{H}(x_1)) - \Phi(x_2, \widetilde{H}(x_1))\right\| = \left\|\Phi(x2, \widetilde{H}(x_2)) - \Phi(x_2, \widetilde{H}(x_1))\right\|$$

Applichiamo la disuguaglianza (4.7) e otteniamo

$$\left\|\Phi(x_2, \widetilde{H}(x_2)) - \Phi(x_2, \widetilde{H}(x_1))\right\| \leqslant \frac{1+k}{\alpha} \left\|\widetilde{H}(x_2) - \widetilde{H}(x_1)\right\|$$

Di conseguenza, supponiamo che $H(x_1) = H(x_2)$. Dato che A è iniettiva, vale $\widetilde{H}(x_1) = \widetilde{H}(x_2)$, e quindi, per quanto appena dimostrato

$$\Phi(x_1, \widetilde{H}(x_1)) = \Phi(x_2, \widetilde{H}(x_1)).$$

Ma per definizione di Φ, questo implica

$$F(x_1, H(x_1)) = F(x_2, H(x_1)),$$

e dato che per ipotesi, $x \to F(x, y)$ è iniettiva, $x_1 = x_2$.

(ii) Nella dimostrazione del teorema 4.11, abbiamo già dimostrato che $\widetilde{H}$ è continua in x_0, e quindi se A^{-1} è continua in $z_0 = B(y_0)$, $H = A^{-1}\widetilde{H}$ è continua in x_0 (infatti, $\widetilde{H}(x_0) = z_0$).

(iii) Dalla disuguaglianza (4.6) segue che

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{H}(x_1) - \widetilde{H}(x_2)\right\| &\leqslant \frac{\alpha}{1-k} \left\|\Phi(x_1, \widetilde{H}(x_1)) - \Phi(x_1, \widetilde{H}(x_2))\right\| \\ &= \frac{\alpha}{1-k} \left\|\Phi(x_2, \widetilde{H}(x_2)) - \Phi(x_1, \widetilde{H}(x_2))\right\| \\ &= \frac{\alpha}{1-k} \left\|F(x_1, H(x_2)) - F(x_2, H(x_2))\right\|.\end{aligned}$$

Dunque, se $x \to F(x, y)$ è continua in V, allora anche $\widetilde{H}(x)$ lo è. Dato che abbiamo supposto che anche A^{-1} sia continua, otteniamo la continuità di $H = A^{-1}\widetilde{H}$.

(iv) La dimostrazione è analoga a quella del punto precedente, dato che dalla disuguaglianza dimostrata segue che se $x \to F(x,y)$ ha modulo di continuità ω_2, allora anche $\widetilde{H}$ ha ω_2 come modulo di continuità, e di conseguenza $H = A^{-1}\widetilde{H}$ ha modulo di continuità $\omega_1 \circ \omega_2$.

□

È semplice osservare che le ipotesi del teorema di Deimling 4.4 implicano quelle del teorema di Tarsia: infatti dall'equazione (4.2) segue che

$$\|F(x,y) - F(x,y') - T(y-y')\| \leqslant \underbrace{k\left\|T^{-1}\right\|}_{k_0} \|T(y-y')\|,$$

e $k_0 < 1$: dunque, utilizzando il linguaggio degli operatori vicini, si ha che $y \to F(x,y)$ è vicina all'operatore T, uniformemente in x.

Viceversa, se $F(x,y)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Tarsia, la funzione

$$\Phi(x,z) = F(x, A^{-1}(z)),$$

definita nella dimostrazione di 4.11 verifica le ipotesi del teorema di Deimling 4.4 con $T = I$, e la soluzione di $F(x,H(x)) = 0$ è data da una sezione di A composta con la soluzione di $\Phi(x,K(x)) = 0$. Dunque, è possibile dimostrare il teorema di Tarsia attraverso il teorema di Deimling: i due risultati sono quindi equivalenti. È interessante notare altresì come strumenti diversi, provenienti da problemi diversi, si siano sviluppati nella stessa direzione.

Osservazione 4.5. Utilizzando la generalizzazione della teoria degli operatori vicini di Leonardi ([Leo93]), è possibile ottenere una diretta generalizzazione del risultato di Tarsia, al caso degli spazi vettoriali topologici dotati di una metrica completa e invariante per traslazione, o *F-spazi*. La dimostrazione segue passo passo quella fatta per il caso Banach (che ne è ovviamente un caso particolare), per cui la omettiamo.

Teorema 4.14 (Tarsia generalizzato). *Sia X uno spazio topologico, Y un insieme, e Z un F-spazio dotato di distanza d. Sia $F : X \times Y \to Z$ una funzione che verifica le seguenti condizioni:*

1. *esiste $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tali che $F(x_0, y_0) = 0$,*

2. *la mappa $x \to F(x, y_0)$ è continua in x_0,*

3. *esiste una funzione $A : Y \to Z$, due costanti $\alpha > 0$ e $k \in (0,1)$, e un intorno U di x_0 tali che*

$$d\left(A(y_1) - \alpha F(x,y_1), A(y_2) - \alpha F(x,y_2)\right) \leqslant k d(A(y_1), A(y_2)) \qquad \forall x \in U,\ y_1, y_2 \in Y,$$

(ovvero, $F(x,\cdot)$ è vicino a A, uniformemente per ogni $x \in U$),

4. *$A(Y)$ è un intorno di $z_0 = A(y_0)$.*

Allora esiste una palla $B(z_0, \sigma) \subset A(Y)$ ed un intorno $V \subset U$ di x_0 tali che esiste una funzione $H : V \to A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ che verifica

$$F(x, H(x)) = 0 \quad \forall x \in V.$$

Inoltre valgono le seguenti

(i) se $x \to F(x, y)$ è iniettiva per ogni in V, allora anche H è iniettiva;

(ii) se Y è uno spazio topologico e A^{-1} è continua in z_0, allora H è continua in x_0;

(iii) se Y è uno spazio topologico e A^{-1} è continua su $B(z_0, \sigma)$, ed inoltre per ogni $y \in A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ si ha che $x \to F(x, y)$ è continua su V, allora H è continua su V;

(iv) se X e Y sono spazi metrici, e se A^{-1} ha modulo di continuità ω_1 su $B(z_0, \sigma)$, e per ogni $y \in A^{-1}(B(z_0, \sigma))$ si ha che $x \to F(x, y)$ ha modulo di continuità ω_2 su V, allora H ha modulo di continuità $\omega_1 \circ \omega_2$ su V.

Osservazione 4.6. Ci domandiamo ora, data una funzione $F : X \times V \to Z$ continua e debolmente G-differenziabile nella seconda variabile, in che modo sia possibile trovare stime della forma (4.2), al fine di applicare i teoremi presentati in questo capitolo. Se T è un operatore lineare, e V è convesso, possiamo applicare il teorema 1.10 e ottenere

$$\|F(x, y) - F(x, y') - T(y - y')\| \leqslant \sup_{y \in V} \|D_2F(x, y) - T\| \, \|y - y'\| \, .$$

Ricordiamo che, per una conseguenza del teorema 4.2, se T è invertibile, e $\|D_2F(x, y) - T\| < 1/ \|T^{-1}\|$, allora anche $D_2F(x, y)$ è invertibile.

Ad esempio, se $D_2F(x_0, y_0)$ è invertibile per un qualche (x_0, y_0), e esistono due intorni aperti $\widetilde{U} \subset X$ e $\widetilde{V} \subset V$ rispettivamente di x_0 e y_0, tali che

$$\sup_{(x,y) \in \widetilde{U} \times \widetilde{V}} \left\| D_2F(x, y) D_2F(x_0, y_0)^{-1} - I \right\| < 1,$$

allora possiamo applicare il teorema di Deimling o quello di Tarsia e risolvere il problema della funzione implicita.

Capitolo 5

Teorema di locale surgettività di Ekeland

Presentiamo un risultato di Ekeland ([Eke11]), nel contesto, semplificato rispetto alla formulazione originale, delle applicazioni Gâteaux-differenziabili tra spazi di Banach. Facendo l'ipotesi che il differenziale abbia un'inversa destra in tutto un intorno dell'origine, e che tale famiglia di inverse destre sia limitata in norma, si può avere un risultato di locale surgettività. Dunque, la dicitura teorema di funzione inversa dell'articolo originale, è in un qualche senso imprecisa.

5.1 Principio variazionale di Ekeland

Presentiamo un risultato di Ekeland ([Eke74]), che ci fornirà un utile strumento per dimostrare il desiderato teorema di locale surgettività.

Sia V uno spazio metrico completo, dotato di distanza $d : V \times V \to \mathbb{R}$. Sia $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funzionale semicontinuo inferiormente, non costantemente $+\infty$.

Definizione 5.1. Un funzionale $F : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si dice *semicontinuo inferiormente (s.c.i.) in* $x_0 \in V$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x_0 tale che $F(x) \geqslant F(x_0) - \varepsilon$, per ogni $x \in U$.

F si dice *semicontinuo inferiormente (s.c.i.)* se è semicontinuo inferiormente per ogni $x_0 \in V$.

Se supponiamo che F sia limitato inferiormente, ovvero che $\inf F > -\infty$, ma non facciamo altre ipotesi di compattezza, in generale F non raggiungerà il suo limite inferiore. Ma, per la definizione di $\inf$, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $u \in V$ tale che

$$\inf F \leqslant F(u) \leqslant \inf F + \varepsilon. \tag{5.1}$$

Teorema 5.1 (Principio variazionale di Ekeland). *Sia V uno spazio metrico completo, e F un funzionale s.c.i. non costantemente $+\infty$ e limitato inferiormente. Per ogni $u \in V$, per ogni $\varepsilon \geqslant F(u) - \inf F$ e per ogni $\lambda > 0$, esiste un punto $v \in V$ tale che*

$$F(v) \leqslant F(u), \tag{5.2}$$

$$d(u, v) \leqslant \lambda, \tag{5.3}$$

$$\forall w \neq v, \qquad F(w) > F(v) - \tfrac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w), \tag{5.4}$$

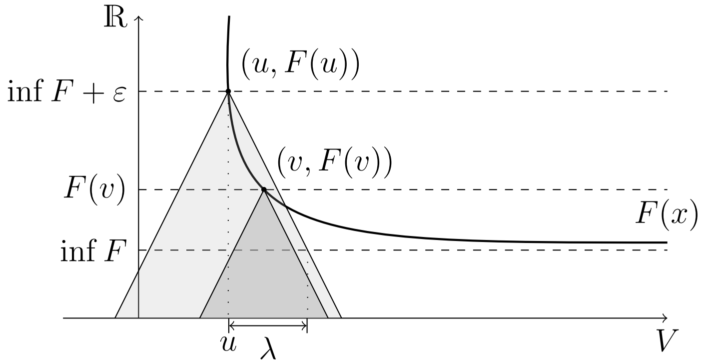

Figura 5.1: La tesi del principio variazionale di Ekeland rappresentata graficamente.

Una interpretazione geometrica del teorema 5.1 viene data nella figura 5.1: consideriamo il grafico di F, contenuto in $V \times \mathbb{R}$, ed un cono

$$C(u) = \left\{ (v, a) \in V \times \mathbb{R} \,|\, a - F(u) \leqslant -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, v) \right\}.$$

Come si vede, l'equazione (5.4) è equivalente a dire che il punto $v \in V$ trovato, verifica la proprietà che $(v, F(v))$ è l'unico elemento dell'intersezione di $C(v)$ con il grafico di F. Le prime due equazioni, (5.2) e (5.3), assicurano che è possibile trovare un tale v di maniera che $C(v) \subset C(u)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede di definire un ordinamento sull'insieme $V \times \mathbb{R}$. Sia $\alpha > 0$ e per ogni $(v, a) \in V \times \mathbb{R}$ definiamo l'insieme

$$C^{\alpha}(v, a) = \{ (w, b) \in V \times \mathbb{R} \,|\, b - a \leqslant -\alpha d(v, w) \}. \tag{5.5}$$

Osserviamo che $C^{\alpha}(v, a)$ è chiuso per ogni $(v, a) \in V \times \mathbb{R}$, e che $(v, a) \in C^{\alpha}(v, a)$. In figura 5.2 sono rappresentati due insiemi della forma $C^{\alpha}(v, a)$ e $C^{\alpha}(w, b)$, per due punti distinti di $V \times \mathbb{R}$.

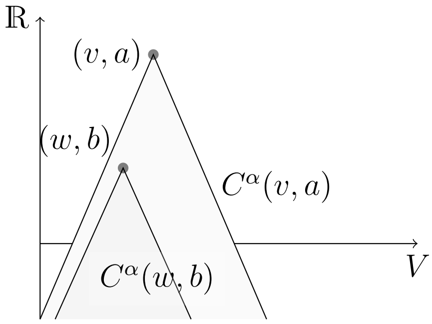

Figura 5.2: $C^\alpha(v,a)$ e $C^\alpha(w,b)$.

Possiamo ora trasferire la naturale relazione d'ordine su $\mathcal{P}(V \times \mathbb{R})$ data dall'inclusione, a $V \times \mathbb{R}$, nella seguente maniera:

$$(w,b) \preccurlyeq_\alpha (v,a) \text{ se } C^\alpha(w,b) \subseteq C^\alpha(v,a). \tag{5.6}$$

Proposizione 5.2. *$\preccurlyeq_\alpha$ definita come sopra è una relazione di ordine su $V \times \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \iota: & V \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{P}(V \times \mathbb{R}), \\ & (v,a) & \longmapsto & C^\alpha(v,a), \end{array}$$

Verifichiamo che ι è iniettiva: se $C^\alpha(w,b) = C^\alpha(v,a)$, si ha che $(v,a) \in C^\alpha(w,b)$ e $(w,b) \in C^\alpha(v,a)$, e quindi

$$\begin{aligned} a - b &\leqslant -\alpha\, d(w,v) \leqslant 0, \\ b - a &\leqslant -\alpha\, d(v,w) \leqslant 0, \end{aligned}$$

e dunque $a = b$ e $d(v,w) = 0$.

La relazione definita in (5.6) è proprio il pull-back attraverso ι della relazione $\subseteq$ definita su $\mathcal{P}(V \times \mathbb{R})$: dato che ι è iniettiva, abbiamo che la relazione $\preccurlyeq_\alpha$ su $V \times \mathbb{R}$ è una relazione d'ordine.

□

Proposizione 5.3. *L'insieme $C^\alpha(v,a)$ è uguale a*

$$C^\alpha(v,a) = \{(w,b) \in V \times \mathbb{R} \,|\, (w,b) \preccurlyeq_\alpha (v,a)\}.$$

Dimostrazione. Dal momento che $(w,b) \in C^\alpha(w,b)$, segue immediatamente che se $(w,b) \preccurlyeq_\alpha (v,a)$, allora $(w,b) \in C^\alpha(v,a)$.

Viceversa, se $(w, b) \in C^\alpha(v, a)$, si ha che ogni elemento (z, c) di $C^\alpha(w, b)$, è $\preccurlyeq_\alpha$-minore di (w, b). Dunque si ha che

$$\begin{aligned} c - b &\leqslant -\alpha d(z, w), \\ b - a &\leqslant -\alpha d(w, v), \end{aligned}$$

e quindi

$$c - a \leqslant -\alpha(d(z, w) + d(w, v)) \leqslant -\alpha d(z, v),$$

con il quale abbiamo dimostrato che $(z, c) \in C^\alpha(v, a)$, e dunque $C^\alpha(w, b) \subset C^\alpha(v, a)$. □

Dimostriamo ora la proprietà chiave dell'ordinamento dato da $\preccurlyeq_\alpha$, e che ci servirà nella dimostrazione del teorema 5.1.

Lemma 5.4. *Sia S un sottoinsieme chiuso di $V \times \mathbb{R}$ tale che*

$$\exists m \in \mathbb{R} \ : \ (v, a) \in S \Rightarrow a \geqslant m.$$

Allora, per ogni $(v_0, a_0) \in S$, esiste un elemento $(\bar{v}, \bar{a}) \in S$ che è minimale e minore di (v_0, a_0) rispetto all'ordinamento $\preccurlyeq_\alpha$.

Dimostrazione. Definiamo per induzione una successione $(v_n, a_n) \in S$ per $n \in \mathbb{N}$, avente come primo elemento (v_0, a_0) delle ipotesi. Dato (v_n, a_n), definiamo

$$\begin{aligned} S_n = C^\alpha(v_n, a_n) \cap S = \{(v, a) \in S \mid (v, a) \preccurlyeq_\alpha (v_n, a_n)\}, \\ m_n = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \exists v \in V \text{ t.c. } (v, a) \in S_n\}. \end{aligned}$$

Ovviamente, $m_n \geqslant m$. Definiamo quindi (v_{n+1}, a_{n+1}) come un qualsiasi punto di S_n che verifichi

$$a_{n+1} \leqslant m_n + \frac{a_n - m_n}{2}.$$

In figura 5.3 è rappresentato un passo dell'induzione che definisce (v_n, a_n). Tutti gli S_n sono sottoinsiemi chiusi e non vuoti di S, e $S_{n+1} \subset S_n$. Inoltre, per costruzione,

$$|a_{n+1} - m_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} |a_n - m_n| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} |a_0 - m| .$$

Di conseguenza, per ogni $(v, a) \in S_{n+1}$, si ha che

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a| &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} |a_0 - m| \\ d(v_{n+1}, v) &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \frac{|a_0 - m|}{\alpha}; \end{aligned}$$

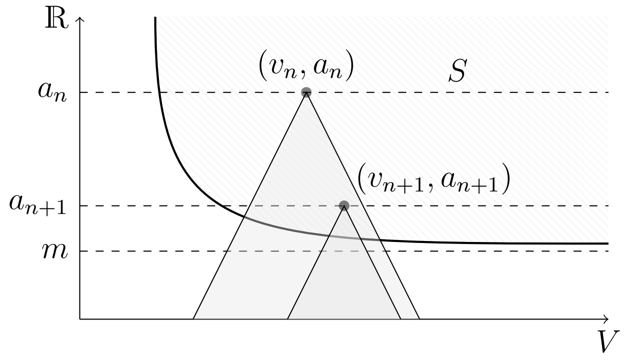

Figura 5.3: Un passo dell'induzione che definisce (v_n, a_n).

e quindi il diametro di S_n (rispetto alla distanza prodotto su $V \times \mathbb{R}$) è finito e tende a zero per $n \to \infty$. Per completezza di $V \times \mathbb{R}$ si ha che gli insiemi S_n hanno esattamente un punto in comune, che indichiamo con $(\bar{v}, \bar{a})$:

$$\{(\bar{v}, \bar{a})\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Per costruzione, $(\bar{v}, \bar{a}) \preccurlyeq_\alpha (v_n, a_n)$ per ogni n, ed quindi anche per $n = 0$:

$$(\bar{v}, \bar{a}) \preccurlyeq_\alpha (v_0, a_0).$$

Verifichiamo ora che l'elemento trovato è minimale in S: supponiamo che esista un $(\widetilde{v}, \widetilde{a}) \in S$ tale che $(\widetilde{v}, \widetilde{a}) \preccurlyeq_\alpha (\bar{v}, \bar{a})$. Per transitività, $(\widetilde{v}, \widetilde{a}) \preccurlyeq_\alpha (v_n, a_n)$ per ogni n, e quindi $(\widetilde{v}, \widetilde{a})$ appartiene a S_n per ogni n. Ma siccome il diametro di S_n tende a zero, e $(\widetilde{v}, \widetilde{a}) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$, necessariamente deve essere che $(\widetilde{v}, \widetilde{a}) = (\bar{v}, \bar{a})$. $\square$

Se osserviamo la figura 5.3, possiamo descrivere in maniera informale (ma più facilmente visualizzabile) la procedura con il quale abbiamo ottenuto il punto $(\bar{v}, \bar{a}) \in S$ come segue: preso l'elemento di partenza (v_0, a_0), scegliamo un altro punto che appartenga sia ad S che all'insieme $C^\alpha(v_0, a_0)$. Questa successione (scelta in maniera che lo schema iterativo converga) non tende ad un minimo di S (che potrebbe non esistere), ma al limite l'insieme $C^\alpha(\bar{v}, \bar{a})$ sarà tutto fuori da S (a parte -ovviamente- il punto base $(\bar{v}, \bar{a})$).

Possiamo ora dimostrare il teorema 5.1.

Dimostrazione. Sia S l'epigrafo del funzionale F:

$$S = \{(v, a) \mid v \in v,\ a \geqslant F(v)\}.$$

Per la semi-continuità è un sottoinsieme chiuso di $V \times \mathbb{R}$. Scegliamo $\alpha = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ nella definizione di $\preccurlyeq_\alpha$, e applichiamo il lemma 5.4 a S, scegliendo come punto iniziale $(v_0, a_0) = (u, F(u))$. Otteniamo quindi un elemento (v, a) di S, minimale rispetto a $\preccurlyeq_\alpha$, che soddisfa:

$$(v, a) \preccurlyeq_\alpha (u, F(u)). \tag{5.7}$$

Come abbiamo già avuto modo di osservare, $C^\alpha(v, a) \cap S = \{(v, a)\}$. Ma dal momento che S è l'epigrafo di F, e $(v, a) \in S$ abbiamo che $a \geqslant F(v)$, e quindi $F(v) - a \leqslant 0 = -\alpha\, d(v, v)$, per cui $(v, F(v)) \preccurlyeq_\alpha (v, a)$. Per la minimalità, deve essere $a = F(v)$, e quindi otteniamo dall'equazione (5.7) che

$$F(v) - F(u) \leqslant -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, v) \leqslant 0; \tag{5.8}$$

il che prova la (5.2).

Dal momento che $(v, F(v))$ è minimale rispetto a $\preccurlyeq_\alpha$, se $(w, b) \in S$ è un elemento diverso da $(v, F(v))$, allora (w, b) non appartiene a $C^\alpha(v, F(v))$:

$$\forall (w, b) \in S \setminus \{(v, F(v)\},\ (w, b) \notin C^\alpha(v, F(v));$$

e quindi

$$(w, b) \in S \setminus \{(v, F(v)\} \Rightarrow b - F(v) > -\frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v). \tag{5.9}$$

Da quest'ultima equazione, scegliendo $b = F(w)$, otteniamo la (5.4):

$$\forall w \neq v, \quad F(w) > F(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w).$$

Per la (5.1), abbiamo che $F(v) \geqslant F(u) - \varepsilon$, e sostituendo nella (5.8) otteniamo

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, v) \leqslant \varepsilon$$

dalla quale segue immediatamente l'ultima disuguaglianza rimasta da dimostrare (5.3).

□

5.2 Teorema di locale surgettività

Riportiamo ora l'enunciato e la dimostrazione originale del teorema di surgettività locale di Ekeland.

Teorema 5.5 (Ekeland). *Siano X e Y spazi di Banach, e $F : X \to Y$ una mappa continua e differenziabile secondo Gâteaux, tale che $F(0) = 0$. Supponiamo che il* *differenziale $DF(x)$ abbia un'inversa destra $R(x)$, che sia uniformemente limitata in un intorno di 0:*

$$\exists \rho > 0 \text{ tale che } \sup_{\|x\| \leqslant \rho} \|R(x)\| \leqslant m.$$

Allora, per ogni $\bar{y} \in B^Y_{\rho/m}$, e per ogni $\mu > m$, esiste un $\bar{x} \in B^X_\rho$ tale che

$$\|\bar{x}\| \leqslant \mu \|\bar{y}\|,$$
$$F(\bar{x}) = \bar{y}.$$

Dimostrazione. Fissiamo un $\bar{y} \in B^Y_{\rho/m}$, e consideriamo il funzionale $f : X \to \mathbb{R}$ definito da

$$f(x) = \|F(x) - \bar{y}\|.$$

Ovviamente, f è continuo e maggiore uguale di zero, per cui possiamo applicare il principio variazionale di Ekeland (teorema 5.1), scegliendo $u = 0$ (e quindi $f(0) = \|\bar{y}\| = \varepsilon$). Per ogni $\lambda > 0$ esiste dunque un punto $\bar{x} \in X$ tale che:

$$f(\bar{x}) \leqslant f(0),$$
$$\|\bar{x}\| \leqslant \lambda,$$
$$\forall x \in X, \quad f(x) \geqslant f(\bar{x}) - \tfrac{\|\bar{y}\|}{\lambda} \|x - \bar{x}\|.$$

Scegliendo $\lambda = \mu \|\bar{y}\|$, otteniamo

$$f(\bar{x}) \leqslant f(0), \tag{5.10}$$
$$\|\bar{x}\| \leqslant \mu \|\bar{y}\|, \tag{5.11}$$
$$\forall x \in X, \quad f(x) \geqslant f(\bar{x}) - \tfrac{1}{\mu} \|x - \bar{x}\|. \tag{5.12}$$

Dal momento che $\bar{y} \in B^Y_{\rho/m}$, ovvero $m < \rho \|\bar{y}\|^{-1}$, possiamo, senza perdere di generalità, scegliere $\mu < \rho \|\bar{y}\|^{-1}$, in maniera che $\|\bar{x}\| < \rho$. Non ci resta che dimostrare che $f(\bar{x}) = 0$, ovvero che $F(\bar{x}) = \bar{y}$.

Riscriviamo la disuguaglianza (5.12) ponendo $x = \bar{x} + tu$, dove $t > 0$ e $u \in X$:

$$\forall t > 0, \forall u \in X, \quad \frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} \geqslant -\frac{1}{\mu} \|u\|. \tag{5.13}$$

Per la proposizione 1.8, la funzione $t \to \|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\|$ è derivabile a destra nel punto $t = 0$, e la sua derivata è data da

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|F(\bar{x} + tu) - \bar{y}\| - \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|}{t} = \langle y^*, \, DF(\bar{x})u \rangle,$$

per un opportuno $y^* \in Y^*$ di norma 1 e tale che $\langle y^*, \, F(\bar{x}) - \bar{y} \rangle = \|F(\bar{x}) - \bar{y}\|$.

Facendo tendere $t \to 0$ in (5.13), otteniamo

$$\forall u \in X, \quad \langle y^*, \, DF(\bar{x})u \,\rangle \geqslant -\frac{1}{\mu} \|u\| \,.$$

Scegliendo ora $u = -R(\bar{x}) \, (F(\bar{x}) - \bar{y})$, in maniera che $DF(\bar{x})u = - \, (F(\bar{x}) - \bar{y})$, otteniamo dalla precedente

$$\|F(\bar{x}) - \bar{y}\| = - \, \langle y^*, \, - \, (F(\bar{x}) - \bar{y}) \,\rangle = - \, \langle y^*, \, DF(\bar{x})u \,\rangle \leqslant \\ \frac{1}{\mu} \|u\| \leqslant \frac{1}{\mu} \|R(\bar{x})\| \, \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \leqslant \frac{m}{\mu} \|F(\bar{x}) - \bar{y}\| \,.$$

Col quale otteniamo $\|F(\bar{x}) - \bar{y}\| = 0$, dato che avevamo supposto $\mu > m$. □

5.3 Teorema di funzione implicita

Riformuliamo ora il risultato come teorema della funzione implicita: come al solito, il precedente teorema 5.5 risulterà essere un corollario del nuovo enunciato.

Teorema 5.6 (Funzione implicita). *Siano X, Y, Z spazi di Banach, e $F : X \times Y \to Z$ una mappa continua tale che $F(0,0) = 0$.*

Supponiamo inoltre che l'applicazione $y \mapsto F(x,y)$ sia differenziabile secondo Gâteaux per ogni $x \in Y$, e che il suo differenziale $D_2F(x,y)$ abbia un'inversa destra $R(x,y)$, che sia uniformemente limitata in un intorno di 0:

$$\exists \rho > 0 \text{ tale che } \sup_{\|(x,y)\| \leqslant \rho} \|R(x,y)\| \leqslant m.$$

Allora esiste un intorno $U \subset X$ di 0 tale che, per ogni $\bar{x} \in U$ e per ogni $\mu > m$, esiste un $\bar{y} \in B^Y_\rho$ tale che

$$\begin{aligned} \|\bar{y}\| &\leqslant \mu \, \|F(\bar{x}, 0)\| \,, \\ F(\bar{x}, \bar{y}) &= 0. \end{aligned}$$

In particolare, la mappa $\bar{x} \to \bar{y}$ è continua in 0.

Dimostrazione. Fissiamo un $x \in X$, e consideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} \varphi_x : & Y & \longrightarrow & Z, \\ & y & \longmapsto & F(x,y) - F(x,0). \end{array}$$

φ_x è continua, $\varphi_x(0) = 0$, ed inoltre è G-differenziabile ed il suo differenziale è dato da

$$D\varphi_x(y) = D_2F(x,y).$$

In particolare, $D\varphi_x(y)$ ha come inversa destra $R(x, y)$, che è uniformemente limitata in un intorno di 0 per ipotesi.

Possiamo applicare il teorema di Ekeland 5.5, e otteniamo che per ogni $\bar{z} \in B^Z_{\rho/m}$ e per ogni $\mu > m$, esiste un $\bar{y} \in B^Y_\rho$ tale che

$$\|\bar{y}\| \leqslant \mu \|\bar{z}\|,$$
$$\varphi_x(\bar{y}) = \bar{z}.$$

Dal momento che F è continua, e che $F(0,0) = 0$, possiamo trovare un intorno $U \subset X$ di 0 tale che, per ogni $x \in U$, si abbia

$$\|F(x,0)\| < \frac{\rho}{m}.$$

Per ogni $\bar{x} \in U$, possiamo quindi scegliere $\bar{z} = -F(x,0)$, e otteniamo che

$$\varphi_{\bar{x}}(\bar{y}) = -F(x,0) \Rightarrow F(\bar{x},\bar{y}) = 0,$$

e abbiamo ottenuto la tesi. □

Osservazione 5.1. Sia F come nelle ipotesi del teorema 5.5. Consideriamo quindi la funzione $G : X \times Y \to Y$ definita come

$$G(x,y) = F(x) - y.$$

Allora si ha che G è continua, $G(0,0) = 0$. La funzione $x \to G(x,y)$ è G-differenziabile e $D_1G(x,y) = DF(x)$.

Quindi, G verifica tutte le ipotesi del teorema 5.6: si ha quindi che esiste un intorno $U \subset Y$ di 0 tale che, per ogni $\bar{y} \in U$ e per ogni $\mu > m$ esiste un $\bar{x} \in B^X_\rho$ tale che

$$\|\bar{x}\| \leqslant \mu \|\bar{y}\|,$$
$$G(\bar{x},\bar{y}) = F(\bar{x}) - \bar{y} = 0.$$

Inoltre osserviamo che l'intorno U può essere preso esattamente uguale a $B^X_{\rho/m}$: infatti $F(0,y) = -y$, e U è proprio un intorno nel quale vale

$$\|F(0,y)\| = \|y\| < \frac{\rho}{m}.$$

Dunque, il teorema 5.6 implica il teorema 5.5.

Bibliografia

[AP95] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, Corrected reprint of the 1993 original.

[AS68] V. I. Averbuh and O. G. Smoljanov, *Different definitions of derivative in linear topological spaces*, Uspehi Mat. Nauk **23** (1968), no. 4 (142), 67–116.

[AVZ96] J. Appell, A. Vignoli, and P. P. Zabrejko, *Implicit function theorems and nonlinear integral equations*, Exposition. Math. **14** (1996), no. 5, 385–424.

[Bre83] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*, Masson, 1983.

[Cam89] Sergio Campanato, *A Cordes type condition for nonlinear nonvariational systems*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5) **13** (1989), no. 1, 307–321.

[Cam94] ———, *On the condition of nearness between operators*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **167** (1994), 243–256.

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, vol. 478, Springer-Verlag Berlin, 1985.

[Die60] J. A. Dieudonne, *Treatise on Analysis*, Treatise on Analysis, no. v. 1, Academic Press, 1960.

[Eke74] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353.

[Eke11] Ivar Ekeland, *An inverse function theorem in Fréchet spaces*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **28** (2011), no. 1, 91–105.

[Ham82] Richard S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), no. 1, 65–222.

[HG27] T. H. Hildebrandt and Lawrence M. Graves, *Implicit functions and their differentials in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), no. 1, 127–153.

[Jit78] K. Jittorntrum, *An implicit function theorem*, J. Optim. Theory Appl. **25** (1978), no. 4, 575–577.

[Kum80] S. Kumagai, *Technical comment to: "An implicit function theorem" by K. Jittorntrum*, J. Optim. Theory Appl. **31** (1980), no. 2, 285–288.

[KZPS76] M. A. Krasnosel'skiĭ, P. P. Zabreĭko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskiĭ, *Integral operators in spaces of summable functions*, Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976, Translated from the Russian by T. Ando, Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids, Mechanics: Analysis.

[Leo93] Salvatore Leonardi, *On the Campanato nearness condition*, Matematiche (Catania) **48** (1993), no. 1, 179–181 (1994).

[Roc74] R. Tyrrell Rockafellar, *Conjugate duality and optimization*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1974, Lectures given at the Johns Hopkins University, Baltimore, Md., June, 1973, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 16.

[Shv11] Ilya Shvartsman, *On stability of minimizers in convex programming*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications (2011), In Press, Corrected Proof.

[Tar98] Antonio Tarsia, *Differential equations and implicit function: a generalization of the near operators theorem*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **11** (1998), no. 1, 115–133.

[Tar00] ———, *Recent developments of the Campanato theory of near operators*, Matematiche (Catania) **55** (2000), no. suppl. 2, 197–208 (2001), Partial differential equations (Italian) (Pisa, 2000).

[Tar04] ———, *On Cordes and Campanato conditions*, Arch. Inequal. Appl. **2** (2004), no. 1, 25–39.

[Tar08] ———, *Near operators theory and fully nonlinear elliptic equations*, J. Global Optim. **40** (2008), no. 1-3, 443–453.

[Vät96] Martin Väth, *A general theorem on continuity and compactness of the Uryson operator*, J. Integral Equations Appl. **8** (1996), no. 3, 379–389.

[Yos80] K. Yosida, *Functional Analysis: Sixth Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Zei86] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications pt. 1: Fixed-point theorems*, Springer-Verlag, 1986.

Ringraziamenti

a Salvatore e a Anna, perché mi hanno insegnato ad essere felice di quello che so fare, senza per questo perdere il desiderio di sfidare i limiti che credevo di avere;

al prof. Abbondandolo, per il sostegno e gli stimoli forniti;
al prof. Tarsia, per le discussioni estive e per tutto l'utilissimo materiale che mi ha procurato;

a Francesca, per la forza straordinaria con la quale mi è stata vicina.

Scrivendo questa tesi ho realizzato -forse per la prima volta- quanto la matematica sia fatta anche di fatica, sudore, impegno. Le seguenti persone, anche se non hanno contribuito a questa piccola opera, sono state necessarie per mantenere la mia lucidità mentale, il mio benessere fisico, ed il mio equilibrio psicologico e per questo meritano tutto il mio affetto ed il mio profondo ringraziamento per ciò che hanno condiviso con me.

Ordinati senza un criterio,

Kia; Lance e Cecio; Pimpa, Anto, Michele ed il MAI; Nicola, Dario, Gabbo; Boris, Dipim, Phasa, Xhank, Pf, Alessio, Ciccio, Lik, Stella, Vale, Alli, Servo, Beppe, Cinzia, Danilo, le Serene, Criss e tutti i compagni e le compagne di Rebeldia; Luke, Sdale, MPM, Porto, Rosita, Elis e l'ex-Cervinistan; l'Argentino; Valeria e Martina; Giorgio, Leo, Taz e tutto il PHC; Miguel, Clara e Dw; Kitta; Rebeca, Peter e i Traffic Mutants; Isaia, Fausto e la gente di San Casciani; Agnese, Aurora, Sapiens, Paolo, Bob, Ceci, Irene, Cappe, Francesco; Laila; Lotta; Luciano e Grazia; tutti gli scacchisti di Scacchi Insorgenti.

Un ringraziamento speciale va inoltre a Maurizio e Antonella, per lo splendido lavoro che hanno sicuramente fatto nello stampare e rilegare questa tesi, e per le interminabili chiacchierate assieme.