

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

TESI DI LAUREA

TEOREMA DI PUNTO FISSO DI
POINCARÉ-BIRKHOFF

CANDIDATO: Davide Schipani

RELATORE: Chiar.mo Prof. Alberto Abbondandolo

CONTRORELATORE: Chiar.mo Prof. Marco Abate

Alla mia famiglia

Indice

1	Introduzione	4
2	Il Teorema	7
3	L'indice	12
4	Dimostrazione del teorema	15
	Bibliografia ragionata	27
	Bibliografia	28

Capitolo 1

Introduzione

Il teorema di Poincaré-Birkhoff è un risultato di notevole importanza per alcuni filoni della matematica contemporanea, quali i sistemi dinamici e alcune branche della geometria; recentemente ad esempio è stato utilizzato da Franks [17] per dimostrare l'esistenza su superfici di infinite geodetiche periodiche.

Anche chiamato Ultimo teorema geometrico di Poincaré, perché da lui formulato come congettura e dimostrato in alcuni casi speciali poco prima della sua morte, è stato poi ripreso da Birkhoff che ne ha fornito una dimostrazione negli anni 20, sebbene non del tutto chiara e rigorosa in alcuni punti, che tuttavia sono stati successivamente risistemati negli anni 70 da Brown e Neumann [7].

Il teorema asserisce l'esistenza di almeno due punti fissi interni per un omeomorfismo *twist* della corona circolare che conservi la misura di Lebesgue. Se A è una corona circolare, bordi compresi, un omeomorfismo $f : A \rightarrow A$ si dice *twist* se fa ruotare le due componenti del bordo di A in direzioni angolari opposte. Tuttavia questa definizione è ambigua dal momento che uno spostamento di θ in un verso coincide con uno di $2\pi - \theta$ nel verso opposto. Quindi una definizione più corretta per un omeomorfismo *twist* $f : A \rightarrow A$ è la seguente: f può essere sollevato a un omeomorfismo $g : S \rightarrow S$ del

rivestimento universale

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$$

di A , che, ristretto al bordo di S , sia una traslazione, in un verso per una componente e in quello opposto per l'altra.

Vediamo subito che senza l'ipotesi sulla misura il teorema diventa falso: supponiamo, d'ora in poi, senza perdita di generalità, che A sia la corona circolare compresa tra le circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2 e consideriamo un omeomorfismo $f : A \rightarrow A$ tale che, in coordinate polari,

$$(r, \theta) \xrightarrow{f} (\psi(r), \theta + \phi(r))$$

dove $\psi(r) = r$ solo per $r = 1$ o 2 , $\phi(1) < 0$ e $\phi(2) > 0$.

Facciamo inoltre presente che lo studio dei punti fissi per problemi di carattere topologico è in genere affrontato nel modo più generale dalla teoria di Lefschetz.

Innanzitutto si potrebbe dimostrare, usando il grado di Brouwer e il teorema di Hopf, ma anche con strumenti di topologia di base, che gli omeomorfismi f della corona che mandino ciascuna componente del bordo in sé possono essere di due tipi:

1. f è omotopo all'identità
2. f è omotopo a una simmetria rispetto a un diametro di una componente del bordo di A ,

ovvero possono cambiare oppure no l'orientazione della corona.

Per mappe omotope all'identità, come un omeomorfismo *twist*, vale la seguente

Proposizione 1.1. *Sia K un poliedro connesso con caratteristica di Eulero $\chi(K) \neq 0$. Allora ogni $f : K \rightarrow K$ omotopa all'identità ha un punto fisso.*

Questo è un semplice corollario del teorema di punto fisso di Lefschetz-Hopf, secondo cui una mappa f da un poliedro finito K in se stesso, con numero di Lefschetz $\lambda(f)$ diverso da 0, ammette un punto fisso.

Infatti $\lambda(f)$ è un numero che dipende solo dalla classe di omotopia di f e, nel caso della proposizione (1.1), $\lambda(f) = \lambda(id)$ coincide con $\chi(K)$.

Tuttavia questo risultato non ci dà informazioni per la corona, dato che $\chi(A) = 0$

Capitolo 2

Il Teorema

Introduciamo innanzitutto la classe degli omeomorfismi *twist* della corona circolare. Consideriamo a tal fine omeomorfismi $f : A \rightarrow A$, dove

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |(x, y)| \leq 2\}$$

e mostriamo in primo luogo l'esistenza e l'unicità, a meno di multipli di 2π , del sollevamento $g : S \rightarrow S$, dove

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$$

è il rivestimento della corona.

Ponendo $r = f \circ \pi$, dove

$$\begin{aligned} \pi : S &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto ((1 + y) \cos x, (1 + y) \sin x) \end{aligned}$$

e indicando con un asterisco in pedice l'omomorfismo indotto sui gruppi fondamentali, basta verificare, come si può vedere dal seguente diagramma,

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{g} & S \\ \pi \downarrow & \searrow r & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

che $r_*\pi_1(S) \subseteq \pi_*\pi_1(S)$, che è sempre vero, poiché S è semplicemente connesso. E se $x_0 \in S$ e $y_0 \in \pi^{-1}(f \circ \pi(x_0))$, allora, poiché S è connesso, esiste un'unica g tale che $g(x_0) = y_0$.

Inoltre, g è un omeomorfismo: consideriamo, infatti, il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{g} & S & \xrightarrow{h} & S \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{f^{-1}} & A \end{array}$$

Chiaramente, così come abbiamo sollevato f , possiamo sollevare f^{-1} ad un'unica mappa h che mandi $y_0 = g(x_0) \in S$ in $z_0 \in \pi^{-1}(f^{-1} \circ \pi(y_0))$. Ma, guardando la parte sinistra del diagramma, è evidente che

$$f^{-1} \circ \pi(y_0) = \pi(x_0),$$

dunque $x_0 \in \pi^{-1}(f^{-1} \circ \pi(y_0))$ e possiamo trovare un sollevamento h tale che $h \circ g(x_0) = x_0$.

Notiamo adesso che $h \circ g$ è un sollevamento dell'identità, che vista nel diagramma è la mappa $f^{-1} \circ f$: dobbiamo solo verificare che il diagramma commuti. Esplicitamente, poiché ciascuna delle due parti, destra e sinistra, del diagramma commuta,

$$\pi \circ h \circ g = f^{-1} \circ \pi \circ g = f^{-1} \circ f \circ \pi.$$

Ora, poiché l'identità in S è un sollevamento dell'identità in A e $h \circ g$ lascia fisso un punto (x_0) , per l'unicità del sollevamento,

$$h \circ g(x) = x \quad \forall x \in S$$

e, analogamente,

$$g \circ h(x) = x \quad \forall x \in S.$$

Dunque $h = g^{-1}$ e g è un omeomorfismo.

Una proprietà che g senz'altro possiede, essendo un sollevamento di una mappa da A in sé, è che

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2k\pi, 0)$$

per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ma possiamo dire qualcosa di più su k . Infatti, dato che $f : A \rightarrow A$ è un omeomorfismo,

$$f_* : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(A)$$

è un isomorfismo di gruppi. Poiché $\pi_1(A) = \mathbb{Z}$ e g_* manda generatori in generatori, denotando con ω un generatore di \mathbb{Z} , cioè $\omega \in \{+1, -1\}$, si ha

$$f_*[\omega] = k\omega,$$

dove $k \in \{+1, -1\}$ ed è tale che $2\pi k$ sia la differenza tra punto finale e iniziale nel sollevamento di $f \circ \omega$. Allora questo k è proprio lo stesso che compariva nella relazione di periodicità scritta sopra.

Noi saremo interessati al caso $k = 1$, per cui

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2\pi, 0).$$

Visto questo, possiamo dare la seguente

Definizione 2.1. *Un omeomorfismo $f : A \rightarrow A$ si dice twist se può essere sollevato a un omeomorfismo $g : S \rightarrow S$ che soddisfi*

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2\pi, 0),$$

$$g(x, 1) = (x - r_1, 1),$$

$$g(x, 0) = (x + r_2, 0),$$

per qualche $r_1, r_2 > 0$.

Notiamo che, siccome il sollevamento di f è unico a meno di multipli di 2π , è chiaro che se si può trovare una g che verifichi:

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2\pi, 0),$$

$$g(x, 1) = (x + r_1, 1),$$

$$g(x, 0) = (x + r_2, 0),$$

con $r_1 < 2k\pi < r_2$ per un qualche $k \in \mathbb{Z}$ se ne può trovare anche una che soddisfi le ipotesi che abbiamo dato nella definizione di *twist*.

Chiarita questa definizione, enunciamo il

Teorema 2.1 (Poincaré-Birkhoff). *Un omeomorfismo twist $f : A \rightarrow A$ che conservi la misura di Lebesgue ha due punti fissi interni.*

Mostriamo adesso che se il teorema vale per una certa misura, vale anche per qualunque misura che sia il pull-back della prima tramite un omeomorfismo di A in sè.

Supponiamo infatti che $f : A \rightarrow A$ sia un omeomorfismo che conservi la misura ν . Indichiamo con $h^*(\mu)(A) = \mu(h(A))$ il pull-back della misura μ rispetto all'omeomorfismo $h : A \rightarrow A$, sicché $h^*(\mu) = \mu$ equivale a dire che h conserva la misura μ . Tenendo presente che $(f \circ g)^*(\mu) = g^*(f^*(\mu))$, se ϕ è un omeomorfismo tale che $\phi^*(\mu) = \nu$ e coniughiamo f con ϕ , otteniamo un altro omeomorfismo $h = \phi f \phi^{-1}$, che verifica

$$h^*(\mu) = (\phi f \phi^{-1})^*(\mu) = (\phi^{-1})^* f^* \phi^*(\mu) = (\phi^{-1})^*(\nu) = \mu.$$

Quindi h conserva μ ; inoltre il numero di punti fissi di h è uguale a quello di f (se $\text{Fix } r$ denota l'insieme dei punti fissi di una mappa r , sussiste la relazione $\text{Fix } h = \phi(\text{Fix } f)$).

Ora, su A la misura $drd\theta$ è pull-back di un multiplo della misura di Lebesgue $rdrd\theta$ tramite un omeomorfismo. Si consideri ad esempio l'omeomorfismo $\phi : A \rightarrow A$ dato in coordinate polari da

$$\phi(r, \theta) = \left(\frac{r^2 + 2}{3}, \theta \right),$$

che lascia fisso il bordo e porta una misura in un multiplo costante (per l'esattezza $\frac{2}{3}$) dell'altra.

E noi useremo proprio la misura $drd\theta$ per dimostrare il teorema, il che è decisamente più comodo visto che andiamo a considerare il sollevamento g . Si vede facilmente, infatti, che se f conserva la misura $drd\theta$, allora g conserva la misura $dx dy$. Basta, ad esempio, verificarlo localmente, considerando, per ogni punto (r_0, θ_0) di A , un intorno del tipo

$$r_0 - \delta \leq r \leq r_0 + \delta, \quad \theta_0 - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \varepsilon,$$

che corrisponde, nel rivestimento S , a un rettangolino di lati 2δ e 2ε .

Si capisce ora come il teorema (2.1) è una conseguenza del seguente

Teorema 2.2. *Sia $g : S \rightarrow S$ un omeomorfismo che conservi la misura di Lebesgue e che soddisfi:*

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2\pi, 0),$$

$$g(x, 1) = (x - r_1, 1),$$

$$g(x, 0) = (x + r_2, 0),$$

per qualche $r_1, r_2 > 0$. Allora g ha due punti fissi F_1 e F_2 che non appartengono alla stessa famiglia periodica, ovvero $F_1 - F_2$ non è un multiplo intero di $(2\pi, 0)$.

Evidentemente, infatti, se F è un punto fisso di g , lo sono anche le sue immagini periodiche $F + (2k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Osserviamo che questo enunciato è più forte, perché noi adesso cerchiamo due punti fissi di g , anche se in realtà un punto fisso di f potrebbe corrispondere a un punto (x, y) tale che $g(x, y) = (x + 2k\pi, y)$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Il fatto è che tali punti potrebbero non esserci, per esempio per una trasformazione vicina all'identità.

Notiamo infine che possiamo anche richiedere condizioni più generali al bordo, ovvero che r_1 e r_2 non siano costanti, ma che possano variare con x , pur rimanendo sempre positivi.

Infatti, scelti s_1 ed s_2 positivi, basta estendere g a un omeomorfismo della striscia

$$\tilde{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 2\}$$

con combinazioni convesse, nel seguente modo:

$$g(x, y) = \begin{cases} (x - r_1(x), 1)(2 - y) + (x - s_1, 2)(y - 1) & 1 \leq y \leq 2 \\ g(x, y) & 0 \leq y \leq 1 \\ (x + r_2(x), 0)(1 + y) - y(x + s_2, -1) & -1 \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Ora, poiché il teorema vale per \tilde{S} e dato che non ci sono punti fissi per $y \geq 1$ e $y \leq 0$, per costruzione, i punti fissi interni garantiti dal teorema sono in S .

Capitolo 3

L'indice

Ai fini della dimostrazione del teorema, introduciamo il concetto di indice di una curva rispetto a un punto e alcune sue proprietà. Se P e Q sono punti distinti di \mathbb{R}^2 , definiamo la direzione da P a Q come

$$D(P, Q) = \frac{Q - P}{|Q - P|} \in S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| = 1\}.$$

Se $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una mappa e

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix } h$$

una curva, non necessariamente chiusa, che non passa per punti fissi di h , vogliamo che l'indice di u rispetto ad h dia la rotazione totale della direzione $D(P, h(P))$, dove P si sposta lungo la curva u . Per darne una definizione precisa, poniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix } h &\xrightarrow{\tilde{h}} S^1 \\ P &\longmapsto D(P, h(P)). \end{aligned}$$

Poiché $[a, b]$ è semplicemente connesso, possiamo sollevare la mappa composta $\tilde{h} \circ u : [a, b] \rightarrow S^1$ al rivestimento universale di S^1 :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow s & \downarrow \pi \\ [a, b] & \xrightarrow{\tilde{h} \circ u} & S^1 \end{array}$$

dove π è la mappa $\pi(r) = (\cos r, \sin r)$. E il sollevamento s è unico a meno di multipli interi di 2π . Dunque $s(b) - s(a)$ è indipendente dal sollevamento e possiamo definire

$$\text{Ind}_h u = \frac{s(b) - s(a)}{2\pi}.$$

Vediamone adesso alcune proprietà:

Proposizione 3.1. 1. *Data una curva $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e un'omotopia di mappe*

$$H : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tali che

$$u([a, b]) \cap \text{Fix } H(\lambda, \cdot) = \emptyset \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

la funzione

$$\lambda \mapsto \text{Ind}_{H(\lambda, \cdot)} u$$

è continua.

2. *Data una mappa h e un'omotopia di curve*

$$U : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tali che

$$U([0, 1] \times [a, b]) \cap \text{Fix } h = \emptyset,$$

la funzione

$$\lambda \mapsto \text{Ind}_h U(\lambda, \cdot)$$

è continua.

3. *Se la curva u va da un punto A a un punto B , allora $\text{Ind}_h u$ è congruo modulo 1 a $\frac{1}{2\pi}$ volte l'angolo tra le direzioni $D(A, h(A))$ e $D(B, h(B))$.*

4. *Se $u = u_1 \# u_2$ è la giustapposizione di due curve, allora $\text{Ind}_h u = \text{Ind}_h u_1 + \text{Ind}_h u_2$. Se $-u$ denota u percorsa nel verso opposto, allora $\text{Ind}_h(-u) = -\text{Ind}_h u$.*

5. Per un'omotopia di curve

$$U : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ad estremi fissati, tali cioè che, per ogni $\lambda \in [0, 1]$,

$$U(\lambda, a) = P_0 \quad e \quad U(\lambda, b) = P_1,$$

l'indice è costante al variare di λ (un intero per curve chiuse).

6. Se h è un omeomorfismo $\text{Ind}_h u = \text{Ind}_{h^{-1}} h(u)$.

Dimostrazione. I punti 1 e 2 seguono dal fatto che ogni omotopia di $\tilde{h} \circ u$ si solleva a un'omotopia di s , la mappa che ci serve alla fine per calcolare l'indice.

I punti 3 e 4 sono evidenti.

Il punto 5 è una conseguenza dei punti 2 e 3: si tenga presente, infatti, che, poiché gli estremi delle curve non variano, l'indice è congruo modulo 1 a una medesima costante per ogni λ . Ma poiché varia in modo continuo con λ , l'indice è effettivamente uguale per ogni λ .

Per il punto 6 si noti che $D(h(P), P)$ e $D(P, h(P))$ sono punti antipodali su \mathbb{S}^1 , quindi ruotano nello stesso verso e della stessa quantità mentre P si sposta su u . □

Capitolo 4

Dimostrazione del teorema

Estendiamo g a un omeomorfismo di tutto \mathbb{R}^2 , nel seguente modo:

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2\pi, 0)$$

$$g(x, y) = (x - r_1, y), \quad y \geq 1$$

$$g(x, y) = (x + r_2, y), \quad y \leq 0$$

e notiamo che g conserva ancora la misura.

Siano poi

$$H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\}$$

e

$$H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$$

e supponiamo per assurdo che esista al massimo una famiglia periodica di punti fissi.

L'idea è di costruire una curva chiusa γ che non passi per punti fissi di g e che abbia indice 1: questo sarà in contrapposizione con il seguente

Lemma 4.1. *Se esiste al massimo una famiglia periodica di punti fissi, per ogni γ curva chiusa che non passi per alcun punto fisso di g , $\text{Ind}_g \gamma = 0$.*

Dimostrazione. Se non ci sono punti fissi, la curva è omotopa a un punto in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix } g = \mathbb{R}^2$, quindi, per la proposizione (3.1), punto 5, l'indice è nullo.

Altrimenti considero il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix } g, A_1)$ dove A_1 è un punto della curva. Questo è generato da cammini che cominciano da A_1 , si avvicinano a un punto fisso lungo una curva u_0 , ci girano attorno e tornano in A_1 con $-u_0$. Dunque γ è omotopa a una giustapposizione di tali cammini e poiché l'indice varia con continuità, rimanendo sempre un intero, l'indice di γ è uguale all'indice di tale giustapposizione. Quindi è sufficiente mostrare che l'indice di ogni cammino di questo tipo è nullo. Ma un tale cammino è omotopo a un rettangolo con due lati opposti, paralleli ai bordi della striscia, in H_- e in H_+ , dove la direzione non varia, e gli altri due a distanza di π dal punto fisso e di 2π tra di loro, in modo che i due contributi si elidono per periodicità (si veda la figura 1). \square

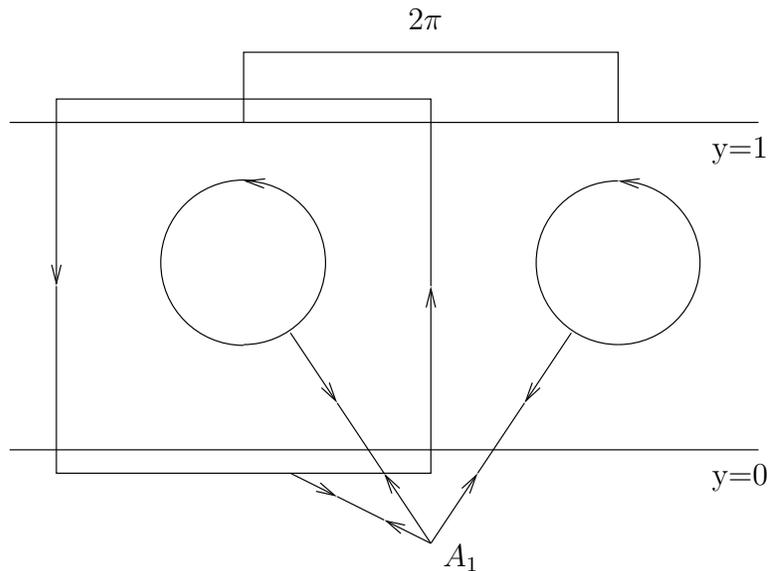


Figura 1

Per costruire una curva chiusa di indice 1, costruiamo due curve da H_- ad H_+ con indice $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

Proposizione 4.2. *Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un omeomorfismo che conservi la misura e che soddisfi:*

$$g(x, y) = (x - r_1, y), \quad y \geq 1$$

$$g(x, y) = (x + r_2, y), \quad y \leq 0$$

$$g(x + 2\pi, y) = g(x, y) + (2\pi, 0)$$

per qualche $r_1, r_2 > 0$ e che abbia al più una famiglia 2π -periodica di punti fissi. Allora esiste una curva continua

$$u : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix } g$$

tale che $u(0) \in H_-$, $u(1) \in H_+$ e $\text{Ind}_g u = \frac{1}{2}$.

Dimostrazione. Assumiamo per convenienza che la famiglia periodica di punti fissi giaccia sulle rette $x = 0 \pmod{2\pi}$. Questo si può ottenere con un semplice cambio di coordinate.

Sia W l'unione periodica di strisce verticali

$$W = \{(x, y) : 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dunque W non contiene nessuno dei punti fissi. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che

$$|P - g(P)| > \varepsilon \quad \forall P \in W.$$

Questo è possibile: basta infatti, per la condizione di periodicità e per il fatto che g è una traslazione in $\mathbb{R}^2 \setminus S$, che questa condizione sia soddisfatta solo per i P nella regione compatta

$$\{(x, y) : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi, 0 \leq y \leq 1\}$$

e su questa regione la funzione $P \mapsto |P - g(P)|$ è continua e positiva, quindi assume un minimo positivo.

Definiamo adesso $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ come:

$$T(x, y) = (x, y + \frac{\varepsilon}{2}(|\cos x| - \cos x))$$

in modo che T sposti solo i punti di W e ciascuno di essi di una distanza minore o uguale a ε .

Osserviamo che T è uno shift verso l'alto costante su ogni linea verticale, quindi conserva la misura, come si può anche verificare dallo Jacobiano.

Inoltre la composizione $T \circ g$ non ha punti fissi in W , perché $P = T \circ g(P)$ con $P \in W$ implicherebbe

$$\varepsilon \geq |T \circ g(P) - g(P)| = |P - g(P)| > \varepsilon.$$

Dunque $\text{Fix } T \circ g = \text{Fix } g$, dal momento che fuori di W , T è l'identità.

Definiamo $D_0 = H_- \setminus (T \circ g)^{-1}(H_-)$ e $D_i = (T \circ g)^i(D_0)$ per $i \in \mathbb{Z}$. Dato che g è una semplice traslazione orizzontale per i punti fuori dalla striscia, e poiché T può spostare i punti solo verso l'alto, $D_i \subset H_-$ per $i \leq 0$ e $D_i \subset \overset{\circ}{S} \cup H_+$ per $i > 0$. In particolare $D_i \cap D_0 = \emptyset$ per $i > 0$ e prendendo potenze di $T \circ g$ in questa uguaglianza vediamo che $D_j \cap D_k = \emptyset$ se $j \neq k$.

Consideriamo adesso una striscia verticale V di larghezza 2π e intendiamo per *area* di un sottoinsieme X di \mathbb{R}^2 la misura di $X \cap V$. In questo senso ciascun D_i ha la stessa area (per la precisione $2\varepsilon = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon \cos x dx$), dato che T e g , quindi anche $T \circ g$ conservano la misura.

Siccome S ha area 2π , l'unione dei D_i per $i \geq 1$, che sono un numero infinito di insiemi disgiunti di area non nulla 2ε deve intersecare H_+ , quindi esiste un minimo n tale che $D_n \cap H_+ \neq \emptyset$. Poiché $D_n \subset (T \circ g)^n(H_-)$, abbiamo mostrato che

$$\exists n > 0 \mid (T \circ g)^n(H_-) \cap (H_+) \neq \emptyset.$$

Per tale n scegliamo un punto $P_n = (x_n, y_n) \in (T \circ g)^n(H_-)$ con coordinata y massimale. Un tale P_n può non essere unico, ma deve esistere: infatti, poiché $(T \circ g)^{n-1}(H_-)$ non interseca H_+ , g manda S in sé e T sposta i punti al più di ε ,

$$(T \circ g)^n(H_-) \cap \{(x, y) : y > 1 + \varepsilon\} = \emptyset.$$

Possiamo allora considerare, per periodicità, il compatto

$$(T \circ g)^n(H_-) \cap \{(x, y) : y \geq 0, 0 \leq x \leq 2\pi\}$$

e $(x, y) \mapsto y$ è una funzione continua in questa regione, quindi assume un massimo.

Definiamo $P_i = (x_i, y_i) = (T \circ g)^{i-n}(P_n)$ per $i \in \mathbb{Z}$ in modo che

$$P_{i+1} = T \circ g(P_i) \forall i, \quad P_{-1}, P_0 \in H_- \text{ e } P_n, P_{n+1} \in H_+.$$

Sia $u_0 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva che parametrizza in modo affine il segmento da P_{-1} a P_0 e siano $u_i = (T \circ g)^i u_0$ per $i \in \mathbb{Z}$ curve definite su $[i-1, i]$. Sia inoltre $u : [-1, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$u = u_0 \# u_1 \# \cdots \# u_n$$

in modo che

$$T \circ g \circ u = u_1 \# u_2 \# \cdots \# u_{n+1}.$$

Andremo adesso a calcolare l'indice di u rispetto a $T \circ g$ e useremo i seguenti fatti:

Lemma 4.3. 1. $u_i([i-1, i]) \cap \text{Fix}(T \circ g) = \emptyset \forall i$.

2. la curva $u \# u_{n+1}$ è iniettiva.

3. Nessun punto dell'immagine di u ha ordinata più grande di y_{n+1} .

4. Nessun punto dell'immagine di $T \circ g \circ u$ ha ordinata più piccola di y_{-1} .

Dimostrazione. 1. $T \circ g$ non ha punti fissi in H_- , quindi

$$u_0([-1, 0]) \cap \text{Fix}(T \circ g) = \emptyset.$$

Supponiamo per induzione che $u_i([i-1, i]) \cap \text{Fix}(T \circ g) = \emptyset$ e dimostriamolo per u_{i+1} . Se per assurdo

$$u_{i+1}([i, i+1]) \cap \text{Fix}(T \circ g) \neq \emptyset,$$

allora esisterebbe $x \in u_{i+1}([i, i+1])$ tale che $T \circ g(x) = x$, ma x è anche $T \circ g(y)$ con $y \in u_i([i-1, i])$, quindi $T \circ g$, che è un omeomorfismo, non sarebbe iniettivo.

2. Ogni tratto u_i è semplice, visto che u_0 lo è e $T \circ g$ è un omeomorfismo, quindi iniettivo. Supponiamo allora che due curve u_i e u_j con $i \neq j$ si intersechino in qualche punto diverso dall'estremo comune che esiste quando $|i-j| = 1$. Prendendo una potenza negativa di $T \circ g$ abbastanza grande, possiamo ottenere che lo stesso accade per i e j negativi. Ma questo è assurdo, perché, per i non positivo, l'immagine di u_i giace completamente nella striscia

$$\{(x, y) : x_0 + (i-1)r_2 \leq x \leq x_0 + ir_2\}$$

e ne interseca i bordi solo nei suoi estremi (dato che ciò è vero per u_0 e la componente x di $(T \circ g)^{-1}$ in H_- è una semplice traslazione orizzontale di $-r_2$). Ora per $i \neq j$ queste striscie si intersecano al massimo in un bordo.

3. I tratti $u_i([i-1, i])$, $i = 0, \dots, n-1$, non intersecano H_+ : ci resta solo da considerare $u_n([n-1, n])$, ma

$$u_n([n-1, n]) \subset (T \circ g)^n(H_-)$$

e per ogni $(x, y) \in (T \circ g)^n H_-$ si ha $y \leq y_n \leq y_{n+1}$ per la scelta di P_n .

4. Per i punti di $u_0([-1, 0])$, $y \geq y_{-1}$, con $y_{-1} \leq 0$. Supponiamo per induzione che per i punti di $u_i([i-1, i])$ valga $y \geq y_{-1}$. Ora T , se sposta un punto, lo sposta verso l'alto, mentre g manda la striscia in sé e fuori dalla striscia è una traslazione orizzontale. Dato che i punti della striscia hanno ordinata maggiore o uguale a 0 e $u_{i+1} = T \circ g \circ u_i$, anche per i punti di $u_{i+1}([i, i+1])$ vale $y \geq y_{-1}$.

□

Possiamo adesso calcolare $\text{Ind}_{T \circ g} C$. Per costruzione

$$P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n - r_1, y_n + \delta_1), \quad 0 \leq \delta_1 \leq \varepsilon$$

$$P_0 = (x_0, y_0) = (x_{-1} + r_2, y_{-1} + \delta_2), \quad 0 \leq \delta_2 \leq \varepsilon$$

Dunque, come si vede dalla figura 2, l'angolo tra $D(P_{-1}, P_0)$ e $D(P_n, P_{n+1})$ è $\theta = \pi - \arctan \frac{\delta_1}{r_1} - \arctan \frac{\delta_2}{r_2}$ da cui

$$\text{Ind}_{T \circ g} u \equiv \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1}.$$

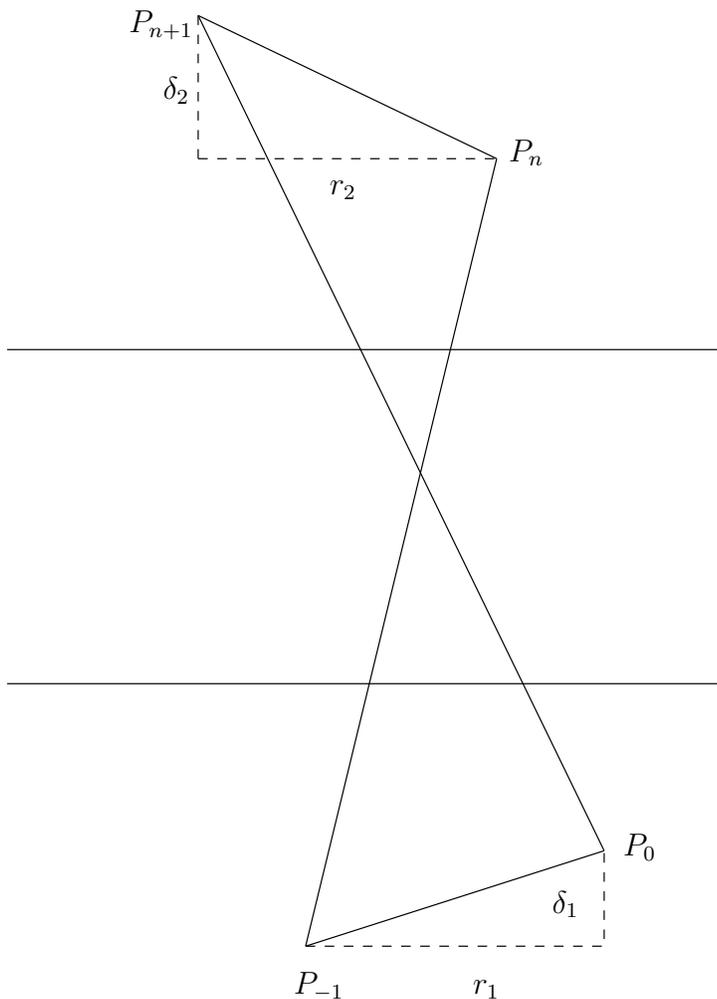


Figura 2

Mostriamo adesso che la congruenza è in realtà un'uguaglianza.

Lemma 4.4.

$$\text{Ind}_{T \circ g} u = \frac{\theta}{2\pi}$$

Dimostrazione. Per calcolare tale indice dovremo considerare

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(T \circ g) &\xrightarrow{\widetilde{T \circ g}} S^1 \\ P &\longmapsto D(P, T \circ g(P)) \end{aligned}$$

e faremo uso di un'omotopia su $\widetilde{T \circ g} \circ u$ che tenga fissi gli estremi.

Se $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è la mappa sollevata di $\widetilde{T \circ g} \circ u$ rispetto al rivestimento universale di S^1 , come abbiamo già visto nella dimostrazione della proposizione (3.1), una tale omotopia si solleva a un'omotopia di q che tiene fissi gli estremi e l'indice è la stessa costante per tutte le funzioni di questa omotopia.

Estendiamo u alla mappa $v = u \# u_{n+1} : [-1, n+1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ in modo che per ogni t compreso tra -1 e n valga

$$T \circ g(v(t)) = v(t+1).$$

Per calcolare $\text{Ind}_{T \circ g} u$ dobbiamo dunque considerare la mappa

$$\begin{aligned} \bar{u} : [-1, n] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto D(v(t), v(t+1)). \end{aligned}$$

Usiamo in sua vece $\bar{u}_0 : [-1, 2n+1] \rightarrow S^1$ definito da

$$\bar{u}_0 = \begin{cases} \bar{u}(t), & -1 \leq t \leq n \\ \bar{u}(n), & n \leq t \leq 2n+1 \end{cases}$$

Definiamo adesso la famiglia continua di mappe

$$\bar{u}_\lambda : [-1, 2n+1] \rightarrow S^1, \quad 0 \leq \lambda \leq n+2,$$

tutte con gli stessi estremi, in due parti:

Parte 1: $0 \leq \lambda \leq n+1$

$$\bar{u}_\lambda(t) = \begin{cases} D(v(-1), v(t+1)), & -1 \leq t \leq \lambda-1 \\ D(v(t-\lambda), v(t+1)), & \lambda-1 \leq t \leq n \\ D(v(t-\lambda), v(n+1)), & n \leq t \leq n+\lambda \\ D(v(n), v(n+1)), & n+\lambda \leq t \leq 2n+1 \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni λ e t come sopra, $\bar{u}_\lambda(t)$ ha sempre la forma

$$D(v(t_0), v(t_1))$$

con $-1 \leq t_0 < t_1 \leq n+1$ e dunque è ben definita dato che $u \# u_{n+1}$ è una curva semplice, quindi $v(t_0) \neq v(t_1)$. Questa prima parte mostra che $\bar{u}_0(t)$ è omotopa a

$$\bar{u}_{n+1}(t) = \begin{cases} D(v(-1), v(t+1)) & -1 \leq t \leq n \\ D(v(t-n-1), v(n+1)) & n \leq t \leq 2n+1 \end{cases}$$

che tiene prima fermo il primo estremo a P_{-1} e sposta il secondo da P_0 a P_{n+1} lungo $T \circ g(C)$, poi tiene fermo il secondo estremo a P_{n+1} e sposta il primo da P_{-1} a P_n lungo u .

Parte 2: $n+1 \leq \lambda \leq n+2$.

Siano $v' : [0, n+1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $v'' : [-1, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le parametrizzazioni affini dei segmenti da P_0 a P_{n+1} e da P_{-1} a P_n .

Per $0 \leq \mu \leq 1$ definiamo $\bar{u}_{n+1+\mu}(t)$ come

$$\begin{cases} D(v(-1), (1-\mu)v(t+1) + \mu v'(t+1)), & -1 \leq t \leq n \\ D((1-\mu)v(t-n-1) + \mu v''(t-n-1), v(n+1)), & n \leq t \leq 2n+1 \end{cases}$$

Per vedere che sia ben definita, dobbiamo verificare che il membro di destra ha sempre la forma $D(P, Q)$ con $P \neq Q$. Per

$$P = (1-\mu)v(t-n-1) + \mu v''(t-n-1) \text{ e } Q = v(n+1),$$

con $n \leq t \leq 2n+1$, P ha sempre ordinata più piccola rispetto a Q , per il lemma (4.3), punto 3, eccetto eventualmente quando $t = 2n+1$ o $\mu = 0$, nel qual caso

$$P = v(t-n-1) \neq v(n+1) = Q$$

per il punto 2 dello stesso lemma. In modo simile

$$P = v(-1) \neq Q = (1-\mu)v(t+1) + \mu v'(t+1)$$

per $-1 \leq t \leq n$, per il lemma (4.3), punti 2 e 4. Dunque $\bar{u}_{n+1}(t)$ è omotopa, per interpolazione convessa tra la curva e i segmenti v' e v'' , a

$$\bar{u}_{n+2}(t) = \begin{cases} D(v(-1), v'(t+1)), & -1 \leq t \leq n \\ D(v''(t-n-1), v(n+1)), & n \leq t \leq 2n+1 \end{cases}$$

che corrisponde a far muovere il secondo estremo da P_0 a P_{n+1} , poi il primo da P_{-1} a P_n lungo i segmenti che li congiungono.

Adesso è facile calcolare l'indice usando \bar{u}_{n+2} invece di $\widetilde{T \circ g} \circ u$, visto che si tratta di un semplice incremento monotono dell'angolo da $\arctan \frac{\delta_2}{r_2}$ a $\pi - \arctan \frac{\delta_1}{r_1}$, cioè di θ . Quindi, per quanto detto a proposito dell'indice all'inizio della dimostrazione, $\text{Ind}_{T \circ g} u = \frac{\theta}{2\pi}$. \square

Definiamo adesso $T_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ come:

$$T_s(x, y) = \left(x, y + \frac{\varepsilon s}{2} (|\cos x| - \cos x) \right)$$

in modo che $T_0 = id$ e $T_1 = T$. Per $0 \leq s \leq 1$, $\text{Ind}_{T_s \circ g} u$ è definito e

$$\text{Ind}_{T_s \circ g} u \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \left(\arctan \frac{s\delta_1}{r_1} + \arctan \frac{s\delta_2}{r_2} \right) \pmod{1}$$

per le stesse ragioni per cui formula analoga vale per $T \circ g$.

Ma questa congruenza è un'uguaglianza per $s = 1$, quindi per la continuità dell'indice, è un'uguaglianza per tutti gli s tra 0 e 1. In particolare per $s = 0$, $\text{Ind}_g u = \frac{1}{2}$. \square

Usiamo adesso g^{-1} per costruire una curva da H_- ad H_+ di indice $-\frac{1}{2}$ rispetto a g .

Ora g^{-1} non verifica le ipotesi della proposizione (4.2), perché r_1 ed r_2 sono cambiati di segno. Riparametizziamo allora il piano, scambiando i ruoli di H_- e H_+ , cioè supponiamo che i punti che prima avevano ordinata negativa ora abbiano ordinata maggiore di 1 e viceversa. Adesso possiamo applicare la proposizione (4.2) e trovare una curva u' dal nuovo H_- al nuovo H_+ , cioè da H_+ ad H_- , con $\text{Ind}_{g^{-1}} u' = \frac{1}{2}$. Ma per la proposizione (3.1), punto 3,

$$\text{Ind}_{g^{-1}} -u' = -\frac{1}{2},$$

dove $-u'$ è adesso una curva da H_- ad H_+ . Ora, se $u'' = g^{-1}(-u')$,

$$\text{Ind}_g u'' = \text{Ind}_{g^{-1}} g(u'') = \text{Ind}_{g^{-1}} -u' = -\frac{1}{2}.$$

Un altro modo per vedere che esiste una curva da H_- ad H_+ di indice $-\frac{1}{2}$ rispetto a g^{-1} è quello di cambiare direttamente i segni di r_1 e r_2 nelle ipotesi della proposizione (4.2) e notare che quello che cambia nella dimostrazione è \bar{u}_{n+2} , che diventa un decremento monotono dell'angolo da $\pi - \arctan \frac{\delta_2}{r_2}$ a $\arctan \frac{\delta_1}{r_1}$, cioè di $-\theta$.

Collegando infine u e u'' con due curve in H_- e in H_+ , trovo una curva chiusa di indice 1, come voluto.

Notiamo che, in realtà, non è stato necessario negare la tesi per costruire una curva chiusa di indice 1. Come abbiamo visto, ci è servita una trasformazione del piano con certe proprietà, per la cui costruzione, in realtà, bastava richiedere molto meno, ad esempio che

$$\Pi_x \text{Fix } g = \{x \mid \exists y \text{ con } (x, y) \in \text{Fix } g\} \neq \mathbb{R},$$

ovvero che esista un rettangolo compatto, per quanto piccolo, con due lati opposti sui bordi della striscia e privo di punti fissi.

Le proprietà della trasformazione T che abbiamo usato sono, infatti, essenzialmente, le seguenti:

1. T è un omeomorfismo del piano che conservi la misura.
2. $T(H_-) \cap (S \cup H_+) \neq \emptyset$.
3. $T^{-1}(H_-) \subseteq H_-$.
4. T è l'identità in un intorno J dei punti fissi e sposta il resto del piano al più di una quantità positiva ε tale che

$$|P - g(P)| > \varepsilon \quad \forall P \in \mathbb{R}^2 \setminus J.$$

Dovrebbe dunque bastare, per costruire una curva chiusa di indice 1, che H_+ e H_- appartengano alla stessa componente connessa di $\mathbb{R}^2 \setminus J$, il che è sufficiente da una parte a trovare una mappa T che verifica le proprietà suddette, dall'altra è pure necessario per costruire una curva da H_- ad H_+ che non passi per punti fissi.

Bibliografia ragionata

La congettura di Poincaré posta nel suo contesto originario di studi di dinamica si trova in [29] e l'idea della dimostrazione che aveva il matematico francese è presentata in [5] e soprattutto in [27].

La dimostrazione di Birkhoff si trova in [3], [4] e poi, riveduta e corretta, insieme a una generalizzazione, in [6].

Le dimostrazioni topologiche degli anni 60 e 70 sono essenzialmente [2] e [7].

Esistono poi dimostrazioni di tipo costruttivo, [20] e [31], e di tipo combinatorio, [1].

Le generalizzazioni del teorema sono numerose: [6], [8], [10], [12], [13], [15], [21], [32].

L'aspetto più legato alla dinamica è trattato in [24], [26], [28], insieme ad un discreto numero di varianti e risultati attinenti.

Per quanto riguarda un'introduzione alla teoria di Lefschetz e al concetto di grado, si può far riferimento a [11], [22], [23], [30].

Bibliografia

- [1] S. Alpern & V. S. Prasad, *Fixed points of area-preserving annulus homeomorphisms*, pp.1-8., in *Fixed Point Theory and Applications* (eds. M. A. Thera & J. B. Baillon), Pitman Research Notes in Math., 252 (1991).
- [2] R. B. Barrar, *Proof of the fixed point theorems of Poincaré and Birkhoff*, *Canad. J. Math.* 19 (1967), pp.333-343.
- [3] G. D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's last geometric theorem*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 14 (1913), pp.14-22.
- [4] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18(2) (1917), pp.199-300.
- [5] G. D. Birkhoff, *Sur la démonstration directe du dernière théorème géométrique de Henri Poincaré par M. Dantzig*, *Bull. Sci. Math.*, 42 (1918), pp.41-42.
- [6] G. D. Birkhoff, *An extension of Poincaré's last geometric theorem*, *Acta Math.*, 47 (1926), pp.297-311.
- [7] M. Brown & W. D. Neumann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, *Michigan Math. J.* 24 (1977), pp.21-31.
- [8] P. H. Carter, *An improvement of the Poincaré-Birkhoff theorem*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 269 (1982), pp.285-299.

- [9] W. De Melo & J. Palais, *Geometric theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, New York 1982.
- [10] W.-Y. Ding, *A generalization of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Proc. AMS, 88 (1983), pp. 341-346.
- [11] J. Dugundi & A. Granas, *Fixed point theory*, Springer-Verlag, New York 2003.
- [12] M. Flucher, *Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms*, Manuscripta Math., 68 (1990), pp.271-293.
- [13] J. Franks, *Generalizations of the Poincaré-Birkhoff Theorem*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 128, No. 1 (1988), pp.139-151.
- [14] J. Franks, *Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms*, Ergod. Th. Dynam. Sys., 8* (1988), pp.99-107.
- [15] J. Franks, *A variation on the Poincaré-Birkhoff theorem*, in *Hamiltonian Dynamical Systems* (eds. K. Meyer e D. Saari), Contemporary Mathematics, 81 (1988), pp.111-118.
- [16] J. Franks, *Periodic points and rotation numbers for area preserving diffeomorphisms of the plane*, IHES-Publ.Math., 71 (1990), pp.105-120.
- [17] J. Franks, *Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms*, Invent. Math., 108 (1992), pp.403-418.
- [18] J. Franks, *Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero*, New York J. Math., 2 (1996), pp.1-19.
- [19] J. Franks, *Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 348, No. 7 (1996), pp.2637-2662.
- [20] C. B. Garcia, *A fixed point theorem including the last theorem of Poincaré*, Math. Programming 8 (1975), pp. 227-239.

- [21] L. Guillou, *A simple proof of P. Carter's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 125, No. 5 (1997), pp.1555-1559.
- [22] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [23] M. Henle, *A combinatorial introduction to topology*, W.H.Freeman and Company, San Francisco 1979.
- [24] H. Hofer & E. Zehnder, *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Birkhäuser Advanced Texts, Basel 1994.
- [25] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, Bologna 1988.
- [26] P. Le Calvez, *Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore*, Astérisque 204 (1991).
- [27] R. Mc Gehee & K. R. Meyer, *Twist mappings and their applications*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [28] J. Moser, *Selected chapters in the calculus of variation*, Birkhäuser, Zürich 2003.
- [29] H. Poincaré, *Sur un théorème de géométrie*, Rend. Circ Mat. Palermo 33 (1912), pp.375-407.
- [30] Y. A. Shashkin, *Fixed points*, American Mathematical Society MAA, Providence 1991.
- [31] L. Yong & L. Zhenghua, *A constructive proof of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol 347, No. 6 (1995), pp.2111-2126.
- [32] H. E. Winkelkemper, *A generalization of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 102, No. 4 (1988), pp.1028-1030.