Versione: 20 luglio 2000

Università degli Studi di Pisa
Corso di laurea in Ingegneria Elettrica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica III
a.a. 1999/00

docente: Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Testi

PRIMO COMPITINO, 3 APRILE 2000

1. Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/4 \\ 0 & 2 & 1/24 \\ -1 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$.

   Dimostrare che si può decomporre A come $A = \lambda I + B$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e B tale $B^3 = 0$. Trovare tali λ e B, ed usarli per colcolare e^{At}.

2. Sia $A(t)$ una funzione a valori nelle matrici $n \times n$. Dimostrare che la formula

   $$\left(e^{A(t)}\right)' = A'(t) \cdot e^{A(t)} \tag{1}$$

   vale nel caso che le matrici $A(t)$ ed $A'(t)$ commutino fra loro per ogni t.
   Far vedere (esibendo un controesempio) che in caso contrario la (1) può essere falsa.

3. Sia A una matrice $n \times n$ con n autovalori reali distinti e strettamente minori di $c \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

   $$\lim_{t \to +\infty} e^{-ct} e^{At} = 0 \ . \tag{2}$$

   Dimostrare che vale la (2) anche se A ha autovalori tutti reali e minori di c, ma non necessariamente distinti.
   Nel caso che A abbia autovalori anche complessi, quale condizione si deve imporre affinché valga la (2)?

4. Determinare tutti i parametri reali positivi a, b per cui il campo di vettori

   $$F(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^b} \begin{pmatrix} x + ay \\ y - ax \end{pmatrix} \tag{3}$$

   ammette potenziale, ed in tal caso calcolarlo.

5. Trovare (se esiste) il potenziale del campo $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(z-y)x + y^2 - z^2 \\ 2(x-z)y + z^2 - x^2 \\ 2(y-x)z + x^2 - y^2 \end{pmatrix}$.

6. a) Sia F un campo piano tangenziale di modulo $|F| = f(\rho)$. Dimostrare che $\operatorname{div} F = 0$.
   b) Dare una formula per $\operatorname{div} F$ nel caso che sia $|F| = f(\rho, \theta)$.

Secondo compitino, 18 maggio 2000

1. Determinare la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u + t \sin x & \text{per } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in [0,+\infty), \\ u(x,0) = \sin x - 2\sin(2x) & \text{per } x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 7\sin(3x) & \text{per } x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{1}$$

2. Sia $f(x)$ la funzione di periodo 2π che vale $f(x) := -\pi - x$ per $-\pi \le x \le -\pi/2$, $f(x) := x$ per $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, $f(x) := \pi - x$ per $\pi/2 \le x \le \pi$.
   a) Scrivere f come serie di Fourier *reale*. [*Usando le simmetrie di f si può vedere fin da subito che molti dei coefficienti di Fourier sono nulli*].
   b) Dare una stima (dall'alto) di quanti addendi della serie di Fourier vanno sommati per approssimare f con un errore inferiore allo $0,1$.

3. Scrivere la derivata seconda (generalizzata) della funzione f data nell'esercizio 2, calcolarne la serie di Fourier, e (ri-) ottenere quindi quella di f.

4. Dati i parametri $r \ge 0$ ed $0 < a < 1$, sia $I(u)$ il funzionale

$$I(u) = \int_a^1 \dot{u}^4 x^r dx \; . \tag{2}$$

   a) Determinare il minimo di I tra tutte le u di classe C^1 tali che $u(a) = 1$ ed $u(1) = 0$.
   b) Verificare che per $a = 0$ e $r \ge 3$ non ci sono minimi, e che in questo caso l'estremo inferiore dei valori assunti da I è 0.

5. Si consideri, per funzioni u del piano, l'equazione

$$(x^2 + y^2)\,\Delta u + 2x\,u_x + 2y\,u_y = f(x,y) \; . \tag{3}$$

   a) Trovare tutte le funzioni *radiali* del piano che soddisfano l'equazione (3), con f identicamente nulla in tutto il piano tranne (al più) l'origine. [*Si ricordi che il laplaciano di una funzione radiale rappresentata da $v(\rho)$ è dato da $v_{\rho\rho} + v_\rho/\rho$.*]
   b) Tra le soluzioni del punto a) trovare quella che soddisfa la (3) su tutto il piano con $f(x,y)$ la delta di Dirac, e tende a 0 all'infinito.
   c) Dimostrare che l'unica soluzione (regolare) della (3) con f identicamente nula che tende a 0 all'infinito è la funzione identicamente nulla.

6. Si consideri la decomposizione di $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ come

$$f(x) = \sum_1^\infty a_n \sin(nx) \; . \tag{4}$$

   Si scriva la (solita) formula per i coefficienti a_n, e quindi li si riscriva in termini di f'', assumendo che $f(0) = f(\pi) = 0$.
   Si usi quanto fatto per far mostrare che la serie suddetta converge uniformemente per ogni funzione f di classe C^2 tale che $f(0) = f(\pi) = 0$.
   Cosa vi aspettate che succeda se f è di classe C^2 ma non soddisfa questa condizione al bordo?

Scritto del primo appello, 5 giugno 2000

1. Calcolare e^{tA} con $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + z \\ \dot{y} = -4y - 3z \\ \dot{z} = 10y + 7z \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

2. Determinare la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} u + 2u_t + u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{per } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in [0,+\infty), \\ u(x,0) = \sin x & \text{per } x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = 4\sin(2x) - 2\sin x & \text{per } x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{1}$$

3. Calcolare la serie di Fourier reale e complessa su $[-\pi, \pi]$ della funzione a scalino f data da $f(x) := -1$ per $-\pi < x \leq 0$, $f(x) := 1$ per $0 < x \leq \pi$. Verificare il risultato calcolando la serie di Fourier della derivata (generalizzata) di f.

4. Usare quanto fatto nell'esercizio 3 per risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_x & \text{per } (x,t) \in [-\pi,\pi] \times [0,+\infty), \\ u(\pi,t) = u(-\pi,t) & \text{per } t \in [0,+\infty), \\ u_x(\pi,t) = u_x(-\pi,t) & \text{per } t \in [0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in [-\pi,\pi]. \end{cases} \tag{2}$$

Scritto del secondo appello, 26 giugno 2000

1. Determinare per quali valori dei parametri a, b – a intero e b reale – il seguente campo di vettori nel piano ammette un potenziale, ed in caso calcolarlo:
$$F(x, y) = \frac{(x-b)^a}{(x-b)^4 + y^4}\,\mathbf{i} + \frac{y^a}{(x-b)^4 + y^4}\,\mathbf{j}\ .$$

2. Verificare che il seguente campo di vettori nello spazio ammette un potenziale *vettore* V e calcolarlo:
$$F(x, y, z) = (x - 2xz + z)\,\mathbf{i} + (2y - x^2)\,\mathbf{j} + (x^2 + z^2 - 3z)\,\mathbf{k}\ .$$
[*Si suggerisce di cercare* V *con componente* V^x *identicamente nulla.*]

3. Determinare la serie di Fourier reale della funzione $2\cos(2x - \pi/3)$, e quindi risolvere il seguente problema decomponendo l'incognita $u(x, t)$ in serie di Fourier reale nella variabile x
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \alpha u_x & \text{per } (x,t) \in [-\pi, \pi] \times [0, +\infty), \\ u(\pi, t) = u(-\pi, t) & \text{per } t \in [0, +\infty), \\ u_x(\pi, t) = u_x(-\pi, t) & \text{per } t \in [0, +\infty), \\ u(x, 0) = 2\cos(2x - \pi/3) & \text{per } x \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{1}$$

Scritto del terzo appello, 17 luglio 2000

1. a) Sia $f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 + x_2^2 - 1)\, e^{-(x_1^2+x_2^2)}$. Determinare le soluzioni radiali u del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \mathbb{R}^2, \\ \lim u = 0 & \text{all'infinito.} \end{cases} \tag{1}$$

[*Si ricordi che se u si scrive come $v(\rho)$, con $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, allora $\Delta u = \ddot{v} + \dot{v}/\rho$.*]
b) Si provi a ottenere lo stesso risultato scrivendo la formula risolutiva per (1), e poi integrandola.

w. Calcolare la serie di Fourier reale e complessa della funzione di periodo 2π data da

$$f(x) := \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{per } -\pi < x \leq 0, \\ (x-\pi)^2 & \text{per } 0 < x \leq \pi, \end{cases} \tag{2}$$

Si riottenga lo stesso risultato a partire dalla serie di Fourier reale della derivata seconda di f (intesa in senso generalizzato).

3. Sia $\sum a_k e^{ikx}$ la serie di Fourier complessa di una generica funzione u di periodo 2π. Si trovi allora una funzione g, che non dipenda da u, tale che vale l'identità

$$\sum_{k \neq 0} \frac{|a_k|^2}{k^2} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, u(y)\, g(y-x)\, dx\, dy \ .$$

[*Può essere utile il risultato dell'esercizio precedente.*]

Soluzioni

Primo compitino, 3 aprile 2000

1. Dire che la matrice A si può decomporre come $A = \lambda I + B$ con $B^3 = 0$, significa dire che $(A - \lambda I)^3 = 0$. Siccome ogni matrice annulla il suo polinomio caratteristico (teorema di Cayley-Hamilton), quanto richiesto si verifica quando $(t - \lambda)^3$ coincide (a meno di costanti moltiplicative) con il polinomio caratteristico di A (nella variabile t), ovvero quando λ è un autovalore triplo di A.
   Nel caso specifico, il polinomio caratteristico di A è $\det(A - tI) = -(t - 3/2)^3$; basta dunque porre $\lambda := 3/2$ e $B := A - \lambda I$. Quindi $B = \begin{pmatrix} -1/2 & 3 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/24 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/24 & 1/4 & 1/48 \\ 1/2 & -3 & -1/4 \end{pmatrix}$ (e $B^3 = 0$, ovviamente).
   Alternativamente si può calcolare esplicitamente $(a - \lambda I)^3$ e verificare che per $\lambda = 3/2$ risulta uguale alla matrice nulla. Questo richiede però molti più conti.
   Usando la definizione di esponenziale come serie otteniamo infine
$$\begin{aligned} e^{At} = e^{3t/2} e^{Bt} &= e^{3t/2} \Big(\sum_0^\infty B^n \frac{t^n}{n!} \Big) = e^{3t/2} \big(I + Bt + B^2 t^2/2 \big) \\ &= e^{3t/2} \begin{pmatrix} 1 - t/2 & 3t & t/4 \\ -t^2/48 & 1 + t/2 + t^2/8 & t/24 + t^2/96 \\ -t + t^2/4 & -3t^2/2 & 1 - t^2/8 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2. Si parte dalla formula generale $(AB)' = A'B + AB'$, da cui si deduce che $(A^2)' = A'A + AA'$, che nel caso in cui A ed A' commutano diventa $(A^2)' = 2A'A$. Proseguendo si dimostra (per induzione) che $(A^n)' = nA'A^{n-1}$ per ogni intero $n \geq 1$. Pertanto, usando la definizione di esponenziale di matrici come serie (e la derivabilità termine a termine della stessa),
$$(e^A)' = \Big(\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!} \Big)' = \sum_1^\infty \frac{A' A^{n-1}}{(n-1)!} = A' e^A \ .$$
   Per il controesempio, prendiamo $n := 2$ ed $A := \begin{pmatrix} 0 & f \\ g & 0 \end{pmatrix}$ con f e g funzioni di t.
   Si vede allora che $AA' = \begin{pmatrix} fg' & 0 \\ 0 & f'g \end{pmatrix}$ mentre $A'A = \begin{pmatrix} f'g & 0 \\ 0 & fg' \end{pmatrix}$.
   Quindi A ed A' non commutano se prendiamo, ad esempio, $f(t) := 1$ e $g(t) := t$. In questo caso abbiamo dunque che
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = tI \ ,$$
   da cui segue che $A^{2n} = t^n I$ e $A^{2n+1} = t^n A$ per $n = 1, 2, \ldots$ In particolare il coefficiente di indice $1,1$ della matrice e^A è dato da $(e^A)_{1,1} = \sum t^n/(2n)! = \cosh(\sqrt{t})$, ed ha derivata diversa da 0, mentre si vede che il coefficiente di indice $1,1$ della matrice $A'e^A$ è uguale a 0. Dunque la formula (1) non vale in questo caso.

3. Nel primo caso la matrice A risulta diagonalizzabile, vale a dire che esiste M tale che $A = MDM^{-1}$ dove D è la matrice diagonale data dagli autovalori λ_i di A. Ma allora
$$e^{-ct} e^{At} = e^{-ct} M e^{Dt} M^{-1} = M \begin{pmatrix} e^{(\lambda_1 - c)t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{(\lambda_n - c)t} \end{pmatrix} M^{-1} \ ,$$

e dunque $e^{-ct}e^{At}$ tende a 0 per t che tende a $+\infty$ perché $c - \lambda_i < 0$ per ogni i.
Più in generale, se A ha solo autovalori reali λ_i, allora e^{At} si scrive come somma di addendi $P_i(t)e^{\lambda_i t}$ dove P_i è un opportuno polinomio a coefficienti matrici (di grado minore o uguale alla molteplicità algebrica di λ_i), e dunque vale la stessa conclusione, perché

$$e^{-ct}e^{At} = \sum_i P_i(t)e^{(\lambda_i - c)t}$$

e $P(t)e^{at}$ tende a 0 per $t \to +\infty$ per ogni polinomio P ed ogni $a < 0$. Quast'ultimo ragionamento mostra che se A ammette autovalori anche complessi, la condizione da porre affinché valga la (2) è che la parte reale di tutti gli autovalori sia strettamente minore di c.

4. Il campo F dato in (3) si decompone come somma di un campo radiale F_r ed uno tangenziale F_τ, dati rispettivamente da

$$F_r(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^b}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad F_\tau(x,y) = \frac{a}{(x^2+y^2)^b}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} .$$

Ogni campo radiale il cui modulo dipende solo da $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, come ad esempio F_r, ammette sempre un potenziale, che nel caso specifico è dato da

$$V(x,y) := -\frac{1}{2(b-1)\rho^{2(b-1)}} + c \qquad \Big(V(x,y) := -\log\rho + c \quad \text{se } b = 1. \Big)$$

Viceversa, si vede che il lavoro di F_τ lungo la circonferenza unitaria (percorsa in senso antiorario) è uguale a $-2\pi a$, e dunque F_τ (e pertanto anche F) non ammette potenziale a meno che $a = 0$, nel qual caso $F_\tau = 0$ ed $F = F_r$ ammette come potenziale V.
Alternativamente si verifica che il rotore di F si annulla per $a = 0$ oppure per $b = 1$, ma l'integrale di F lungo la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine (punto singolare del campo) risulta uguale a $2\pi a$, quindi il potenziale esiste solo per $a = 0$.

5. Il potenziale esiste perché il campo soddisfa la condizione delle derivate incrociate (ovvero di rotore nullo) su tutto lo spazio. Il potenziale può quindi essere trovato per integrazione, ottenendo

$$V(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x) + c \,.$$

6. Se F ha direzione tangenziale e modulo $f(\rho,\theta)$, allora le componenti F_x ed F_y sono

$$F_x = -f(\rho,\theta)\,\frac{y}{\rho} \quad , \quad F_y = f(\rho,\theta)\,\frac{x}{\rho} \,.$$

Usando il fatto che $\partial_x\rho = x/\rho$ e $\partial_x\theta = -y/\rho^2$ (si ricordi che $\theta = \arctan(y/x)$) si ottiene

$$\partial_x F_x = f\,\frac{xy}{\rho^3} - \partial_\rho f\,\frac{xy}{\rho^2} + \partial_\theta\, f\,\frac{y^2}{\rho^3} \;,$$

ed analogamente (tenedo conto che $\partial_y\rho = y/\rho$ e $\partial_y\theta = x/\rho^2$)

$$\partial_y F_y = -f\,\frac{xy}{\rho^3} + \partial_\rho f\,\frac{xy}{\rho^2} + \partial_\theta f\,\frac{x^2}{\rho^3} \,.$$

Ne consegue che

$$\operatorname{div} F = \partial_\theta f\,\frac{x^2+y^2}{\rho^3} = \frac{\partial_\theta f}{\rho} \;,$$

che è nulla nel caso particolare in cui f non dipende da θ.

1. Scriviamo come al solito $u(x,t)$ come

$$u(x,t) = \sum_1^\infty a_n(t)\,\sin(nx) \qquad \Big(\text{con } a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\,\sin(nx)\,dx\ .\Big)$$

L'equazione in (1) diventa allora

$$\sum \ddot a_n(t)\,\sin(nx) = \sum (2-n^2)a_n(t)\,\sin(nx)\ + t\,\sin x\ ,$$

che insieme ai dati iniziali si traduce nei seguenti problemi di Cauchy per i coefficienti a_n:

$$\begin{cases} \ddot a_1 = a_1 + t \\ a_1(0) = 1 \\ \dot a_1(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot a_2 = -3a_2 \\ a_2(0) = -2 \\ \dot a_2(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot a_3 = -7a_3 \\ a_3(0) = 0 \\ \dot a_3(0) = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot a_n = (2-n^2)a_n \\ a_n(0) = 0 \\ \dot a_n(0) = 0 \qquad \text{per } n > 3. \end{cases}$$

Pertanto

$$a_1 = e^t - t \qquad a_2 = -2\cos(\sqrt{3}t) \qquad a_3 = \sqrt{7}\,\sin(\sqrt{7}t) \qquad a_n = 0 \text{ per } n > 3,$$

ovvero

$$u(x,t) = (e^t - t)\,\sin x - 2\cos(\sqrt{3}t)\,\sin(2x) + \sqrt{7}\,\sin(\sqrt{7}t)\,\sin(3x)\ .$$

2. Disegnando il grafico di f si vede innazitutto che si tratta di una funzione dispari, per cui i coefficienti a_n dei coseni sono tutti nulli, mentre i coefficienti b_n dei seni sono dati da

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\sin(nx)\,dx\ .$$

Osserviamo ora che la funzione f, ristretta all'intervallo $[0,\pi]$, è simmetrica rispetto all'asse $x = \pi/2$, e pertanto b_n risulta nullo per n pari, mentre per n dispari abbiamo infine

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\sin(\pi n/2) = \frac{4}{\pi n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\ .$$

Pertanto

$$f(x) = \sum_{n\ dispari} \frac{4}{\pi n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\sin(nx)\ . \tag{5}$$

Per quanto riguarda la seconda parte della domanda, si vede che sommando i primi m termini della serie, cioé tutti quelli di indice $n \le 2m-1$, la differenza tra questa somma parziale f_m ed f ha norma

$$\begin{aligned}
\|f - f_m\|_\infty &\le \sum_{\substack{n\ dispari\\ n\ge 2m+1}} \Big\|\frac{4}{\pi n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\sin(nx)\Big\| \\
&\le \sum_{\substack{n\ dispari\\ n\ge 2m+1}} \frac{4}{\pi n^2} \\
&\le \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\ dispari\\ n\ge 2m+1}} \frac{1}{n^2-1} \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n\ dispari\\ n\ge 2m+1}} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{4}{\pi}\Big[\Big(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+2}\Big) + \Big(\frac{1}{2m+2} - \frac{1}{2m+4}\Big) + \Big(\frac{1}{2m+4} - \frac{1}{2m+6}\Big) + \cdots\Big] \\
&= \frac{2}{\pi m}
\end{aligned}$$

Dunque per avere un errore inferiore allo $0,1$ basta prendere $m \geq 20/\pi$, ovvero $m = 7$.

Un altro modo di procedere, più semplice, è il seguente: si osserva che il punto peggiore di tutti per la convergenza è $\pi/2$ (o $-\pi/2$). Più precisamente, siccome $f(\pi/2) = \sum \frac{4}{\pi n^2}$ (dalla (5)),

$$\|f - f_m\|_\infty \leq \sum_{\substack{n\ dispari \\ n \geq 2m+1}} \frac{4}{\pi n^2} = f(\pi/2) - f_m(\pi/2) \ ,$$

per cui la prima diseguaglianza è in realtà un'equaglianza. Ora si può verificare direttamente (con una calcolatrice) che basta prendere $m = 3$ per portare la norma della differenza al di sotto di $0,1$.

3. La derivata (generalizzata) di f è data da $Df(x) = 1$ per $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ e -1 altrimenti. La derivata seconda (generalizzata) di f è dunque $D^2 f(x) = 2\delta(x + \pi/2) - 2\delta(x - \pi/2)$, che è una funzione dispari. I coefficienti di Fourier dei coseni sono dunque tutti nulli, mentre quelli dei seni sono dati da

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D^2 f(x) \, \sin(nx) \, dx = -\frac{4}{\pi} \sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Dunque

$$D^2 f(x) = \sum_{n\ dispari} -\frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin(nx) \ ,$$

che integrato due volte dà nuovamente la formula (5).

4. L'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale $I(u)$ dato in (2) è

$$\frac{d}{dx}\big(4\dot{u}^3 x^r\big) = 0$$

ovvero $\dot{u}^3 x^r$ è costante, da cui si deduce $u(x) = \alpha x^{1-r/3} + \beta$ (con α e β numeri reali arbitrari) per $r \neq 3$, e $u(x) = \alpha \log x + \beta$ per $r = 3$. Imponendo le condizioni al bordo si ottiene infine

$$u_a(x) = \frac{1 - x^{1-r/3}}{1 - a^{1-r/3}} \quad \left(u(x) = \frac{\log x}{\log a} \text{ per } r = 3. \right) \tag{6}$$

Se il minimo di $I(u)$ esiste, deve essere allora dato da questa u.

Volendo si può verificare che $I(u)$ è convessa in u (perché la funzione t^4 è convessa in t), e pertanto la funzione u data in (6) deve essere un punto di minimo.

Si noti infine che per $a = 0$ la formula (6) non ha senso quando $r \geq 3$. Questo significa che in tal caso non ci possono essere minimi. Piú precisamente, si vede che l'estremo inferiore dei valori del funzionale è 0, che però non può essere realizzato da nessuna u che non sia costante, cioé da nessuna u che verifichi le condizioni al bordo.

Per vedere questo si può fare così: si prendono le funzioni u_ε che valgono 1 in 0, sono identicamente nulle in $[\varepsilon, 1]$ e sono lineari con pendenza $-1/\varepsilon$ in $[0, \varepsilon]$, allora , per $r > 3$ si ha che $I(u_\varepsilon)$ tende a 0 per $\varepsilon \to 0$. Volendo delle u_ε di classe C^1, si modifica la definizione ponendo u_ε uguale a $(x/\varepsilon - 1)^2$ in $[0, \varepsilon]$ anziché lineare.

Un'altra via, che funziona anche per $r = 3$, consiste nel prendere proprio i minimi u_a dati in (6), prolungarli a tutto l'intervallo $[0, 1]$ ponendoli uguali a 1 in $[0, a)$, ed verificare che $I(u_a) \to 0$ per $a \to 0$.

5. Sia u una funzione del tipo $u(x,y) = v(\rho)$ con $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$. Allora $u_x = \dot v\, x/\rho$, $u_y = \dot v\, y/\rho$, e quindi l'equazione (3) con $f \equiv 0$ diventa $\rho^2(\ddot v + \dot v/\rho) + 2\rho\, \dot v = 0$, ovvero $\ddot v + 3\dot v/\rho = 0$, che ha soluzione generale
$$u(x,y) = v(\rho) = \frac{\alpha}{\rho^2} + \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Ora, la condizione che il limite all'infinito sia 0 equivale a $\beta = 0$.
Siccome inoltre $[(x^2+y^2)\,\Delta u + 2x\,u_x + 2y\,u_x]$ è nullo fuori dall'origine, per imporre che sia la delta di Dirac basta richiedere che il suo integrale su un qualsiasi cerchio D_r faccia 1, e tenendo condo del fatto che $[(x^2+y^2)\,\Delta u + 2x\,u_x + 2y\,u_x]$ è la divergenza di $(x^2+y^2)\,\nabla u$, si ottiene
$$\begin{aligned} 1 &= \int_{D_r} (x^2+y^2)\,\Delta u + 2x\,u_x + 2y\,dx\,dy \\ &= \text{flusso di } (x^2+y^2)\,\nabla u \text{ uscente da } \partial D_r = 2\pi r\, r^2 \frac{-2\alpha}{r^3} = -4\pi\alpha\ . \end{aligned}$$
ovvero $u(x,y) = -1/4\pi\rho^2$. La dimostrazione del punto c) è difficile e la omettiamo.

6. Siccome $\{\sin(nx)\}$ è una base ortonormale delle funzioni su $[0,\pi]$ rispetto al prodotto scalare $< f, g >= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi fg$, i coefficienti a_n in (4) sono dati da
$$a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\sin(nx)\,dx\ .$$
Integrando ora per parti due volte (ed utilizzando la condizione $f(0) = f(\pi) = 0$ per liberarci dei termini di bordo) otteniamo
$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi f''(x)\,\sin(nx)\,dx\ .$$
Pertanto $|a_n| = O(1/n^2)$, quindi $\sum |a_n| < +\infty$, e dunque la serie in (4) converge totalmente.
Se la condizione $f(0) = 0$ (risp. $f(\pi = 0)$ non è verificata, la serie in (4) non converge a $f(x)$ quando $x = 0$ (risp. $x = \pi$), perché lì vale esattamente 0. In tal caso ci si potrebbe aspettare una convergenza puntuale di f in tutti i punti tranne che 0 (risp. π).
Questo può essere dimostrato facilmente considerando la funzione di periodo 2π e dispari che coincide con $f(x)$ per $0 \le x < \pi$, e con $-f(-x)$ per $-\pi \le x < 0$. Si vede allora che la serie in (4) coincide con la serie di Fourier reale di questa nuova funzione, che è di classe C^1 a tratti e discontinua in 0 (risp. in π). Basta dunque applicare il teorema di convergenza per le serie di Fourier (reali).

1. Si vede che il polinomio caratteristico di A è $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Pertanto e^{tA} deve essere della forma
$$e^{tA} = e^t(B_1 + tB_2) + e^{2t}B_3 \tag{3}$$
con B_1, B_2, B_3 matrici 3×3 opportune. Calcolando il valora di e^{tA} e delle sue prime due derivate in 0 otteniamo il sistema
$$\begin{cases} I = B_1 + B_3 \\ A = B_1 + B_2 + 2B_3 \\ A^2 = B_1 + 2B_2 + 4B_3 \end{cases} \quad \text{che dà} \quad \begin{cases} B_3 = (A-I)^2 \\ B_2 = (A-I)(2I-A) \\ B_1 = A(2I-A) \end{cases}$$
e dunque
$$e^{tA} = e^t\big[A(2I-A) + t\,(A-I)(2I-A)\big] + e^{2t}(A-I)^2 \ .$$
Nel caso specifico
$$e^{tA} = e^t\begin{pmatrix} 1 & 2t & t \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \ ,$$
e la soluzione del problema di Cauchy è
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2t)\,e^t \\ 6\,e^t - 5\,e^{2t} \\ 10\,e^t - 10\,e^{2t} \end{pmatrix} \ .$$

2. Scriviamo come al solito $u(x,t)$ come
$$u(x,t) = \sum_1^\infty a_n(t)\,\sin(nx) \qquad \text{con } a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\,\sin(nx)\,dx \ .$$
L'equazione in (1) diventa allora
$$\sum\big(a_n + 2\dot a_n + \ddot a_n - n^2 a_n\big)\,\sin(nx) = 0 \ ,$$
che insieme ai dati iniziali si traduce nei seguenti problemi di Cauchy per i coefficienti a_n:
$$\begin{cases} \ddot a_1 + 2\dot a_1 = 0 \\ a_1(0) = 1 \\ \dot a_1(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot a_2 + 2\dot a_2 - 3a_2 = 0 \\ a_2(0) = 0 \\ \dot a_2(0) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot a_n + 2\dot a_n + (1-n^2)a_n = 0 \\ a_n(0) = 0 \\ \dot a_n(0) = 0 \qquad \text{per } n > 3. \end{cases}$$
Pertanto
$$a_1 = e^{-2t} \qquad a_2 = e^t - e^{-3t} \qquad a_n = 0 \text{ per } n > 3,$$
ovvero
$$u(x,t) = e^{-2t}\sin x + (e^t - e^{3t})\,\sin(2x) \ .$$

3. Siccome f è una funzione dispari, la sua serie di Fourier reale contiene solo seni, i cui coefficienti b_n sono dati da
$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Pertanto

$$f(x) = \sum_{n\ dispari} \frac{4}{\pi n} \sin(nx) \ , \tag{4}$$

e scrivendo $\sin(nx)$ come $\frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ otteniamo la serie di Fourier complessa

$$f(x) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ dispari}} -\frac{2i}{\pi n}\, e^{inx} \ , \tag{5}$$

La derivata (generalizzata) di f è data da $Df(x) = 2\delta(x) - 2\delta(x-\pi)$, che è una funzione pari (anche se non sembra). La serie di Fourier reale di Df si calcola facilmente:

$$Df(x) = \sum_{n\ pari} \frac{4}{\pi} \cos(nx) \ ,$$

che integrata dà la (4).

5. Scriviamo $u(x,t)$ come serie di Fourier (complessa) nella variabile x, cioé

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(t)\, e^{(inx)} \ .$$

L'equazione in (2) diventa allora

$$\sum \dot{a}_n(t)\, e^{inx} = \sum a_n(t)\,(-n^2 + in)\, e^{(inx)} \ ,$$

che insieme ai dati iniziali (dedotti dalla (5)) si traduce nei seguenti problemi di Cauchy per i coefficienti a_n:

$$\begin{cases} \dot{a}_n = (-n^2 + in)a_n & \\ a_n(0) = -\frac{2i}{\pi n} & \text{per } n \text{ dispari,} \\ a_n(0) = 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases}$$

Pertanto $a_n = -\frac{2i}{\pi n}\, e^{(-n^2+in)t}$ per n dispari, e $a_n(t) = 0$ per n pari, ovvero

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ dispari}} -\frac{2i}{\pi n}\, e^{(-n^2+in)t} e^{inx}$$

che risulta uguale a

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n\geq 1\\ dispari}} \frac{4}{\pi n}\, e^{-n^2 t} \sin(n(x+t)) \ .$$

Scritto del secondo appello, 26 giugno 2000

1. Si osserva innanzitutto che il parametro b corrisponde semplicemente ad una traslazione del campo lungo l'asse x, per cui basta studiare il caso $b = 0$. Si vede quindi che il campo verifica la condizione delle derivate incrociate (ovvero del rotore nullo) solo quanto $\alpha = 3$. Questa condizione non sarebbe sufficiente a garantire l'esistenza di un potenziale perché F è definito su tutto il piano tranne l'origine, ovvero su un dominio che non è semplicemente connesso, tuttavia in questo caso si vede subito che un potenziale di

$$F(x,y) = \frac{x^3}{x^4+y^4}\,\mathbf{i} + \frac{y^3}{x^4+y^4}\,\mathbf{j}\ .$$

è dato da $V(x,y) = \frac{1}{3}\log(x^4+y^4)$. Nel caso generale il potenziale è dato invece da

$$V(x,y) = \frac{1}{3}\log((x-b)^4+y^4)\ .$$

2. Si verifica che il campo F ha divergenza nulla, ed essendo quindi definito su tutto lo spazio, ammette un potenziale vettoriale V. Per trovarlo, possiamo partire dal presupposto che $V = V^x\mathbf{i} + V^y\mathbf{j} + V^z\mathbf{k}$ abbia la prima componente V^x identicamente nulla. In tal caso, le due componenti rimaste devono soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \partial_y V^z - \partial_z V^y = x - 2xz + z \\ \partial_x V^z = x^2 - 2y \\ \partial_x V^y = x^2 + z^2 - 3z \end{cases} . \tag{2}$$

Integrando la seconda e la terza equazione in (2) rispetto alla variabile x otteniamo dunque

$$V^z = \frac{x^3}{3} - 2yx + a(y,z) \qquad \text{e} \qquad V^y = \frac{x^3}{3} + z^2x - 3zx + b(y,z)\ ,$$

dove a e b sono due funzioni qualunque delle variabili y e z, che ora vanno scelte in modo tale che la prima equazione in (2) sia soddisfatta. Questa diventa

$$(-2x + \partial_y a) - (2zx - 3x + \partial_z b) = x - 2zx + z\ ,$$

ovvero $\partial_y a - \partial_z b = z$, che è soddisfatta prendendo $a = yz$ e $b = 0$ (ad esempio). Dunque un potenziale vettore V di F è dato da

$$V(x,y,z) = \big(\frac{x^3}{3} + z^2x - 3zx\big)\,\mathbf{j} + \big(\frac{x^3}{3} - 2yx + yz\big)\,\mathbf{k}\ .$$

3. Siccome $2\cos(2x - \pi/3)$ può essere scritto come $cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x)$, che è una particolare combinazione di $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$, questa coincide con la sua serie di Fourier.

   Passando al problema (1), scriviamo l'incognita $u(x,t)$ in serie di Fourier reale rispetto alla variabile x (decomposizione adatta alle condizioni di periodicità al bordo imposte), ovvero

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\cos(kx) + b_k(t)\,\sin(kx)\ .$$

   A questo punto l'equazione alle derivate parziali in (1) si traduce nei seguenti sistemi per i coefficienti a_k e b_k:

$$\begin{cases} \dot a_k = -k^2 a_k + \alpha k\, b_k \\ \dot b_k = -k^2 b_k - \alpha k\, a_k \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} \dot a_k \\ \dot b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k^2 & k\alpha \\ -k\alpha & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

e $\dot{a}_0 = 0$. A questo vanno aggiunte le condizioni iniziali derivate dall'ultima equazione in (1), ovvero $a_0(0) = 0$,

$$\begin{cases} a_k(0) = 0 \\ b_k(0) = 0 \end{cases} \quad \text{per } k \neq 2, \text{ e } \quad \begin{cases} a_2(0) = 1 \\ b_2(0) = \sqrt{3} \end{cases} .$$

A questo punto, tutti i coefficienti tranne a_2 e b_2 sono nulli perchè risolvono un sistema del primo ordine lineare ed omogeneo con dati iniziali nulli, mentre a_2 e b_2 sono dati da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix} &= \exp\left[\begin{pmatrix} -4 & 2\alpha \\ -2\alpha & -4 \end{pmatrix} t \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha t) & \sin(2\alpha t) \\ -\sin(2\alpha t) & \cos(2\alpha t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= e^{-4t} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha t) + \sqrt{3}\sin(2\alpha t) \\ \sqrt{3}\cos(2\alpha t) - \sin(2\alpha t) \end{pmatrix} = e^{-4t} \begin{pmatrix} 2\cos(2\alpha t - \pi/3) \\ -2\sin(2\alpha t - \pi/3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 2e^{-4t} \big[\cos(2\alpha t - \pi/3)\, \cos(2x) - \sin(2\alpha t - \pi/3)\, \sin(2x) \big] \\ &= 2e^{-4t} \cos(2x + 2\alpha t - \pi/3) . \end{aligned}$$

1. Passando in coordinate polari come da suggerimento, l'equazione in (1) diventa $\ddot{v} + \dot{v}/\rho = 4(\rho^2 - 1)e^{-\rho^2}$. Moltiplicando per ρ, si ha $\rho\ddot{v} + \dot{v} = 4\rho(\rho^2 - 1)e^{-\rho^2}$, ovvero $(\rho\dot{v})' = 4\rho(\rho^2 - 1)e^{-\rho^2}$.

   Integrando otteniamo quindi $\rho\dot{v} = a - 2\rho^2 e^{-\rho^2}$. La costante a viene presa uguale a 0 in modo da non avere singolarità nell'origine, e quindi si ottiene $\dot{v} = a - 2\rho e^{-\rho^2}$, che integrata da $v = a - b + e^{-\rho^2}$. Si impone di nuovo $b = 0$ per soddisfare la seconda condizione in (1), e quindi
$$u = e^{-\rho^2} = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \ .$$

   La formula risolutiva generale del problema (1) è data dall'integrale doppio
$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \, \log|x - y| \, dy_1 dy_2$$
(dove sia x che y sono vettori nel piano).

   Come visto a lezione, calcolare qwuesto integrale è difficile. Passando in ccordinate polari $y = \rho e^{i\theta}$ si ottiene
$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^\infty \Big[\int_0^{2\pi} f(\rho) \frac{1}{2\pi} \log|x - \rho e^{i\theta}| d\theta \Big] \rho \, d\rho \\ &= \int_0^\infty 4\rho(\rho^2 - 1)e^{-\rho^2} \Big[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|x - \rho e^{i\theta}| d\theta \Big] d\rho \ . \end{aligned}$$

   A ρ fissato, il termine tra parentesi quadre rappresenta la media $M(x,\rho)$ della funzione $\log|y|$ sul cerchio di centro x e raggio ρ. Siccome il laplaciano di $\log|y|$ è dato da $2\pi\,\delta(y)$ (dove δ è la funzione di Dirac), abbiamo che
$$M(x,\rho) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|x - \rho e^{i\theta}| d\theta = \begin{cases} \log|x| & \text{se } \rho < |x|, \\ \log\rho & \text{se } \rho > |x|. \end{cases}$$

   (Si applica la formula che dà la derivata rispetto a ρ della media di una qualunque funzione f sul cerchio di centro x e raggio ρ come l'integrale di Δf sul disco di centro x e raggio ρ, diviso per $2\pi\rho$. O anche, si noti che la funzione $\log|y|$ è armonica in tutto il piano meno l'origine, e dunque la sua media su un cerchio coincide col valore al centro – almeno finché l'origine non è compresa nel cerchio).

   Pertanto
$$u(x) = \int_0^\infty 4\rho(\rho^2 - 1)e^{-\rho^2} M(x,\rho) d\rho \ .$$

   Spezzando in due l'integrale ed integrando per parti si ottiene infine la soluzione di prima.

2. La funzione f è pari, quindi la serie di Fourier reale contiene solo coseni. I coefficienti sono dati da $a_0 = \pi^2/3$ e
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \pi)^2 \, \cos(kx) \, dx = \frac{4}{k^2}$$
(il risultato finale è stato ottenuto integrando due volte per parti), e quindi
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_1^\infty \frac{4}{k^2} \cos(kx) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k \neq 0} \frac{2}{k^2} e^{ikx} \ , \tag{3}$$

dove la seconda indentità segue dal fatto che $\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$.
Calcolando le derivate di f si ottiene $f'(x) = 2(x+\pi)$ per $-\pi < x \leq 0$, ed $f'(x) = 2(x-\pi)$ per $0 < x \leq \pi$, e quindi $f''(x) = 2 - 4\pi\delta(x)$. Pertanto f'' è una funzione pari di media nulla, e

$$f''(x) = \sum_1^\infty -4\cos(kx) \ ,$$

da cui segue la formula precedente integrando due volte.

3. Si ha $|a_k|^2 = a_k\overline{a_k}$, scriviamo quindi a_k come integral nella variabile x, ed il coniugato $\overline{a_k}$ come integrale nella variabile y; il prodotto dei due integrali diventa quindi un integrale doppio (sul quadrato $[-\pi,\pi]^2$):

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}\frac{|a_k|^2}{k^2} &= \sum_{k\neq 0}\frac{1}{4\pi^2k^2}\iint u(x)e^{-ikx}u(y)e^{iky}dx\,dy\\ &= \iint u(x)u(y)\sum_{k\neq 0}\frac{1}{4\pi^2k^2}e^{ik(y-x)}dx\,dy\\ &= \iint u(x)u(y)g(y-x)dx\,dy \ ,\end{aligned}$$

dove abbiamo posto (tenendo conto della (2) e della (3))

$$\begin{aligned}g(t) := \sum_{k\neq 0}\frac{1}{4\pi^2k^2}e^{ikt} &= \frac{1}{8\pi^2}\big(f(t)-\pi^2/3\big) =\\ &= \begin{cases}\frac{1}{8\pi^2}(x+\pi)^2 - \frac{1}{24} & \text{per } -2\pi < x \leq 0,\\ \frac{1}{8\pi^2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24} & \text{per } 0 < x \leq 2\pi.\end{cases}\end{aligned}$$