[versione: 15 giugno 2004]

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Appunti ed esercizi per il corso di

Introduzione alla teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali

a.a. 2002/03

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta di appunti ed esercizi dati durante il corso di "Introduzione alla teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali" nell'anno accademico 2002-03. Alcuni esercizi sono in realtà una ricapitolazione (e talvolta un completamento) della teoria svolta a lezione.

Nel programma sottostante sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

Programma del corso

1. Elementi di calcolo delle variazioni
   - 1.1. Una funzione sufficientemente regolare che minimizza un funzionale integrale (con condizioni fissate al bordo oppure no) risolve l'equazione di Eulero-Lagrange associata (con condizioni di Dirichlet oppure di Neumann al bordo).
   - 1.2. Vale il viceversa per funzionali convessi. Funzionale di Dirichlet ed equazione di Laplace.
2. Complementi di analisi funzionale
   - 2.1. Misure (finite) vettoriali, e duale delle funzioni continue.
   - 2.2. Dimostrazione completa del teorema di Riesz (duale di L^p)
   - 2.3. Topologia debole e debole star, spazi riflessivi, teorema di Banach-Alaoglu.
   - 2.4. Esempi di convergenza debole ma non forte: limite di $f_n(x) := f(nx)$.
   - 2.5. *Il teorema di Hahn-Banch come teorema di separazione (senza dimostrazione). Un convesso fortemente chiuso è debolmente chiuso.*
   - 2.6. Esistenza di minimi per funzionali coercivi e debolmente semicontinui inferiormente su uno spazio riflessivo separabile.
   - 2.7. Convessità e semicontinuità inferiore forte implicano la semicontinuità inferiore debole. Applicazione: funzionali integrali convessi su L^p: coercività e crescita p dell'integranda.
3. Distribuzioni
   - 3.1. Distribuzioni (su $\mathbb{R}$) come duale delle funzioni regolari a supporto compatto. *Topologia sullo spazio delle distribuzioni.* Nozione di convergenza debole per una successione di distribuzioni.
   - 3.2. L'operatore di derivazione sulle distribuzioni.
   - 3.3. Prodotto di convoluzione di funzioni L^p, stime L^p standard. Derivata del prodotto di convoluzione.
   - 3.4. Regolarizzazione per convoluzione delle funzioni L^p.
   - 3.5. Convoluzione di distribuzioni e regolarizzazione per convoluzione.
   - 3.6. Distribuzioni su un aperto qualunque; approssimazione con funzioni regolari.
4. Spazi di Sobolev
   - 4.1. Definizione distribuzionale degli spazi di Sobolev $W^{1,p}$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$.
   - 4.2. Proprietà degli spazi di Sobolev su un intervallo: estensione, approssimazione con funzioni regolari, immersione (compatta) nelle funzioni Hölderiane fin sul bordo.
   - 4.3. Caratterizzazione della convergenza debole negli spazi di Sobolev in termini di convergenza debole di funzioni e derivate.

4.4. Esistenza del minimo per alcuni esempi di funzionali integrali convessi. Equazione di Eulero-Lagrange in senso debole, regolarità ulteriore per i minimi del funzionale di Dirichlet.

4.5. *Spazi di Sobolev su un aparto regolare in dimensione qualunque: caratterizzazioni alternative, estensione, immersioni, traccia sul bordo, disuguaglianze tipo Poincaré.*

4.6. Convergenza debole degli spazi di Sobolev ed esistenza del minimo per l'energia di Dirichlet; soluzioni deboli dell'equazione di Laplace (con varie condizioni al bordo).

5. Serie di Fourier

5.1. Serie di Fourier reale e complessa per fuzioni in $L^2(-\pi,\pi)$. Differenza tra $(-\pi,\pi)$ e $\mathbb{R}/2\pi$.

5.2. Serie di Fourier di una funzione C^1 su $\mathbb{R}/2\pi$ e della sua derivata.

5.3. Caratterizzazione delle funzioni regolari su $\mathbb{R}/2\pi$ in termini dei coefficienti Fourier.

5.4. *Caratterizzazione delle distribuzioni su $\mathbb{R}/2\pi$ in termini dei coefficienti Fourier.*

5.5. Convergenza della serie di Fourier per funzioni a) in L^2, b) con coefficienti sommabili, c) in $W^{1,2}$, d) in $W^{1,2}$ a tratti.

5.6. Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni.

5.7. Soluzione dell'equazione delle onde e del calore via serie di Fourier (separazione delle variabili, caso classico). Ruolo dei dati iniziali e delle condizioni al bordo.

5.8. Serie di Fourier per funzioni sul cubo $(-\pi,\pi)^n$.

6. Teorema spettrale e basi ortonormali

6.1. Teorema spettrale: dato un spazio di Hilbert W che si immerge compattamente e densamente nello spazio di Hilbert H, ed una forma quadratica Q su W semicontinua inferiormente e coerciva, allora esiste una base ortonormale di H fatta di autovettori dell'operatore autoaggiunto T associato a Q. Dimostrazione per minimizzazioni successive.

6.2. La base standard di $L^2(-\pi,\pi)$ come base di autovettori dell'operatore $Tu = -\ddot{u}$ con condizioni di periodicità al bordo.

6.3. Basi $L^2(0,\pi)$ di autovettori dell'operatore $Tu = -\ddot{u}$ con condizioni di Dirichlet (risp. Neumann) al bordo.

7. Trasformata di Fourier

7.1. *Trasformata di Fourier come limite delle serie di Fourier.*

7.2. Trasformata di Fourier di una funzione in L^1 di $\mathbb{R}^n$.

7.3. La trasformata di Fourier è un'isometria su L^2; trasformata della derivata.

7.4. Distribuzioni temperate e loro trasformate di Fourier.

7.5. Calcolo delle trasformate di Fourier di alcune funzioni.

7.6. *Soluzione fondamentale di un'equazione lineare su $\mathbb{R}^n$.*

Appunti di teoria della misura

[versione: 6 marzo 2004]

PRESUPPOSTI E BIBLIOGRAFIA. - Si presuppone una conoscenza di base di teoria della misura ed in particolare dell'integrazione (inclusi i vari teoremi di convergenza, e le nozioni di base sugli spazi L^p). Un testo di riferimento sono, ad esempio, i capitoli 1 e 2 di [Ru] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

AVVERTENZA. - Per quanto abbia cercato di includere tutte le definizioni utilizzate, inevitabilmente alcune di quelle standard (ad esempio quella di integrale) sono state omesse. Le dimostrazioni sono spesso incomplete – diversi dettagli sono lascati da rifinire al lettore – quando non addirittura proposte interamente come esercizi. L'asterisco * vicino al numero di un esercizio segnala quelli *presumibilmente* difficili.

1. Costruzione di misure esterne

1.1. DEFINIZIONE. - Sia X un insieme qualunque. Si dice misura esterna – o misura numerabilmente subadditiva – ogni funzione $\phi : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ tale che (a) $\mu(\varnothing) = 0$, (b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subset B$, (c) $\mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$ per ogni $\{A_n\}$ ricoprimento numerabile di A. Le proprietà (b) e (c) vengono dette monotonia e σ-subadditività.

1.2. DEFINIZIONE. - Un insieme $E \subset X$ si dice ϕ-misurabile (secondo Carathéodory) se per ogni insieme $B \subset X$ si ha

$$\phi(B) = \phi(B \cap E) + \phi(B \setminus E) \ . \tag{1.1}$$

Indichiamo con $\mathscr{F}_\phi$ la famiglia degli insiemi ϕ-misurabili.

1.3. TEOREMA. - *$\mathscr{F}_\phi$ è una σ-algebra, e ϕ è σ-additiva su $\mathscr{F}_\phi$.*

1.4. TEOREMA. - *Se X è uno spazio metrico e ϕ è additiva sui distanti (cioè $\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B)$ quando $\operatorname{dist}(A, B) > 0$), allora ogni insieme Boreliano è ϕ-misurabile, ed in particolare ϕ è σ-additiva sui Boreliani.*

Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.3. - Prima di tutto osserviamo che essendo ϕ subadditiva, la condizione (1.1) è equivalente alla

$$\phi(B) \geq \phi(B \cap E) + \phi(B \setminus E) \ . \tag{1.2}$$

Ovviamente $\mathscr{F}_\phi$ contiene $\varnothing$ ed è chiuso per complemento (se $E \in \mathscr{F}_\phi$ allora $X \setminus E \in \mathscr{F}_\phi$). Dati $E, E' \in \mathscr{F}_\phi$, allora $E \cap E' \in \mathscr{F}_\phi$: infatti, per ogni $B \subset X$,

$$\begin{aligned}\phi(B) &= \phi(B \cap E) + \phi(B \setminus E) \\ &= \phi((B \cap E) \cap E') + \phi((B \cap E) \setminus E') + \\ &\quad + \phi((B \setminus E) \cap E') + \phi((B \setminus E) \setminus E') \\ &\geq \phi(B \cap (E \cap E')) + \phi((B \setminus (E \cap E'))\end{aligned}$$

dove le prime due eguaglianze seguono dalla misurabilità di E ed E', mentre l'ultima disuguaglianza segue dalla subadditività di ϕ e dal fatto che l'unione di $(B \cap E) \setminus E'$, $(B \setminus E) \cap E'$ e $(B \setminus E) \setminus E'$ è uguale a $B \setminus (E \cap E')$.

Abbiamo dunque dimostrato che $\mathscr{F}_\phi$ è un algebra (cfr. Esercizio 1.6), e dalla (1.1) segue immediatamente che ϕ è additiva su $\mathscr{F}_\phi$.

Facciamo vedere ora che $\mathscr{F}_\phi$ è chiusa per unione numerabile disgiunta. Dati $E_n \in \mathscr{F}_\phi$ disgiunti con unione E, abbiamo che per ogni $B \subset X$ ed ogni m

$$\begin{aligned}\phi(B) &= \phi(B \cap E_1) + \phi(B \setminus E_1) \\ &= \phi(B \cap E_1) + \phi(B \cap E_2) + \phi(B \setminus (E_1 \cup E_2)) \\ &= \phi(B \cap E_1) + \phi(B \cap E_2) + \phi(B \cap E_3) + \phi(B \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)) \\ &\ \vdots \\ &= \phi(B \cap E_1) + \cdots + \phi(B \cap E_m) + \phi(B \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_m)) \\ &\geq \phi(B \cap E_1) + \cdots + \phi(B \cap E_m) + \phi(B \setminus E)\end{aligned}$$

e passando al limite per $m \to \infty$

$$\phi(B) = \sum_n \phi(B \cap E_n) + \phi(B \setminus E) \geq \phi(B \cap E) + \phi(B \setminus E) \tag{1.3}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla subadditività di ϕ. La (1.3) dimostra che E è misurabile (cfr. (1.2)), e dunque $\mathscr{F}_\phi$ è una σ-algebra (cfr. Esercizio 1.7). Inoltre, ponendo $B := E$ nella (1.3) si ottiene anche che ϕ è σ-additiva. $\square$

Per il resto di questa sezione X è uno spazio metrico, e ϕ una misura esterna additiva sui distanti.

1.5. Lemma. - *Se* (A_n) *è una successione crescente di insiemi in* X *tali che* $\operatorname{dist}(A_n, X \setminus A_{n+1}) > 0$, *allora*

$$\phi(A) = \sup_n \phi(A_n) \ . \tag{1.4}$$

Dimostrazione. - Poniamo $B_n := A_{n+1} \setminus A_n$. Siccome per ogni $m > 0$

$$A_m \subset A \subset A_m \cup \Big(\bigcup_{n>m} B_n \Big) \ ,$$

dalla subadditività e dalla monotonia di ϕ segue che, per ogni m,

$$\phi(A_m) \leq \phi(A) \leq \phi(A_m) + \sum_{n>m} \phi(B_n) \ ,$$

e passando al limite per $m \to +\infty$ otteniamo la (1.4) a patto che $\sup \phi(A_n) = +\infty$ oppure

$$\sum_n \phi(B_n) < +\infty \ . \tag{1.5}$$

Non resta che dimostrare la (1.5) quando $\sup \phi(A_n) < +\infty$. Dall'ipotesi sugli insiemi A_n segue che B_n e B_m sono distanti non appena $|n-m| \geq 2$, e dunque, dall'additività sui distanti segue che, per ogni m (cfr. Esercizio 1.8),

$$\sum_{n \text{ pari } \leq m} \phi(B_n) \leq \phi(A_m)$$

e passando al limite per $m \to +\infty$,

$$\sum_{n \text{ pari}} \phi(B_n) \leq \sup_m \phi(A_m) < +\infty \ .$$

Lo stesso argomento si applica alla serie dei termini dispari. $\square$

Dimostrazione del Teorema 1.4. - Basta dimostrare che ogni chiuso E è misurabile. Per ogni intero n poniamo $A_n := \{x : \operatorname{dist}(x, E) \geq 1/n\}$. Siccome E ed A_n sono distanti, per ogni insieme $B \subset X$ abbiamo $\phi(B) \geq \phi(B \cap E) + \phi(B \cap A_n)$ (cfr. Esercizio 1.8), e passando al limite per $n \to +\infty$,

$$\phi(B) \geq \phi(B \cap E) + \sup_n \phi(B \cap A_n) = \phi(B \cap E) + \phi(B \setminus E) \ ,$$

dove l'uguaglianza segue dal Lemma 1.5 e dal fatto che l'unione degli A_n è il complementare di E. $\square$

Esercizi

1.6. - Si dimostri che una famiglia di sottoinsiemi di X che contiene l'insieme vuoto, chiusa per complemento, e chiusa per intersezione finita è un algebra.

1.7. - Si dimostri che un'algebra di sottoinsiemi di X è una σ-algebra se e solo se è chiusa per unione numerabile crescente.

1.8. - Sia X è uno spazio metrico e ϕ una misura esterna additiva sui distanti. Dimostrare allora che data una famiglia finita di insiemi B_n a due a due distanti e contenuti in A,

$$\sum_n \phi(B_n) \leq \phi(A) \ .$$

Dimostrare che questa disuguaglianza si estende a famiglie numerabili.

Costruzione della misura di Lebesgue. - Dato $x \in \mathbb{R}^N$ e $d > 0$, il cubo (aperto) di lato d e centro x in $\mathbb{R}^N$ è l'insieme $Q := x + (-d/2, d/2)^N$. Per ogni $B \subset \mathbb{R}^N$ poniamo

$$\phi(B) := \inf \Big\{ \sum_n \big(\text{lato}(Q_n)\big)^N \Big\} \tag{1.6}$$

dove l'estremo inferiore viene preso tra tutti i ricoprimenti numerabili $\{Q_n\}$ di B fatti di cubi aperti.

1.9. - Dimostrare che ϕ è una misura esterna su $\mathbb{R}^N$.

1.10. - Dimostrare che per ogni cubo chiuso Q si ha $\phi(Q) = \big(\text{lato}(Q)\big)^N$.

1.11. - Fissato $\delta > 0$, dimostrare che il valore di $\phi(B)$ non cambia se nella (1.6) si impone la restrizione $\text{lato}(Q_n) \leq \delta$ per ogni n.

1.12. - Dimostrare che ϕ è additiva sui distanti.

1.13*. - Dimostrare che ϕ coincide con la misura esterna secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, e che gli insieme misurabili secondo Carathéodory coincidono con gli insiemi misurabili secondo Lebesgue.

1.14. - Sia X uno spazio metrico, e sia $T : \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ una funzione crescente di insieme (cioè $T(A) \le T(A')$ quando $A \subset A'$). Fissato $\delta > 0$ poniamo

$$\phi_\delta(B) := \inf\Big\{\sum_n T(B_n)\Big\} \tag{1.7}$$

dove l'estremo inferiore viene preso tra tutti i ricoprimenti numerabili $\{B_n\}$ di B tali che $\operatorname{diam}(B_n) < \delta$ per ogni n. Poniamo quindi

$$\phi(B) := \lim_{\delta\to 0} \phi_\delta(B) = \sup_{\delta>0} \phi_\delta(B) \ .$$

Dimostrare che ϕ è una misura esterna additiva sui distanti.

1.15. - Si prendano T e ϕ_δ come nell'esercizio precedente, e si supponga che per ogni $B \subset X$

$$T(B) = \inf\big\{T(A) : \ A \text{ aperto contenente } B\big\} \ .$$

Dimostrare allora che il valore di $\phi_\delta(B)$ in (1.6) non cambia se si aggiunge la restrizione che gli elementi B_n del ricoprimento siano aperti.

1.16*. - Nell'Esercizio 1.14, si prenda $X = \mathbb{R}^N$, e $T(B) := \operatorname{diam}(B)$. Dimostrare che se B è un segmento allora $\phi(B)$ è uguale alla lunghezza di B. In questo caso, la misura ϕ è quella che si chiama misura di Hausdorff 1-dimensionale.

1.17**. - Nell'Esercizio 1.14, si prenda $X = \mathbb{R}^2$, e $T(B) := (\operatorname{diam}(B))^2$. Dimostrare che ϕ coincide con la misura di Lebesgue a meno di un fattore costante. Provare a calcolare questo fattore.

1.18. - Sia X uno spazio metrico, e sia T una funzione definita su tutti gli aperti di X, e a valori in $[0,+\infty]$, che sia monotona (cioè $T(A) \le T(A')$ se $A \subset A'$) e additiva sugli aperti distanti. Dimostrare che

$$\phi(B) := \inf\big\{T(A) : \ A \text{ aperto contenente } B\big\}$$

è una misura esterna additiva sui distanti che coincide con T sugli aperti.

2. Misure positive

2.1. Notazioni. - Nel seguito X è uno spazio metrico, $\mathscr{B}(X)$ è la σ-algebra dei Boreliani su X. Per misura positiva intenderemo sempre una misura su $\mathscr{B}(X)$, ovvero una funzione σ-additiva $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,+\infty]$. A meno di non sia scritto esplicitamente il contrario, per tutto questo capitolo funzioni, mappe ed insiemi sono *sempre* Boreliani.

Definiamo le seguenti notazioni:

∘ data $f : X \to [0,+\infty)$, $(f\cdot\mu)(B) := \int_B f\,d\mu$;

∘ dato $E \in \mathscr{B}(X)$, $\mu \llcorner E := 1_E \cdot \mu$, ovvero $(\mu \llcorner E)(B) := \mu(B \cap E)$;

∘ μ è *concentrata* in E se $\mu(X \setminus E) = 0$;

∘ μ è finita se $\mu(X) < +\infty$;

∘ μ è σ-finita se $X = \bigcup B_n$ con $\mu(B_n) < +\infty$ per ogni n;

∘ μ è localmente finita se ogni punto ammette un intorno di misura finita. Se X è localmente compatto, questo equivale a chiedere che $\mu(K) < +\infty$ per ogni K compatto.

OSSERVAZIONI. - Rispetto alla trattazione in [Ru], noi ci limitiamo al caso di misure definite esclusivamente sui Boreliani. Questo permette di lavorare sempre sulla stessa σ-algebra, semplificando molti enunciati. Inoltre, le misure finite così definite sono automaticamente regolari (Proposizione 2.2). Dal punto di vista delle applicazioni che abbiamo in mente, questa scelta non impone nessuna reale restrizione: se μ è una misura regolare sulla σ-algebra $\mathscr{M}$ che contiene gli aperti di X (e quindi anche i Boreliani), allora definire lo spazio $L^p(\mu)$ come quoziente delle funzioni Boreliane o di quelle $\mathscr{M}$-misurabili è la stessa cosa, perché ogni funzione misurabile coincide μ-quasi ovunque con una Boreliana.

2.2. PROPOSIZIONE. - *Ogni misura μ finita sui Boreliani è esteriormente ed interiormente regolare, vale a dire che per ogni $B \in \mathscr{B}(X)$ si ha, rispettivamente,*

$$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : \ A \text{ aperto contenente } B\} \ , \tag{2.1}$$

$$\mu(B) = \sup\{\mu(C) : \ C \text{ chiuso incluso in } B\} \ . \tag{2.2}$$

2.3. DEFINIZIONE. - Date due misure μ e λ su X, si dice che μ è *assolutamente continua* rispetto a λ, e si scrive $\mu \ll \lambda$, se $\mu(B) = 0 \Rightarrow \lambda(B) = 0$. Si dice invece che μ e λ sono *mutuamente singolari*, e si scrive $\mu \perp \lambda$, se esistono E ed F disgiunti tali che μ e λ sono concentrate in E ed F, rispettivamente.

2.4. TEOREMA (DECOMPOSIZIONE DI HAHN). - *Date due misure finite μ e λ, si può decomporre λ come $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ con $\lambda_a \ll \mu$ e $\lambda_s \perp \mu$, e la decomposizione è unica.*

2.5. TEOREMA (RADON-NIKODYM). - *Date due misure finite μ e λ, se $\lambda \ll \mu$, allora esiste $f : X \to [0, +\infty)$ tale che $\lambda = f \cdot \mu$. Tale f è unica (a meno di funzioni μ-equivalenti) e viene chiamata* densità *di λ rispetto a μ, ed indicata con $d\lambda/d\mu$.*

Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.2. - Per ogni insieme $B \subset X$ (non necessariamente Boreliano) si ponga

$$\phi(B) := \inf\big\{\mu(A) : \ A \text{ aperto contenete } B\big\} \ .$$

È facile vedere che ϕ è una misura esterna su X, additiva sui distanti, che coincide con μ su tutti gli aperti. Pertanto la restrizione di ϕ ai Boreliani è una misura σ-additiva, e siccome $\phi(B) = \mu(B)$ per ogni B aperto, lo stesso vale per ogni B Boreliano (cfr. Esercizio 2.9).

Infine, la regolarità interna segue da quella esterna passando al complementare. □

2.6. LEMMA. - *Sia λ una misura, e sia $\mathscr{F}$ una famiglia di insiemi Boreliani chiusa per unione numerabile. Allora $\mathscr{F}$ ammette un elemento λ-massimale E, cioè tale che $\lambda(E) \geq \lambda(B)$ per ogni $B \in \mathscr{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia $M := \sup\{\lambda(B) : B \in \mathscr{F}\}$, si prenda una successione di insiemi $B_n \in \mathscr{F}$ tali che $\lambda(B_n) \to M$ e si ponga E uguale all'unione dei B_n. Chiaramente E appartiene a $\mathscr{F}$, e $\lambda(E) \geq \lambda(B_n)$ per ogni n per la proprietà di monotonia delle misure positive, e dunque $\mu(E) = M$. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.4. - Ci limitiamo al caso in cui λ è finita. Sia $\mathscr{F}$ la famiglia di tutti gli insiemi B tali che $\mu(B) = 0$. Chiaramente $\mathscr{F}$ è chiusa per unione numerabile, e dunque ammette un elemento λ-massimale E (Lemma 2.6).

Dunque $\mu(E) = 0$; inoltre, dato $B \subset X \setminus E$ tale che $\mu(B) = 0$, deve per forza essere $\lambda(B) = 0$ (altrimenti $B \cup E$ contraddirebbe la massimalità di E). Ma allora basta porre $\lambda_s := \lambda \llcorner E$ e $\lambda_a := \lambda \llcorner (X \setminus E)$. $\square$

2.7. LEMMA. - *Sia λ una misura finita, e sia $\mathscr{F}$ una famiglia di Boreliani in X chiusa per unione numerabile crescente. Allora esiste $E \in \mathscr{F}$ tale che $\lambda(E) = \lambda(B)$ per ogni $B \in \mathscr{F}$ che contiene E.*

DIMOSTRAZIONE. - Dati A, B in $\mathscr{F}$, diciamo che $A \preceq B$ se $A = B$ oppure $A \subset B$ e $\lambda(A) < \lambda(B)$. Questo è un ordine parziale, e la tesi è soddisfatta da ogni elemento massimale E.

Resta dunque da dimostrare che valgono le ipotesi del Lemma di Zorn, vale a dire, che ogni catena massimale $\mathscr{G}$ ammette massimo. Poniamo dunque $M := \sup\{\lambda(B) : B \in \mathscr{G}\}$: se esiste $B \in \mathscr{G}$ tale che $\lambda(B) = M$, allora B è un massimo. Supponiamo per assurdo che non esista tale B, e prendiamo una successione $(B_n) \in \mathscr{G}$ tale che i valori $\lambda(B_n)$ crescono (strettamente) ad M. Siccome $\mathscr{G}$ è una catena, ne segue che (B_n) è una successione strettamente crescente, e pertanto l'unione B appartiene a $\mathscr{F}$. Inoltre, dato $B' \in \mathscr{G}$, per ipotesi deve esistere n tale che $\lambda(B') < \lambda(B_n)$, per cui $B' \preceq B_n \preceq B$. Dunque $B \in \mathscr{G}$ per la massimalità di $\mathscr{G}$, e $\lambda(B) = M$. Contraddizione. $\square$

2.8. LEMMA. - *Sia λ e μ misure finite tali che $\lambda \ll \mu$ e $\lambda \neq 0$, e si prenda δ tale che $0 < \delta < \lambda(X)/\mu(X)$. Allora esiste E tale che $\mu(E) > 0$ e $\delta\,\mu(B) \leq \lambda(B)$ per ogni $B \subset E$. In altre parole, $\delta \cdot 1_E \cdot \mu \leq \lambda$.*

DIMOSTRAZIONE. - Supponiamo per assurdo che non sia così. Allora, per ogni E tale che $\lambda(E) > 0$ esiste $B \subset E$ tale che $\lambda(B) > 0$ e

$$\lambda(B) \leq \delta\,\mu(B) \ . \tag{2.3}$$

Sia ora $\mathscr{F}$ la classe degli insiemi B per cui vale la (2.3). Chiaramente $\mathscr{F}$ è chiuso per unione numerabile crescente e per unione numerabile disgiunta (ma *non* per unione finita).

Prendiamo ora un elemento E di $\mathscr{F}$ massimale nel senso del Lemma 2.7. Allora $\lambda(X \setminus E) = 0$ (infatti, se così non fosse, esisterebbe $B \subset X \setminus E$ tale che $\lambda(B) > 0$ e $B \in \mathscr{F}$, e dunque $E \cup B$ contraddirebbe la massimalità di E). Dunque $\lambda(X) = \lambda(E) \leq \delta\,\mu(E) \leq \delta\,\mu(X)$, che contraddice la scelta di δ. $\square$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.5. - Sia $\mathscr{F}$ l'insieme delle funzioni f positive tali che $f \cdot \mu \leq \lambda$. La famiglia $\mathscr{F}$ è chiusa per inviluppo finito (se $f, f' \in \mathscr{F}$ allora $f \vee f' := \max\{f, f'\} \in \mathscr{F}$) e per inviluppo numerabile monotono (se $f_n \in \mathscr{F}$ ed $f_{n+1} \geq f_n$ per ogni n allora $\vee f_n := \sup f_n \in \mathscr{F}$). Quindi $\mathscr{F}$ è chiusa anche per inviluppo numerabile.

Ora, ragionando come nella dimostrazione del Lemma 2.6 è facile vedere che $\mathscr{F}$ ammette un elemento che massimizza $\int f\,d\mu$, che è quindi la funzione cercata. Infatti $f \cdot \mu \leq \lambda$, e se per assurdo la misura $\lambda' := \lambda - f \cdot \mu$ non fosse identicamente nulla, allora per il Lemma 2.8 esisterebbe una funzione g non μ-quasi ovunque nulla tale che $g \cdot \mu \leq \lambda'$, e $f + g$ contraddirebbe la massimalità di f. $\square$

Esercizi

2.9. - Siano μ e μ' due misure finite che coincidono su tutti gli aperti. Dimostrare che allora coincidono su tutti i Boreliani. Far vedere che questo non è necessariamente vero se μ e μ' sono σ-finite.

[*Si prende la classe delle funzioni Boreliane limitate per cui l'integrale rispetto μ e quello rispetto a μ' coincidono. Siccome questa classe contiene la funzioni continue, usando il teorema* *delle classi monotone si vede facilmente che coincide con la classe di tutte le funzioni Boreliane limitate.*]

2.10. - Dimostrare che ogni misura μ σ-finita è interiormente regolare.

2.11. - Far vedere che data μ localmente finita e σ-finita, allora X ammette un ricoprimento numerabile di aperti di misura finita. [*L'unica dimostrazione che conosco usa il fatto che X, essendo uno spazio metrico, è anche paracompatto, e quindi il ricoprimento degli aperti di misura finita ammette un raffinamento aperto localmente finito; usando la σ-finitezza di μ si vede facilmente che solo una famiglia numerabile di elementi di questo raffinamento può avere misura positiva.*]

2.12*. - Dimostrare che ogni misura μ localmente finita e σ-finita è esteriormente regolare. Far vedere con esempi che entrambe le ipotesi sono necessarie.

2.13. - Dimostrare che i Teoremi 2.4 e 2.5 valgono anche quando μ e λ sono misure σ-finite.

2.14. - Verificare che la dimostrazione del Teorema 2.4 richiede solo la finitezza (o anche la σ-finitezza) di λ ma non quella di μ.

2.15. - Verificare che se μ è una misura non atomica (cioè $\mu(\{x\}) = 0$ per ogni $x \in X$ – si prenda per esempio la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$) e λ è la misura che conta i punti (cioè $\lambda(B) = \#(B)$ per ogni B per ogni B finito, e $\lambda(B) = +\infty$ altrimenti), allora il Teorema 2.4 non vale tranne che per $\mu = 0$.

2.16*. - Sia $\{\mu_i\}$ una qualunque famiglia (non necessariamente numerabile) di misure su X. L'inviluppo inferiore delle misure μ_i è è definito per ogni Boreliano B dalla formula

$$\bigwedge_i \mu_i := \inf \Big\{ \sum_i \mu_i(B_i) \Big\}$$

dove l'estremo inferiore viene preso su tutte le partizioni $\{B_i\}$ di B tali che B_i è vuoto eccetto che per una quantità numerabile di indici i. Dimostrare che $\wedge \mu_i$ è una misura.

2.17. - Proporre una definizione di inviluppo superiore di una famiglia di misure che dia luogo ad una misura.

2.18*. - Sia λ una misura finita assolutamente continua rispetto a μ, e per ogni n intero si ponga $\lambda_n := \lambda \wedge (n \cdot \mu)$. Dimostrare che per ogni B vale

$$\lambda(B) = \sup \lambda_n(B) \ .$$

2.19. - Usando il risultato dell'esercizio precedente, dimostrare il Teorema 2.5 quando μ è σ-finita e λ qualunque.

2.20. - Verificare che se μ è la misura che conta i punti, allora ogni misura λ è assolutamente continua rispetto a μ, e tuttavia il Teorema 2.5 non vale per nessuna misura λ non atomica che non sia nulla.

3. Misure vettoriali

Seguiamo le convenzioni stabilite in precedenza. In particolare, X è uno spazio metrico.

3.1. Definizione. - Sia E uno spazio normato di dimensione finita. Per misura a valori in E intendiamo una funzione $\lambda : \mathscr{B}(X) \to E$ tale che $\lambda(\varnothing) = 0$ e $\lambda(B) = \sum \lambda(B_n)$ per ogni successione $\{B_n\}$ di insiemi disgiunti con unione B.

3.2. Definizione. - Data λ misura a valori in E, la *variazione* $|\lambda|$ è definita, per ogni B Boreliano, da

$$|\lambda|(B) := \sup\Big\{ \sum |\lambda(B_n)| \Big\} \ , \tag{3.1}$$

dove l'estremo inferiore viene preso tra tutte le partizioni numerabili di B e $|\cdot|$ è ora la norma di E. La *variazione totale* di λ è

$$\|\lambda\| := |\lambda|(X) \ . \tag{3.2}$$

3.3. Proposizione. - *La variazione $|\lambda|$ è una misura. Inoltre, se E ha dimensione finita, allora $\|\lambda\| < +\infty$, ovvero $|\lambda|$ è una misura finita.*

3.4. Definizione. - Date λ misura a valori in E e μ misura positiva, diciamo che $\lambda \ll \mu$ (risp. $\lambda \perp \mu$) se $|\lambda| \ll \mu$ (risp. $|\lambda| \perp \mu$).

3.5. Proposizione. - *Sia λ una misura a valori in E, e sia μ una misura finita. Allora si può decomporre λ come $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, dove $\lambda_a \ll \mu$ e $\lambda_s \perp \mu$, e la decomposizione è unica. Inoltre, esiste $f : X \to E$ tale che $\lambda_a = f \cdot \mu$ (cfr. Esercizio 3.13).*

3.6. Corollario. - *Data λ misura a valori in E, esiste $f : X \to E$ tale che $|f| = 1$ per $|\lambda|$-quasi ogni punto e $\lambda = f \cdot |\lambda|$. La funzione f è unica, è chiamata densità di λ rispetto a $|\lambda|$, ed indicata con $d\lambda/d|\lambda|$.*

Dimostrazioni

Dimostrazione della Proposizione 3.3. - Lasciamo per esercizio la verifica che $|\lambda|$ è una misura. Supponendo per assurdo che $\|\lambda\| = +\infty$, vogliamo costruire una successione disgiunta di insiemi le cui misure non sono sommabili.

Passo 1. Prima di tutto osserviamo che dato un insieme B tale che $|\lambda|(B) = +\infty$, esiste sempre $B' \subset B$ tale che $|\lambda|(B') > 1$ e $|\lambda|(B \setminus B') = +\infty$.

Passo 2. Usando il passo precedente, costruiamo per induzione una successione di insiemi disgiunti $\{B_n\}$ tali che $|\lambda|(B_n)| \geq 1$ per ogni n; da questa (e dalla definizione di $|\lambda|$) otteniamo quindi una successione di insiemi disgiunti $\{A_n\}$ tali che

$$\sum_n |\lambda(A_n)| = +\infty \ .$$

Passo 3. Dato Λ vettore unitario in E^* ed α tale che $0 < \alpha < 1$, indichiamo con $C(\Lambda, \alpha)$ il cono

$$C(\Lambda, \alpha) := \big\{ v \in E : \ \Lambda v \geq \alpha |v| \big\} \ .$$

Usando la compattezza della sfera di E, non è difficile far vedere che si può ricoprire E con un numero finito di coni $C_i = C(\Lambda_i, \alpha)$ con α assegnato – per esempio uguale ad $1/2$. Presa dunque la successione $\{A_n\}$ al passo precedente, deve esistere almeno un indice i per cui il vettore $\lambda(A_n)$ appartiene a C_i per infiniti n. Indichiamo con $\{A_m\}$ questa sottosuccessione di $\{A_n\}$. Dalla definizione di C_i otteniamo allora

$$\sum_m \Lambda_i(\lambda(A_m)) \geq \sum \frac{1}{2} |\lambda(A_m)| = +\infty$$

e questo dimostra che la serie $\sum \lambda(A_m)$ non può convergere. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 3.5. - *Passo 1.* Se $E = \mathbb{R}$, allora possiamo decomporre λ come $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, dove

$$\lambda^+ := \frac{|\lambda| + \lambda}{2} \quad \text{e} \quad \lambda^- := \frac{|\lambda| - \lambda}{2} \ .$$

Sia λ^+ che λ^- sono misure positive (verificatelo!) e per concludere basta applicare i Teoremi 2.4 e 2.5 a queste due misure separatamente.

Passo 2. Se invece E ha dimensione finita maggiore di 1, possiamo ricondurci al caso $E = \mathbb{R}^N$. In questa situazione, possiamo rappresentare λ come $(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$, e dunque basta applicare la Proposizione 3.5, appena dimostrata per la misure reali, a ciascuna componente λ_i. □

Dimostrazione del Corollario 3.6. - Per ottenere f basta applicare la Proposizione 3.5. Inoltre $|f| = 1$ quasi ovunque per via dell'Esercizio 3.13.

Esercizi

3.7. - Sia $X := \mathbb{N}$, sia E uno spazio di Hilbert separabile con base $\{e_n\}$. Per ogni $B \subset \mathbb{N}$ poniamo

$$\lambda(B) := \sum_{n \in B} \frac{1}{1+n} e_n \ .$$

Verificare che λ è una misura su $\mathbb{N}$ a valori in E con variazione totale infinita.

3.8*. - Dimostrare che se E è uno spazio di Banach separabile, allora gli insiemi Boreliani generati dalla topologia forte coincidono con quelli generati dalla topologia debole, o anchequelli dalla topologia debole*, nell'eventualità che E sia un duale. Questo non è necessariamente vero se lo spazio non è separabile: verificarlo per $E = \mathscr{M}(X)$.

Negli esercizi che seguono, μ è una misura positiva su X, ed E uno spazio di Banach.

3.9. - Dato $1 \le p \le \infty$, indichiamo $L^p(\mu, E)$ lo spazio delle funzioni Boreliane $g : X \to E$ tali che la norma

$$\|g\|_p := \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}$$

è finita, dove $|\cdot|$ sta per la norma di E, e per $p = +\infty$ si prende $\|g\|_\infty$ uguale all'estremo superiore essenziale di $|g|$. Dimostrare che $L^p(\mu, E)$, quozientato rispetto alla solita equivalenza μ-quasi ovunque, è uno spazio di Banach.

3.10*. - Sia $\mathscr{S}$ lo spazio delle funzioni semplici da $X \to E$, vale a dire quelle della forma

$$g := \sum e_i \, 1_{B_i} \tag{3.3}$$

dove la somma è finita, e per ogni i si ha $B_i \in \mathscr{B}(X)$ ed $e_i \in E$. Dimostrare che se E è separabile allora $\mathscr{S}$ – o meglio, $\mathscr{S}$ quozientato rispetto alla solita equivalenza μ-quasi ovunque – è denso in $L^p(\mu, E)$. Si mostri con un esempio che questo non è *mai* vero se E non è separabile.

3.11. - Data una funzione semplice $g : X \to E$ della forma (3.3), definiamo l'integrale di f rispetto alla misura μ alla solita maniera, ovvero

$$\int_X f \, d\mu := \sum e_i \mu(B_i) \ .$$

Dimostrare che questa definizione è ben posta, ovvero che non dipende dalla rappresentazione di g. Dimostrare quindi che se dotiamo $\mathscr{S}$ della norma di $L^1(\mu, E)$, allora l'operatore di integrazione (da S in E) ha norma 1.

Una conseguenza importante è questa: quando E è *separabile*, $\mathscr{S}$ è denso in $L^1(\mu, E)$ (Esercizio 3.10), e dunque l'operatore di integrazione può essere esteso per continuità ad un operatore continuo su tutto $L^1(\mu, E)$. Si tratta del cosiddetto integrale di Bochner.

3.12. - Enunciare e dimostrare una versione del teorema di convergenza dominata per l'integrale di funzioni da X in E (definito come nell'esercizio precedente).

3.13. - Data f in $L^1(\mu, E)$, definiamo la misura $\lambda = f \cdot \mu$ come al solito. Dimostrare che λ è effettivamente una misura, e che $|\lambda| = |f| \cdot \mu$ e $\|\lambda\| = \|f\|_1$.

3.14*. - Attenzione: il teorema di Radon-Nikodym (Proposizione 3.5) non può essere esteso a tutti gli spazi di Banach E, neanche assumendo che λ abbia variazione totale finita. Per esempio: sia μ la misura di Lebesgue sull'intervallo $[0, 1]$, sia $E = L^1(\mu)$ e sia λ la misura a valori in E che associa ad ogni Boreliano B contenuto in $[0, 1]$ la sua stessa funzione indicatrice (vista come elemento di E). Si verifichi che λ è una misura con variazione totale finita che non può essere rappresentata nella forma $\lambda = f \cdot \mu$ tramite alcuna funzione densità f a valori in E. Il fatto è che la rappresentazione è possibile prendendo f a valori nello spazio delle misure $\mathscr{M}([0, 1])$, e più precisamente prendendo $f(x)$ uguale alla delta di Dirac in x per (μ-quasi ogni) x.

4. Teoremi di dualità

4.1. Teorema. - *Sia μ una misura σ-finita, e sia Λ un funzionale lineare continuo su $L^p(\mu)$, con $1 \le p < +\infty$. Allora esiste $f \in L^q(\mu)$ che rappresenta Λ, vale a dire (cfr. Esercizio 4.5)*

$$\Lambda g = \int_X fg\, d\mu \quad \textit{per ogni } g \in L^p(\mu). \tag{4.1}$$

Inoltre la rappresentazione è isometrica: $\|\Lambda\|_{(L^p(\mu))^*} = \|f\|_{L^q(\mu)}$.

4.2. Proposizione. - *Sia $\mathscr{M}(X)$ lo spazio delle misure a valori reali su X, dotato della norma $\|\cdot\|$ (la variazione totale). Allora $\mathscr{M}(X)$ è uno spazio di Banach.*

4.3. Proposizione. - *Sia X uno spazio metrico localmente compatto, e sia $C_0(X)$ lo spazio delle funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$ per cui, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste K compatto in X tale che $|f| < \varepsilon$ in $X \setminus K$. Lo spazio $C_0(X)$, dotato della norma del sup, è di Banach.*

4.4. Teorema (Riesz). - *Sia X uno spazio metrico localmente compatto, e sia Λ un funzionale lineare continuo su $C_0(X)$. Allora esiste $\lambda \in \mathscr{M}(X)$ che rappresenta Λ, vale a dire (cfr. Esercizio 4.10)*

$$\Lambda g = \int_X g d\lambda \textit{per ogni } g \in C_0(X). \tag{4.2}$$

Inoltre la rappresentazione è isometrica: $\|\Lambda\|_{(C_0(X))^*} = \|\lambda\|_{\mathscr{M}(X)}$.

Dimostrazioni

Dimostrazione del Teorema 4.1. - Ci limitiamo al caso in cui μ è finita. Poniamo

$$\lambda(B) := \Lambda 1_B \quad \text{per ogni } B \in \mathscr{B}(X).$$

Passo 1. λ è una misura a valori in $\mathbb{R}$: l'additività segue dalla linearità di Λ, mentre la σ-additività segue dalla continuità di Λ, infatti, data una successione di insiemi disgiunti $\{B_n\}$ con unione B, per ogni m abbiamo

$$\begin{aligned}\Big|\lambda(B) - \sum_{n\le m} \lambda(B_n)\Big| &= \Big|\Lambda\Big(\sum_{m>n} 1_{B_n}\Big)\Big| \\ &\le \|\Lambda\| \cdot \Big\|\sum_{m>n} 1_{B_n}\Big\|_p \le \|\Lambda\| \cdot \Big|\sum_{m>n} \mu(B_n)\Big|^{1/p} ,\end{aligned}$$

che chiaramente tende a 0 per $m \to +\infty$.

Passo 2. Per via della Proposizione 3.5, esiste f tale che $\lambda = f \cdot \mu$. Ne consegue che

$$\Lambda g = \int_X f\, g\, d\mu \tag{4.3}$$

per ogni funzione semplice g, cioè per ogni combinazione lineare finita di indicatrici di insiemi Boreliani.

Passo 3. Dalla (4.3) segue che $\|\Lambda\| \cdot \|g\|_p \ge \int f\, g\, d\mu$, e prendendo il sup tra tutte le funzioni semplici tali che $\|g\|_p \le 1$ si ottiene

$$\|\Lambda\| \ge \|f\|_q \tag{4.4}$$

(verificarlo!) e dunque f appartiene ad L^q.

Passo 4. A questo punto sappiamo che l'integrale a destra della (4.3) definisce un funzionale lineare e continuo su L^p, che coincide con Λ sulle funzioni semplici, che sono un denso. Quindi i due funzionali devono coincidere su tutto L^p. Per via della disuguaglianza di Hölder, abbiamo anche che $\|\Lambda\| \le \|f\|_q$, e la (4.4) implica l'uguaglianza. $\square$

Le dimostrazioni delle Proposizioni 4.2 e 4.3 vengono lasciate per esercizio.

Dimostrazione del Teorema 4.4. - Ci limitiamo al caso in cui X è compatto (e dunque $C_0(X) = C(X)$). Per cominciare, supponiamo anche che Λ sia un funzionale positivo, e cioè $\Lambda g \ge 0$ per ogni g non negativa. Di conseguenza Λ soddisfa la proprietà di monotonia

$$\Lambda g \ge \Lambda g' \quad \text{quando } g \ge g' \text{ su } X.$$

Passo 1. Per ogni insieme aperto A poniamo

$$T(A) := \sup\big\{\Lambda g :\ 1_A \ge g\big\} .$$

Si vede facilmente che $T(X) \le \|\Lambda\|$ e che T è una funzione monotona (cioè $T(A) \le T(A')$ se $A \subset A'$) e additiva sui distanti (cioè $T(A \cup A') = T(A) + T(A')$ se $\operatorname{dist}(A, A') > 0$). Poi, per ogni insieme $B \subset X$ (Boreliano o no) poniamo

$$\mu(B) := \inf\big\{T(A) :\ A \text{ aperto contenente } B\big\} .$$

Si vede facilmente che μ è una misura esterna, additiva sui distanti, che coincide con T sugli aperti (cfr. Esercizio 1.18). Dunque la restrizione di μ ai Boreliani è una misura (Teorema 1.4) e $\|\mu\| = \mu(X) = T(X) \le \|\Lambda\|$.

Passo 2. Potremmo ora dimostrare direttamente che μ è la misura che rappresenta Λ. Tuttavia, è più semplice dimostrare che Λ si estende per continuità ad un funzionale lineare e continuo su $L^1(\mu)$, e quindi usare il Teorema 4.1 per trovare $f \in L^1(\mu)$ che rappresenta Λ; la misura cercata sarà quindi $\lambda := f \cdot \mu$.

Tenendo conto del teorema di Hahn-Banach, non resta dunque che dimostrare che Λ è limitato nella norma $L^1(\mu)$, ovvero che esiste C finita tale che $\Lambda g \leq C$ per ogni $g \in C(X)$ tale che $\|g\|_1 \leq 1$. È facile vedere che basta limitarsi al caso $g \geq 0$. Per ogni intero $n \geq 0$ poniamo dunque $A_n := \{x : \ g(x) > n\}$ e

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } g(x) \leq n, \\ g(x) - n & \text{se } n < g(x) < n+1, \\ 1 & \text{se } n+1 \leq g(x). \end{cases}$$

Dunque $g_n \leq 1_{A_n}$ per ogni n e $g = \sum g_n \leq \sum 1_{A_n} \leq g+1$. Infine, ricordando la definizione di T ed il fatto che coincide con μ sugli aperti,

$$\begin{aligned} \Lambda g = \sum_n \Lambda g_n \leq \sum_n T(A_n) &= \sum_n \mu(A_n) \\ &= \int_X \sum_n 1_{A_n} d\mu \\ &\leq \int_X (g+1)\, d\mu \leq 1 + \mu(X) \ . \end{aligned}$$

Passo 3. Per concludere la dimostrazione, facciamo vedere che ogni funzionale si può scrivere come differenza di due funzionali positivi. Per la precisione, costruiamo un funzionale $|\Lambda|$ ponendo, per ogni $g \geq 0$,

$$|\Lambda| g := \sup\{\Lambda h : \ |h| \leq g\} \ .$$

Date g, g' funzioni positive e c numero reale positivo, abbiamo che a) $|\Lambda| g \leq \|\Lambda\| \cdot \|g\|_\infty$, b) $|\Lambda|(g+g') = |\Lambda| g + |\Lambda| g'$, c) $|\Lambda|(cg) = c|\Lambda| g$ (verificatelo!). Estendiamo $|\Lambda|$ a tutto $C(X)$ ponendo $|\Lambda| g = |\Lambda| g^+ - |\Lambda| g^-$, e così facendo otteniamo un funzionale lineare limitato. Per concludere, basta verificare che

$$\Lambda^+ := \frac{|\Lambda| + \Lambda}{2} \quad \text{e} \quad \Lambda^- := \frac{|\Lambda| - \Lambda}{2}$$

sono entrambi funzionali positivi, la cui differenza è Λ.

Omettiamo di dimostrare l'identità $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$ (vedi Esercizio 4.10). □

Esercizi

Negli esercizi che seguono, μ è una misura positiva su X, ed E uno spazio di Banach.

4.5*. - Data una funzione $f \in L^q(\mu, E^*)$, consideriamo il funzionale

$$\Lambda g := \int_X \langle f, g \rangle \, d\mu \quad \text{per ogni } g \in L^p(\mu, E).$$

Dimostrare che Λ è ben definito e $\|\Lambda\| = \|f\|_q$.

4.6. - Dimostrare il Teorema 4.1 nel caso μ sia una misura σ-finita.

4.7**. - Dimostrare il Teorema 4.1 nel caso μ sia una misura qualunque e $p > 1$. Suggerimento: farlo prima per i funzionali Λ positivi, mostrando che esiste un insieme σ-finito B tale che $\Lambda g = 0$ per ogni $g \in L^p(\mu)$ che sia nulla (quasi ovunque) in B.

4.8*. - Dimostrare il Teorema 4.1 per il duale di $L^p(\mu, E)$ con E spazio di dimensione finita, ovvero che ogni funzionale limitato su questo spazio può essere rappresentato tramite una funzione in $L^q(\mu, E^*)$ (nel senso dell'Esercizio 4.5).

Negli esercizi che seguono, X è uno spazio metrico localmente compatto, ed E uno spazio di Banach.

4.9. - Sia $C_0(X, E)$ lo spazio delle funzioni continue $f : X \to E$ tali che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste K compatto in X tale che $|f|_E < \varepsilon$ in $X \setminus K$. $C_0(X, E)$ dotato della norma del sup è uno spazio di Banach.

4.10*. - Sia μ una misura su X. Data una funzione $f \in L^1(\mu, E^*)$, consideriamo il funzionale

$$\Lambda g := \int_X \langle f, g \rangle \, d\mu \quad \text{per ogni } g \in C_0(X, E),$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto di dualità tra E^* ed E. Dimostrare che Λ è ben definito e $\|\Lambda\| = \|f\|_1$.

4.11. - Data λ misura su X a valori in E^*, consideriamo il funzionale

$$\Lambda g := \int_X f d\lambda := \int_X \Big\langle f, \frac{d\lambda}{d|\lambda|} \Big\rangle d|\lambda| \quad \text{per ogni } g \in C_0(X, E),$$

dove $d\lambda/d|\lambda|$ è la densità di λ rispetto a $|\lambda|$ (cfr. Corollario 3.6). Dimostrare che Λ è ben definito e $\|\Lambda\| = \|\lambda\|$.

4.12. - Dimostrare il Teorema 4.4 per il duale di $C_0(\mu, E)$ con E spazio di dimensione finita, ovvero che ogni funzionale limitato su questo spazio può essere rappresentato tramite una misura su X a valori in E^* nel senso dell'Esercizio 4.11.

4.13. - Sia c_0 lo spazio delle successioni di numeri reali infinitesime, e sia c lo spazio delle successioni di numeri reali che hanno limite, entrambi dotati della norma del sup: $\|x\| := \sup |x_n|$. Dare una rappresentazione esplicita dei rispettivi duali.

4.14. - Sia $\tilde{C}(X)$ lo spazio delle funzioni continue su X che ammettono limite finito all'infinito, vale a dire, delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ per cui esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste K compatto in X tale che $|f - L| \leq \varepsilon$ in $X \setminus K$. Dimostrare che $\tilde{C}(X)$, dotato della norma del sup, è uno spazio di Banach, e darne una rappresentazione esplicita del duale.

Esercizi, prima parte

[versione: 30 dicembre 2003]

5. Complementi di analisi funzionale

Notazione. - Sia X uno spazio metrico localmente compatto. Si dice che una successione di misure reali (o anche vettoriali) μ_n su X converge *nel senso delle misure* se convergono nella topologia debole* definita dalla dualità con $C_0(X)$, ovvero se

$$\int_X \varphi \, d\mu_n \to \int_X \varphi \, d\mu \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0(X).$$

$L^p(\mu)$ indica lo spazio delle funzioni p-sommabili rispetto alla misura μ. Tuttavia, se μ è la restrizione della misura di Lebesgue n-dimensionale ad un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, scriviamo invece $L^p(\Omega)$.

5.1. - Sia X uno spazio metrico localmente compatto, e sia (x_n) una successione di punti in K. Dimostrare che le misure di Dirac δ_{x_n} convergono a δ_x in senso debole* se e solo se x_n converge a x.

5.2. - Sia X uno spazio metrico. Allora $f : X \to (-\infty, +\infty]$ è semicontinua inferiormente se e solo se è il limite di una successione crescente di funzioni continue. [*Considerare ad esempio le regolarizzate di Yosida*

$$f_\lambda(x) := \inf_{x \in X} f(y) + \lambda \, d(x, y) \ .$$

Si vede facilmente che le funzioni f_λ sono Lipschitziane di costante λ, e per ogni $x \in X$ si ha che $f_\lambda(x)$ cresce ad $f(x)$ quando $\lambda \to +\infty$.]

5.3. - Sia X uno spazio metrico compatto, e sia (μ_n) una successione di misure *positive* finite che convergono debole* a μ. Dimostrare che:

(a) per ogni aperto A e per ogni chiuso C in X si ha

$$\mu(A) \leq \liminf_{n \to +\infty} \mu_n(A) \quad \text{e} \quad \mu(C) \geq \limsup_{n \to +\infty} \mu_n(C) \ ; \tag{5.1}$$

(b)* per ogni $E \subset X$ tale che $\mu(\partial E) = 0$ si ha

$$\mu_n(E) \to \mu(E) \ ;$$

(c)* per ogni funzione limitata $\varphi : X \to \mathbb{R}$ il cui insieme di discontinuità è μ-trascurabile si ha

$$\int_X \varphi \, d\mu_n \to \int_X \varphi \, d\mu \ . \tag{5.2}$$

(d) Cosa succede se X è localmente compatto?

5.4. - Sia X uno spazio metrico localmente compatto. Date due misure positive finite λ e μ su X, diciamo che $\lambda \leq \mu$ se $\lambda(E) \leq \mu(E)$ per ogni insieme di Borel $E \subset X$. Dimostrare che $\lambda \leq \mu$ se e solo se

$$\int_X \varphi \, d\lambda \leq \int_X \varphi \, d\mu \ . \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0(X),\ \phi \geq 0.$$

5.5. - Sia X uno spazio metrico localmente compatto, e sia (μ_n) una successione di misure *reali* che convergono debole* a μ, e le cui variazioni $|\mu_n|$ convergono debole* a λ. Dimostrare che:

(a) $|\mu| \leq \lambda$ (cfr. Esercizio 5.4);

(b)* la (5.2) vale per ogni funzione limitata $\varphi : X \to \mathbb{R}$ il cui insieme di discontinuità è λ-trascurabile.

5.6. - Sia μ una misura positiva qualunque e sia f una funzione positiva in $L^1(\mu)$. Dimostrare che:

(a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $\mu(E) \leq \delta$ implica

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \varepsilon \ ;$$

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m > 0$ tale che, posto $A_m := \{x : \ f(x) \geq m\}$,

$$\int_{A_m} |f|\, d\mu \leq \varepsilon \ .$$

5.7. - Sia X lo spazio delle funzioni limitate su $[-1,1]$ che ammettono limite destro e sinistro in 0 e sono continue altrove. Dimostrare che X, dotato della norma del sup, è uno spazio di Banach. Dare quindi una rappresentazione concreta del duale di X.

5.8. - Sia ρ una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$ con integrale 1, e per ogni $\varepsilon > 0$ si ponga

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

Dimostrare che per $\varepsilon \to 0$ le funzioni ρ_ε – o più correttamente le misure ad esse associate – tendono alla misura di Dirac δ_0 nel senso delle misure.

5.9. - Siano E, F spazi di Banach, e sia X un sottospazio denso di E. Allora ogni operatore limitato $T : X \to F$ ammette un'estensione con la stessa norma a tutto E. [*Attenzione: non si tratta del Teorema di Hahn-Banach, a meno che F non sia $\mathbb{R}$.*]

5.10. - Sia (T_n) una successione di operatori lineari limitati dallo spazio di Banach E allo spazio di Banach F. Dimostrare che i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) $T_n x \to Tx$ per ogni $x \in E$;

(ii) gli operatori T_n sono equilimitati, e $T_n x \to Tx$ per ogni x in un dato sottoinsieme denso di E.

Far vedere che l'ipotesi di equilimitatezza in (ii) non può essere tolta.

5.11. - Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni C^∞ a supporto compatto in Ω. Allora

(a) $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso negli spazi di Banach $C_0(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < +\infty$;

(b)* $\mathscr{D}(\Omega)$ è denso in $L^\infty(\Omega)$ nella topologia debole*, ma non in quella forte.

5.12. - Sia (f_n) una successione di funzioni equilimitate in $L^p(\Omega)$, con $1 < p \leq +\infty$. Allora le funzioni f_n convergono debolmente ad f in L^p (debolmente* se $p = +\infty$) se e solo se convergono nel senso delle distribuzioni, vale a dire

$$\int_\Omega f_n \varphi \, dx \to \int_\Omega f \, \varphi \, dx \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Mostrare che l'enunciato non vale per $p = 1$.

5.13. - Sia (f_n) una successione di funzioni equilimitate in $L^p(\Omega)$, con $1 < p \leq +\infty$, che converge quasi ovunque a 0.

(a) Dimostrare che f_n converge debolmente a 0 in L^p (debolmente* se $p = +\infty$);

(b) far vedere che questo non vale per $p = 1$;

(c) far vedere che la convergenza può non essere forte.

5.14. - Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ sia $\tau_h : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ l'operatore di traslazione definito da

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h) \quad \text{per ogni } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(a) dimostrare che $\tau_h f$ converge debole* ad f per ogni f in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$;
(b) dimostrare che $\tau_h f$ converge (forte) ad f per ogni f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p < \infty$. [*Usare gli esercizi 5.10 e 5.11 per ridursi al caso di f continua con supporto compatto.*]

5.15. - Dimostrare che date $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \, \|g\|_1 \ . \tag{5.4}$$

Dimostrare che per $1 < p < \infty$ vale l'uguaglianza in (5.4) se e solo se $f = 0$ q.o., oppure $g = 0$ q.o.

5.16*. - Sia ρ una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$ con integrale 1 e supporto compatto, e sia ρ_ε come in (5.3). Allora $f * \rho_\varepsilon$ converge (forte) ad f in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. [*Usare l'identità*

$$f * \rho(x) = \int \tau_h f(x) \, \rho(h) \, dh$$

per dimostrare che

$$\|f * \rho - f\|_p \leq \int \|\tau_h f - f\|_p \, \rho(h) \, dh$$

ed applicare quindi quanto dimostrato nell'esercizio 5.14.]

5.17*. - Siano p e q esponenti coniugati e siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \ .$$

Dimostrare quindi che $f * g$ è una funzione continua infinitesima all'infinito – cioè appartiene a $C_0(\mathbb{R}^n)$.

5.18**. - Siano A e B insiemi di misura positiva in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $A + B := \{x + y : x \in A, \ y \in B\}$ ha parte interna non vuota.

5.19*. - Sia Q il cubo $(-1, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$, e sia f una funzione in $L^p(Q)$, estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}^n$, e per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$f_\varepsilon(x) := f(x/\varepsilon) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.5}$$

Dimostrare che quanto $\varepsilon \to 0$, le funzioni f_ε convergono debolmente in $L^p(Q)$ (debolmente* per $p = \infty$) alla funzione costante M_f uguale al valor medio di f su Q. [*Far vedere prima di tutto che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon \, \varphi \, dx = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \varphi(\varepsilon x) \, dx \to M_f \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, dx$$

quando φ è l'indicatrice di un quadrato contenuto in Q. Mostrare quindi che le combinazioni lineari (finite) di indicatrici di quadrati sono dense in $L^q(Q)$, ed applicare infine quanto dimostrato nell'esercizio 5.10.]

5.20. - Nell'esercizio precedente, far vedere che f_ε non converge fortemente a meno che non sia (quasi ovunque) costante.

Notazione. - Per ogni numero reale x, indichiamo con $\lfloor x \rfloor$ la parte intera di x, ovvero il massimo intero $m \leq x$, e con $\phi(x) := x - \lfloor x \rfloor$ la parte frazionaria di x.

5.21**. - Sia (a_n) una qualunque successione che tende a $+\infty$, e sia A l'insieme degli $x \in [0,1]$ tali che la successione $(\phi(a_n x))$ è densa in $[0,1]$. Dimostrare che A è intersezione di aperti densi in $[0,1]$, e pertanto non è mai vuoto.

5.22*. - Sia f una funzione continua e non costante su $[0,1]$, e definiamo le funzioni f_ε come nell'esercizio 5.19. Allora (f_ε) non ammette nessuna sottosuccessione che converge nella topologia debole di $C([0,1])$. [*Usare il risultato dell'esercizio precedente.*]

Estendere queste conclusioni alla topologia debole* di $L^\infty(0,1)$.

5.23**. - Sia x un numero irrazionale in $[0,1]$, e per ogni intero n sia μ_n la media delle misure di Dirac concentrate nei punti $\phi(x), \dots, \phi(nx)$, ovvero

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \delta_{\phi(mx)} \ .$$

Allora μ_n converge alla misure di Lebesgue nel senso delle misure su $[0,1]$.

5.24. - Sia E uno spazio di Banach, e sia F un sottospazio chiuso di E. Indichiamo con $F^\perp$ il sottospazio dei funzionali in E^* che sono identicamente nulli su F, e con E/F il solito spazio quoziente. Associamo ad ogni $[x]$ in E/F la norma quoziente

$$\|[x]\|_{E/F} := \inf\{\|x'\|_E : \ x' \in [x]\} \ .$$

Dimostrare che:

(a) E/F è uno spazio di Banach,

(b) $(E/F)^*$ è isometricamente equivalente a $F^\perp$,

(c) F^* è isometricamente equivalente a $E^*/F^\perp$.

5.25. - Sia F un sottospazio chiuso delle spazio di Banach E. Dimostrare che la topologia debole di F coincide con la restrizione della topologia debole di E.

5.26. - Sia E uno spazio di Banach con duale separabile, e sia $\{y_i\}$ una famiglia numerabile densa di elementi di E^*. Allora la norma ϕ su E definita da

$$\phi(x) := \sum_i \frac{\langle y_i, x\rangle}{2^i \|y_i\|}$$

metrizza la topologia debole su ogni sottoinsieme limitato di E.

Notazione. - Sia E uno spazio di Banach. L'immersione canonica di E in E^{**} è quella che associa ad ogni $x \in E$ il funzionale I_x su E^* definito da

$$\langle I_x, y\rangle := \langle y, x\rangle \quad \text{per ogni } y \in E^*.$$

E si dice *riflessivo* se l'immersione canonica di E nel suo bi-duale è surgettiva.

5.27. - Dimostrare che l'immersione canonica di E nel suo bi-duale è un'isometria.

5.28*. - Dimostrare che un sottospazio chiuso di uno spazio di Banach riflessivo è riflessivo.

5.29. - Sia E uno spazio di Banach riflessivo con duale separabile. Allora ogni successione equilimitata (x_n) in E ammette una sottosuccessione che converge debolmente.

[*Usare il Teorema di Banach-Alaoglu, oppure completare la seguente traccia di dimostrazione: data una famiglia numerabile $\mathscr{D}$ densa in E^*, usando un procedimento diagonale possiamo estrarre da (x_n) una sottosuccessione (x_m) tale che $\langle y, x_m\rangle$ converge ad un numero finito per ogni $y \in \mathscr{D}$. Verificare quindi che $\langle y, x_m\rangle$ converge per ogni y nello spazio vettoriale $\langle\mathscr{D}\rangle$ generato da $\mathscr{D}$, definendo un funzionale lineare Λ su $\langle\mathscr{D}\rangle$. Verificare che questo funzionale è limitato, può essere esteso per densità a tutto E^* (cfr. esercizio 5.9), ed è quindi rappresentato da un qualche $x \in E$. Far vedere infine che x_m converge debolmente a x (cfr. esercizio 5.10).*]

5.30. - Sia E uno spazio di Banach riflessivo con duale separabile, e sia $f : E \to [0, +\infty]$ una funzione coerciva (cioè tale che $f(x) \to +\infty$ quanto $|x| \to +\infty$) e sequenzialmente semicontinua inferiormente debole. Allora f ammette un punto di minimo in E.

5.31. - Sia E uno spazio di Banach, e sia $f : E \to [0, +\infty]$ una funzione semicontinua inferiore (forte) e convessa. Allora f è semicontinua inferiore debole. [*Usare il fatto noto che un convesso in E è debolmente chiuso se e solo se è fortemente chiuso.*]

5.32. - Sia μ una misura positiva finita su uno spazio metrico X localmente compatto. Allora

(a) $L^p(\mu, \mathbb{R}^m)$ è uno spazio riflessivo per $1 < p < \infty$;

(b)* $L^1(\mu, \mathbb{R}^m)$ e $L^\infty(\mu, \mathbb{R}^m)$ non sono spazio riflessivi a meno che μ non sia una combinazione lineare finita di misure di Dirac.

5.33. - Sia μ una misura positiva finita su uno spazio localmente compatto X. Data $f : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty]$, poniamo

$$F(u) := \int_X f(u)\, d\mu \quad \text{per ogni } u : X \to \mathbb{R}^m \text{ Boreliana.} \tag{5.6}$$

Dimostrare che

(a) se $1 \le p < +\infty$ ed f ha crescita p dal basso, e cioè soddisfa la stima

$$f(y) \ge a|y|^p - b \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^m,$$

per qualche a e b positivi, allora F è coerciva su $L^p(\mu, \mathbb{R}^m)$;

(b) se f è semicontinua inferiormente allora F è semicontinua inferiore rispetto alla convergenza quasi ovunque delle u ed quindi anche alla convergenza in misura [*usare il lemma di Fatou*];

(c) se f è convessa allora F è convessa;

(d) se f ha crescita p dal basso con $1 \le p < \infty$, ed è convessa e semicontinua inferiore, allora F è coerciva e semicontinua inferiore debole su $L^p(\mu, \mathbb{R}^m)$, e pertanto ammette minimo per $1 < p < \infty$.

5.34. - Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, e sia $\lambda \in (0, 1)$. Esibire una successione di funzioni indicatrici su Ω che convergono alla funzione costante λ nella topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$. [*Cfr. esercizio 5.19.*]

5.35*. - Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, e sia X la famiglia delle funzioni indicatrici su Ω – cioè le funzioni a valori in $\{0, 1\}$. Dimostrare che la chiusura debole* di X in $L^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni di Borel su Ω a valori in $[0,1]$. [*Usare l'esercizio 5.34 per dimostrare che la chiusura di X deve contenere tutte le funzioni semplici a valori in* $[0,1]$.]

5.36**. - Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia F un funzionale della forma (5.6). Dimostrare che se F è semicontinuo inferiore debole su $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ allora f deve essere semicontinua inferiore e convessa.

6. Distribuzioni e spazi di Sobolev in dimensione uno

6.1. - Sia $I=(a,b)$, e sia $C^1_0(I)$ lo spazio delle funzioni C^1 su I infinitesime al bordo e con derivata infinitesima al bordo, dotato della solita norma C^1. Dimostrare che:

(a) le funzioni C^1 con supporto compatto in I sono dense in $C^1_0(I)$;

(b) per ogni Λ nel duale di $C^1_0(I)$ esiste μ misura reale su I tale che

$$\langle \Lambda, u\rangle = \int_I \dot u\, d\mu \quad \text{per ogni } u.$$

[*Sia $T: C^1_0(I)\to E$ l'applicazione data da $u\mapsto \dot u$, dove E è il sottospazio delle funzioni in $C_0(I)$ con media nulla. Far vedere che ΛT^{-1} è un funzionale limitato su E, ed usare Hahn-Banach per estenderlo a tutto $C_0(I)$.*]

c) Cosa succede se sostituiamo I con $\mathbb{R}$?

6.2. - Generalizzare i risultati dell'esercizio precedente al caso in cui $E=C^1_0(\Omega)$ con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Far vedere che la rappresentazione di Λ data al punto (c) non è unica.

6.3. - Sia $E=C^\infty_0(R)$ lo spazio delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}$ con tutte le derivata infinitesima all'infinito. Su E si considera la topologia della convergenza uniforme di tutte le derivate, vale a dire la topologia generata dalle seminorme $\phi_k(u):=\|D^k u\|_\infty$, con $k=0,1,2,\dots\}$ Dimostrare che

(a) la topologia di E è metrizzata dalla distanza (omogenea)

$$d(u,v):=\sum_{k=0}^\infty \frac{\phi_k(u-v)\wedge 1}{2^k}\ .$$

(b) la distanza d è completa;

(c)* dato $\Lambda\in E^*$, esistono m intero e C reale tali che

$$|\langle \Lambda,u\rangle| \le C\big(\phi_0(u)+\dots+\phi_m(u)\big) \quad \text{per ogni } u\in E,$$

(d)* dato $\Lambda\in E^*$, esiste m intero e μ misura reale su $\mathbb{R}$ tale che

$$\langle \Lambda,u\rangle = \int_{\mathbb{R}} D^k u\, d\mu \quad \text{per ogni } u\in E.$$

Notazione. - Diciamo che una successione di distribuzioni Λ_n su Ω converge a Λ nel senso delle distribuzioni se

$$\langle \Lambda_n,\varphi\rangle \to \langle \Lambda,\varphi\rangle \quad \text{per ogni } \varphi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

6.4. - Sia Λ una distribuzione su Ω, e supponiamo che esistano C finito e $1\le p\le\infty$ tali che

$$\langle \Lambda,\varphi\rangle \le C\|\varphi\|_p \quad \text{per ogni } \varphi\in\mathscr{D}(\Omega).$$

Allora Λ è (la distribuzione associata ad) una funzione in $\mathscr{L}^q(\Omega)$ per $p < \infty$, ed a una misura reale in $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ per $p = \infty$. [*Usare l'esercizio 5.9 ed i teoremi di Riesz.*]

6.5*. - Sia Λ una distribuzione positiva su Ω, ovvero

$$\langle \Lambda, \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ tale che } \phi \geq 0.$$

Allora Λ è (la distribuzione associata ad) una misura positiva e localmente finita su $\mathbb{R}$. [*Dimostrarlo prima per Λ a supporto compatto, usando l'esercizio 6.6.*]

6.6. - Dato $h \in \mathbb{R}$, sia τ_h l'operatore di traslazione corrispondente (cfr. esercizio 13). Definire τ_h su $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ in modo tale che coincida con la solita definizione sulle funzioni, e dimostrare quindi che per ogni distribuzione Λ su $\mathbb{R}$ si ha

$$\frac{\Lambda - \tau_h \Lambda}{h} \to D\Lambda \quad \text{nel senso delle distribuzioni.}$$

6.7*. - Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto, con derivata $\dot{u}$ limitata. Dimostrare che la derivata distribuzionale Du coincide con la (distribuzione associata alla) derivata puntuale $\dot{u}$. [*Usare l'esercizio 6.6.*]

6.8. - Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana. Dimostrare che la derivata distribuzionale Du è rappresentata da una funzione in $L^\infty(\mathbb{R})$. [*Usare gli esercizi 6.4 e 6.6.*]

6.9. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che:

(a) f è Boreliana;

(b) f definisce una distribuzione su $\mathbb{R}$;

(c) Df è una distribuzione positiva;

(d) Df è una misura positiva localmente finita.

6.10*. - Dimostrare il viceversa dell'esercizio precedente: data una distribuzione Λ su $\mathbb{R}$ tale che $D\Lambda$ è una distribuzione positiva, allora Λ coincide con una funzione crescente. [*Cominciare dal caso Λ funzione localmente sommabile, considerando le regolarizzate per convoluzione $\Lambda * \rho_\varepsilon$.*]

6.11. - Dimostrare che una distribuzione $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ con gradiente distribuzionale nullo deve essere costante. [*Considerare le regolarizzate per convoluzione $\Lambda * \rho_\varepsilon$.*]

6.12*. - Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esiste una successione di aperti connessi Ω_n, ciascuno relativamente compatto nel successivo e la cui unione è Ω.

6.13*. - Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che una distribuzione $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ con gradiente distribuzionale nullo deve essere costante. [*Usare le regolarizzate per convoluzione $\Lambda * \rho_\varepsilon$ per far vedere che Λ coincide con una costante su ogni aperto connesso relativamente compatto in Ω, e quindi usare quanto dimostrato nell'esercizio 6.12.*]

6.14*. - Sia Λ_ε la distribuzione su $\mathbb{R}$ definita da

$$\langle \Lambda_\varepsilon, \varphi \rangle := \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \frac{1}{x} \, \varphi(x) \, dx \ .$$

Determinare esplicitamente il limite di Λ_ε per $\varepsilon \to 0$, e calcolarne una primitiva. [*Attenzione: la funzione $1/x$ non è integrabile in nessun intorno dell'origine!*]

6.15. - Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x_1, x_2) = a$ per $x_1 < 0$ ed $f(x_1, x_2) = b$ per $x_1 \geq 0$. Calcolare la derivata di f (in senso distribuzionale).

6.16. - Calcolare la derivata seconda di $f(x) = |x|$ su $\mathbb{R}^n$ (in senso distribuzionale).

6.17. - Sia K uno spazio metrico compatto. Dato $\alpha \in (0,1]$, $C^{0,\alpha}(K)$ indica lo spazio delle funzioni α-Hölderiane su K, dotato della norma

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \sup_x |f(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

(a) $C^{0,\alpha}(K)$ è uno spazio di Banach;

(b) data $f \in C^{0,\alpha}(K)$ e $\beta < \alpha$, vale la disuguaglianza di interpolazione

$$\|f\|_{C^{0,\beta}} \leq 2^{1-\beta/\alpha} \cdot \|f\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} \cdot \|f\|_{C^{0,\alpha}}^{\beta/\alpha} \ ;$$

(c)* l'immersione di $C^{0,\alpha}(K)$ in $C(K)$ e $C^{0,\beta}(K)$ è compatta per ogni $\beta < \alpha$.

6.18. - Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$, e sia f una funzione in $L^p(I)$, con $1 < p \leq \infty$, tale che

$$\sup \left\{ \int_I f \, \dot{\varphi} \, dx : \ \varphi \in \mathscr{D}(I), \ \|\varphi\|_q \leq 1 \right\} < +\infty \ .$$

Allora f appartiene a $W^{1,p}(I)$. [*Cfr. esercizio 6.4.*]

6.19. - Dato Λ funzionale limitato su $W^{1,p}(I)$, con $1 \leq p < +\infty$, esistono $f_1, f_2 \in L^q(I)$ tali che

$$\langle \Lambda, u \rangle = \int_I f_1 u + f_2 \, Du \, dx \quad \text{per ogni } u \in W^{1,p}(I).$$

[*L'immersione di $W^{1,p}(I)$ in $L^p(I,\mathbb{R}^2)$ data $u \mapsto (u, Du)$ è un isomorfismo di $W^{1,p}(I)$ con un sottospazio di $L^p(I,\mathbb{R}^2)$, e dunque permette di identificare Λ con un funzionale limitato su questo sottospazio. Ora basta usare Hahn-Banach per estendere Λ ad un funzionale su tutto $L^p(I,\mathbb{R}^2)$ ed applicare quindi il teorema di Riesz.*]

Osservazione. - L'esercizio precedente mostra che la convergenza debole di una successione di funzioni (u_n) in $W^{1,p}$ equivale alla la convergenza debole in L^p delle funzioni (u_n) e delle derivate (Du_n). Nel seguito prenderemo quest'ultima come definizione di convergenza debole in $W^{1,p}$.

6.20. - Data (u_n) una successione limitata in $W^{1,p}(I)$, con $1 < p \leq \infty$, esiste una sottosuccessione che converge debolmente ad $u \in W^{1,p}(I)$ (debolmente* quando $p = +\infty$).

6.21. - Sia T un'operatore compatto da E in F. Se x_n converge debolmente ad X in E, allora Tx_n converge fortemente a Tx in F.

6.22. - Sia $1 < p < \infty$ e sia F il funzionale (non lineare) su $W^{1,p}(I)$ dato da

$$F(u) := \int_I f(Du) + g(u) \, dx \ ,$$

dove $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ sono funzioni convesse, semicontinue inferiori e con crescita p dal basso. Dimostrare che:

(a) F è coercivo e semicontinuo inferiore debole su $W^{1,p}(I)$ [*applicare quanto dimostrato nell'esercizio 5.33 a $\int f(Du)$ e ad $\int g(u)$ separatamente*];

(b) F ammette minimo su $W^{1,p}(I)$ [*cfr. esercizio 6.20*].

6.23*. - Dimostrare che le conclusioni dell'esercizio precedente valgono anche se f e g prendono valori in $(-\infty, +\infty]$ invece di $[0, +\infty]$, e g è solo semicontinua inferiormente e soddisfa

$g(y) \to +\infty$ per $|y| \to +\infty$ invece della crescita p dal basso. [*Usare l'immersione compatta di* $W^{1,p}(I)$ *in* $C(\overline{I})$ *e l'osservazione fatta nell'esercizio 6.21.*]

6.24. - Sia $W^{1,p}_0(I)$ il sottospazio delle funzioni in $W^{1,p}(I)$ la cui rappresentante continua è nulla agli estremi di I. Dimostrare che:

(a) $\|u\|_\infty \leq |I|^{1-1/p}\|Du\|_p$ per ogni $u \in W^{1,p}_0(I)$;

(b) $\|Du\|_p$ è una norma su $W^{1,p}_0(I)$ che equivale a quella usuale.

6.25*. - Sia $1 < p < \infty$ e sia F il funzionale (non lineare) su $W^{1,p}_0(I)$ dato da

$$F(u) := \int_I \frac{1}{p}|Du|^p + gu\,dx \ ,$$

dove $g \in L^1(I)$. Dimostrare che F è coercivo e semicontinuo inferiore debole su $W^{1,p}_0(I)$ e ammette minimo. [*La semicontinuità segue come al solito; per dimostrare la coercività si può usare la stima* $|\int_I gu| \leq \|g\|_1\|u\|_\infty \leq C\|Du\|_p$.]

6.26. - Sia u un minimo su $W^{1,p}_0(I)$ del funzionale F nell'esercizio precedente. Dimostrare che u soddisfa l'equazione

$$D(|Du|^{p-2}Du) = g$$

nel senso delle distribuzioni su I. [*Si noti che* $(|Du|^{p-2}Du)$ *appartiene a* $L^1(I)$, *e quindi è una distribuzione ben definita.*]

Esercizi, seconda parte

[versione: 30 dicembre 2003]

7. Distribuzioni e spazi di Sobolev in dimensione n

NOTAZIONE. - Negli esercizi che seguono, Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con bordo di classe C^1. Una funzione appartiene a $C^k(\overline{\Omega})$ se coincide con la restrizione ad Ω di una funzione in $C^k(\mathbb{R}^n)$.

7.1. - Siano $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funzioni di classe C^1. Dimostrare che $\mathrm{div}(uf) = \nabla u \cdot f + u \,\mathrm{div}\, f$, e dunque

$$\int_\Omega \nabla u \cdot f + u \,\mathrm{div}\, f = \int_{\partial\Omega} u\, f \cdot \eta$$

dove η è la normale esterna di $\partial\Omega$ (ed il secondo integrale è calcolato rispetto alla misure di superficie di $\partial\Omega$, ovvero la misura di Hausdorff $n-1$ dimensionale).

7.2. - Sia u una funzione in $C^2(\overline{\Omega})$ (ovvero la restrizione di una funzione in $C^2(\mathbb{R}^n)$) che minimizza il funzionale di Dirichlet

$$F(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \tag{7.1}$$

tra tutte le funzioni in $C^2(\overline{\Omega})$ che coincidono con una funzione ψ assegnata su $\partial\Omega$. Dimostrare che u soddisfa l'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \psi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.2}$$

7.3. - Sia u una funzione in $C^2(\overline{\Omega})$ che risolve l'equazione (7.2). Dimostrare che allora u minimizza il funzionale di Dirichlet F definito in (7.1) tra tutte le funzioni in $C^2(\overline{\Omega})$ con dato al bordo assegnato ψ su $\partial\Omega$.

7.4. - Sia f una funzione continua, e sia u una funzione in $C^2(\overline{\Omega})$ che minimizza

$$F(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu\ , \tag{7.3}$$

tra tutte le funzioni in $C^2(\overline{\Omega})$. Dimostrare che u soddisfa l'equazione di Laplace/Poisson con condizioni di Neumann al bordo:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \partial_\eta u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.4}$$

dove η è la normale esterna a $\partial\Omega$.

7.5. - Dimostrare il viceversa dell'esercizio 7.4, ovvero che data una funzione u in $C^2(\overline{\Omega})$ che risolve (7.4), allora u minimizza il funzionale di Dirichlet F definito in (7.1) tra tutte le funzioni in $C^2(\overline{\Omega})$.

7.6. - Sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^2, e sia u una funzione in $C^2(\overline{\Omega})$ che minimizza

$$F(u) := \int_\Omega f(x, u, \nabla u) \ , \tag{7.5}$$

con la condizione di Dirichlet al bordo $u = \psi$ su $\partial\Omega$. Dimostrare che u soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange associata ad F con condizione di Dirichlet al bordo:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\big(\partial_p f(x, u, \nabla u)\big) = \partial_u f(x, u, \nabla u) & \text{in } \Omega, \\ u = \psi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.6}$$

dove $\partial_p f$ indica la derivata parziale di f rispetto alle ultime n variabili (quelle che corrispondono a ∇u) ed è quindi una mappa a valori in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrare quindi che vale il viceversa, ovvero una soluzione di (7.6) è un minimo di F con condizioni di Dirichlet al bordo, quando F è un funzionale convesso (cosa che si verifica, ad esempio, quando la funzione f è convessa nelle variabili u e ∇u).

7.7. - Estendere quanto dimostrato nell'esercizio 7.6 al caso delle condizioni di Neumann al bordo (minimi non vincolati).

7.8. - Sia Λ una distribuzione su Ω. Si definisce allora la derivata parziale di Λ nella direzione $e \in \mathbb{R}^n$ come

$$\langle \partial_e \Lambda, \phi \rangle := -\langle \Lambda, \partial_e \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrare che questa definizione è compatibile con quella usuale quando Λ è (la distribuzione associata ad) una funzione di classe C^1. Dimostrare che se $e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, allora vale la solita formula

$$\partial_e \Lambda = \alpha_1 \partial_{e_1} \Lambda + \alpha_2 \partial_{e_2} \Lambda \ .$$

7.9. - Sia Λ una distribuzione su $\mathbb{R}^n$, e sia $\tau_h \Lambda$ la traslazione per un vettore $h \in \mathbb{R}^n$, ovvero la distribuzione definita da

$$\langle \tau_h \Lambda, \phi \rangle := \langle \Lambda, \tau_{-h} \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrare allora che per ogni direzione $e \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\tau_{te}\Lambda - \Lambda}{t} \to \partial_e \Lambda$$

nel senso delle distribuzioni quando $t \to 0$.

7.10. - Si consideri il semispazio $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \dots, x_n) : \ x_1 > 0\}$, e sia u una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ con $p \in [1, +\infty]$. Dimostrare che la funzione estesa per riflessione

$$\tilde u(x) := \begin{cases} u(x_1, \dots, x_n) & \text{per } x_1 > 0, \\ u(-x_1, \dots, x_n) & \text{per } x_1 < 0, \end{cases}$$

appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (si noti che u non è definita per $x_1 = 0$, ma questo è un insieme di misura nulla). Più precisamente, si faccia vedere che le derivate parziali (in senso distribuzionale) di $\tilde u$ sono date da

$$\partial_1 \tilde u(x) := \begin{cases} \partial_1 u(x_1, \dots, x_n) & \text{per } x_1 > 0, \\ -\partial_1 u(-x_1, \dots, x_n) & \text{per } x_1 < 0, \end{cases}$$

e per $i = 2, \dots, n$

$$\partial_i \tilde u(x) := \begin{cases} \partial_i u(x_1, \dots, x_n) & \text{per } x_1 > 0, \\ \partial_i u(-x_1, \dots, x_n) & \text{per } x_1 < 0. \end{cases}$$

Osservazione. - L'esercizio 7.8 contiene il primo passo di una dimostrazione del teorema di estensione per funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$ quando Ω è un dominio regolare (e.g., con bordo di classe C^1 a tratti).

7.11. - Sia $1 < p \leq +\infty$. Dimostrare che una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se e solo esiste una costante C finita tale che

$$\|u - \tau_h u\|_p \leq C|h| \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{R}^n, \tag{7.7}$$

dove $\tau_h u$ indica la traslazione $u(x-h)$. [*Usare quanto dimostrato nell'esercizio 7.9 ed il fatto che L^p è un duale per $p>1$, ed è dunque possibile applicare il Teorema di Banach-Alaoglu.*]

Dimostrare quindi che la più piccola costante C per cui vale la (7.7) coincide esattamente con la norma L^p del gradiente Du.

7.12. - Sia u una funzione in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto di diametro R. Dimostrare che per ogni $p > n$ esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che

$$|u(x)| \leq C(n,p)\, R^{1-n/p} \|Du\|_p \quad \text{per ogni } x. \tag{7.8}$$

[*Basta dimostrare la stima per $x = 0$, e possiamo assumere $u(0) \neq 0$. Si osservi ora che $u(Re) = 0$ per ogni vettore unitario e, e dunque*

$$|u(0)| = |u(Re) - u(0)| \leq \int_0^R |Du(te)|\, dt\ .$$

prendendo ora la media su tutti gli e nella sfera unitaria S^{n-1} otteniamo

$$\begin{aligned} |u(0)| &\leq \frac{1}{c_n} \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^R |Du(te)|\, dt \right) de \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{B_R} |Du(x)|\, |x|^{-(n-1)} dx \\ &\leq \frac{1}{c_n} \| |x|^{-(n-1)} \|_{L^q(B_R)} \cdot \|Du\|_{L^p(B_R)} \\ &= c_{n,p} R^{1-n/p} \|Du\|_p\ , \end{aligned}$$

dove c_n è la misura $n-1$ dimensionale di S^{n-1} ed B_R è la palla di centro 0 e raggio R; nel primo passaggio abbiamo usato il cambio di variabile $te = x$, $de\, dt = |x|^{-(n-1)} dx$ e nel secondo la disuguaglianza di Hölder. Si osservi infine che la funzione $|x|^{-(n-1)}$ ha norma L^q finita solo per $q < n/(n-1)$, ovvero per $p > n$.]

7.13*. - Sia u una funzione in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dimostrare che per ogni $p > n$ esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C\, |x-y|^{1-n/p} \|Du\|_p \quad \text{per ogni } x, y. \tag{7.9}$$

Osservazione. - La disuguaglianza (7.8), insieme al teorema di estensione e al teorema di approssimazione con funzioni regolari, permette di dimostrare l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C(\overline{\Omega})$ per $p > n$ ed Ω regolare. Per dimostrare l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ nello spazio delle funzioni Hölderiane $C^{0,1-n/p}(\overline{\Omega})$ si usa invece la (7.9).

7.14. - Sia u una funzione in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con supporto compatto. Dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |Du| \right)^2 . \tag{7.10}$$

[*Utilizzare il fatto che* u *ha supporto compatto per dedurre che*

$$\begin{aligned}|u(x_1, x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(t, x_2)|\, dt\\ |u(x_1, x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x_1, t)|\, dt\ .\end{aligned}$$

Ora basta moltiplicare le due disuguaglianze ed integrare in x_1 *ed* x_2.]

7.15. - Sia u una funzione in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con supporto compatto. Dimostrare che per ogni $p < 2$ esiste una costante $C = C(p)$ tale che

$$\|u\|_{p^*} \leq C(p)\|Du\|_p\ , \tag{7.11}$$

dove $p^* = \frac{2p}{2-p}$. [*Applicare la disuguaglianza (7.10) ad* $|u|^t$ *con* t *scelto opportunamente.*]

Osservazione. - La disuguaglianza (7.11), insieme al teorema di estensione e al teorema di approssimazione con funzioni regolari, permette di dimostrare l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ per $p < 2$ e $q \leq p^*$ quando Ω è un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$. L'estensione a dimensione superiore richiede un argomento leggermente più raffinato.

7.16. - Sia f una funzione in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dimostrare che

$$\langle \operatorname{div} f, \phi\rangle = -\int_\Omega f \cdot \nabla\phi \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

7.17. - Dimostrare che la formula di integrazione per parti nell'esercizio 7.1 vale anche per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ed $f \in C^1(\overline{\Omega})$, a patto che nell'integrale su $\partial\Omega$ a destra dell'uguaglianza si intenda u nel senso delle tracce.

7.18*. - Dimostrare che lo spazio $W^{1,p}_0(\Omega)$ delle funzioni in $W^{1,p}$ con traccia nulla coincide con la chiusura forte in $W^{1,p}$ delle funzioni C^∞ con supporto compatto in Ω.

Osservazione. - La caratterizzazione di $W^{1,p}_0$ data nell'esercizio precedente viene a volte presa come definizione di $W^{1,p}_0$.

7.19. - Dimostrare gli enunciati degli esercizi 7.2 e 7.3 per funzioni in $W^{1,2}$. In altre parole, dimostrare che una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ con traccia ϕ sul bordo minimizza il funzionale di Dirichlet

$$F(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2$$

se e solo se risolve l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ con condizioni di Dirichlet al bordo (7.2). [*In questo caso, l'equazione* $\Delta u = 0$ *va intesa nel senso delle distribuzioni, ovvero*

$$\langle \Delta u, \phi\rangle = -\int_\Omega Du \cdot D\phi = 0$$

per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.]

7.20. - Dimostrare il funzionale F nell'esercizio precedente ammette minimo nella classe delle funzioni in $W^{1,2}(\Omega)$ con traccia ϕ sul bordo (a patto che questa classe non sia vuota).

7.21. - Sia f una funzione in $L^2(\Omega)$. Dimostrare gli enunciati degli esercizi 7.4 e 7.5 per funzioni in $W^{1,2}$, vale a dire che una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ minimizza

$$F(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 + fu$$

su $W^{1,2}$ se e solo se risolve l'equazione di Laplace-Poisson $\Delta u = f$ con condizioni Neumann al bordo (7.4). [*In questo caso, la condizione $\partial_\eta u = 0$ su $\partial\Omega$ va intesa nel senso delle distribuzioni, ovvero*

$$\int_\Omega \phi\, \Delta u + D\phi \cdot Du = 0$$

per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ – cfr. esercizio 7.1.]

7.22. - Dimostrare il funzionale F nell'esercizio precedente ammette minimo in $W^{1,2}(\Omega)$ se e solo se f ha media nulla. [*Se f non ha media nulla, allora l'estremo inferiore di F è $-\infty$. Se invece f ha media nulla, allora basta minimizzare F sul sottospazio delle funzioni in $W^{1,2}(\Omega)$ con media nulla, dove F risulta coercivo per via della disuguaglianza di Poincaré.*]

8. Serie di Fourier

Notazione. - Gli esercizi che seguono concernono la serie di Fourier complessa su $(-\pi,\pi)$, o più precisamente su $\mathbb{R}/2\pi$. Quando parliamo di funzioni continue su $\mathbb{R}/2\pi$, intendiamo funzioni continue su $\mathbb{R}$ e di periodo 2π, o, equivalentemente, funzioni continue su $[-\pi,\pi]$ con uguali valori in $\pm\pi$; la definizione di funzioni C^k è analoga. Dunque c'è differenza tra $C^k(\mathbb{R}/2\pi)$ e $C^k(-\pi,\pi)$, mentre invece $L^p(\mathbb{R}/2\pi)$ e $L^p(-\pi,\pi)$ sono ovviamente la stessa cosa.

Sullo spazio complesso $L^2(\mathbb{R}/2\pi,\mathbb{C})$ consideriamo il prodotto Hermitiano

$$\langle f \,|\, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx\ .$$

Più in generale, indichiamo con $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ l'estensione di questo prodotto di dualità a tutte le distribuzioni su $\mathbb{R}/2\pi$. (In altre parole, abbiamo rinormalizzato la misura di Lebesgue su $(-\pi,\pi)$ di un fattore $1/(2\pi)$). Data $f\in L^2(-\pi,\pi)$ indichiamo con a_n i suoi coefficienti di Fourier, ovvero

$$a_n := \langle f \,|\, e^{inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx \quad \text{per ogni } n\in\mathbb{Z}.$$

e quindi

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}\ ,$$

dove la convergenza della serie è intesa in L^2. Più precisamente, l'applicazione che ad ogni f associa la successione (a_n) è un isometria di $L^2(\mathbb{R}/2\pi,\mathbb{C})$ in $L^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$; in particolare, date f e g con coefficienti di Fourier (a_n) e (b_n), abbiamo

$$\langle f \,|\, g\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n\,\overline{b_n}\ .$$

8.1. - Sia u una funzione in $W^{1,p}(-\pi,\pi)$. Determinare la derivata distribuzionale di u su $\mathbb{R}/2\pi$, e dimostrare quindi che u appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}/2\pi)$ se e solo se $u(-\pi)=u(\pi)$ (ci stiamo riferendo alla rappresentante continua di u su $[-\pi,\pi]$).

8.2. - Dimostrare che data una successione di numeri complessi $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, le seguenti condizioni risultano equivalenti:

- $\circ$ $a_n = o(|n|^{-k})$ per ogni $k\in\mathbb{N}$,
- $\circ$ $a_n = O(|n|^{-k})$ per ogni $k\in\mathbb{N}$,

- $\sum |n|^k |a_n|^2 < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$,
- $\sum |n|^k |a_n| < +\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

8.3. - Sia f una funzione in $C^1(\mathbb{R}/2\pi)$. Dimostrare che la serie di Fourier di f' è

$$f'(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} in\, a_n e^{inx} \ .$$

Dimostrare che f appartiene a $\mathscr{D}(\mathbb{R}/2\pi) = C^\infty(\mathbb{R}/2\pi)$ se e solo se i coefficienti di Fourier a_n soddisfano una delle quattro condizioni equivalenti di cui all'esercizio 8.2, ed in tal caso

$$D^k f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (in)^k a_n e^{inx} \quad \text{per } k = 1, 2, \ldots$$

8.4. - Su $\mathscr{D}(\mathbb{R}/2\pi)$ consideriamo al solito la struttura di spazio di Frechét indotta dalla famiglia di seminorme $\{\|D^k f\|_\infty \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che la famiglia delle seminorme $\{\|D^k f\|_p \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ induce la stessa topologia per ogni $p \in [1, +\infty]$. [*Osservare che* $\|f\|_p \le C\|f\|_\infty$ *e* $\|f\|_\infty \le C'(\|f\|_p + \|f'\|_p)$ *per opportune costanti finite* C *e* C'.]

8.5. - Dato un funzionale continuo Λ su $\mathscr{D}(\mathbb{R}/2\pi)$, esiste un intero positivo k ed una costante finita C tale che

$$\big|\langle \Lambda, f\rangle\big| \le C\big(\|f\|_2 + \cdots + \|D^k f\|_2\big)$$

per ogni $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}/2\pi)$.

8.6. - Usare il risultato dell'esercizio 8.5 per dimostrare che, indicando con

$$\lambda_n := \langle \Lambda \,|\, e^{inx}\rangle := \frac{1}{2\pi}\langle \Lambda, e^{-inx}\rangle$$

i coefficienti di Fourier di Λ, allora esistono k intero e C finito tali che

$$\Big|\sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n a_n\Big| \le C'\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} (1 + |n|^{2k})|a_n|^2\Big)^{1/2}$$

per ogni successione (a_n) nulla eccetto un numero finito di indici. Dedurne che

$$\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda_n|^2}{1 + |n|^{2k}}\Big)^{1/2} \le C' \ .$$

8.7. - Usare il risultato dell'esercizio 8.6 per dimostrare che per ogni distribuzione Λ su $\mathbb{R}/2\pi$ esiste un intero k tale che $\lambda_n = O(|n|^k)$, e si ha

$$\langle \Lambda \,|\, f\rangle := \frac{1}{2\pi}\langle \Lambda, \overline{f}\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n\, \overline{a}_n \tag{8.1}$$

per ogni funzione $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}/2\pi)$. Dimostrare viceversa che ogni successione di numeri complessi (λ_n) che soddisfa $\lambda_n = O(|n|^k)$ per qualche k definisce, tramite la formula (8.1), una distribuzione su $\mathbb{R}/2\pi$.

Osservazione. - In base all'esercizio precedente, possiamo dare un senso alla serie di Fourier di qualunque distribuzione Λ, scrivendo dunque

$$\Lambda = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{inx} \ .$$

Inoltre, per ogni k intero positivo si ha

$$D^k \Lambda = \sum_{-\infty}^{+\infty} (in)^k \lambda_n e^{inx} \ .$$

8.8. - Scrivere la serie di Fourier della delta di Dirac δ_a per ogni $a \in \mathbb{R}/2\pi$. Sia $f_k(x) := x^k$ per ogni k intero positivo. Dimostrare che

$$\begin{cases} Df_{k+1} = (k+1) f_k & \text{per } k \text{ dispari,} \\ Df_{k+1} = (k+1) f_k - 2\pi^{k+1} \delta_\pi & \text{per } k \text{ pari} \end{cases}$$

(per k dispari, f_k, vista come funzione su $\mathbb{R}/2\pi$, è discontinua in $\pi \sim -\pi$, e quindi Df_k indica la derivata nel senso delle distribuzioni). Dedurne una formula ricorsiva per i coefficienti di Fourier di f_k.

8.9. - È possibile associare ad $f_k(x) := x^{-k}$ con k intero positivo una distribuzione su $\mathbb{R}/2\pi$? In caso di risposta affermativa, trovare una formula per i coefficienti di Fourier di f_k.

8.10. - Dimostrare che $W^{k,2}(\mathbb{R}/2\pi)$ coincide con l'insieme delle distribuzioni Λ su $\mathbb{R}/2\pi$ tali che

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (1 + |n|^{2k}) \, |\lambda_k|^2 < +\infty \ .$$

Osservazione. - La precedente caratterizzazione degli spazi di Sobolev Hilbertiani su $\mathbb{R}/2\pi$ via serie di Fourier (come quella analoga degli spazi di Sobolev Hilbertiani su $\mathbb{R}^n$ via trasformata di Fourier) viene talvolta presa come definizione. A differenza di quella distribuzionale, questa ha senso per ogni k reale positivo, e non solo intero, ed include gli spazi di Sobolev frazionari (nascondendone tuttavia il significato originale di spazi di tracce).

8.11. - Ogni distribuzione su $\mathbb{R}/2\pi$ induce una distribuzione sull'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$. Dare un esempio di distribuzione su $(-\pi, \pi)$ che non può essere estesa ad una distribuzione su $\mathbb{R}/2\pi$.

Notazione. - Gli esercizi che seguono riguardano la convergenza della serie di Fourier, ovvero delle sue somme parziali. Date due funzioni f e g *a valori complessi* in $L^1(\mathbb{R}/2\pi)$, il prodotto di convoluzione $f * g$ è dato da

$$(f * g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) \, \overline{g(y)} \, dy \tag{8.2}$$

Nel fare i calcoli, conviene vedere f e g come funzioni su $\mathbb{R}$ di periodo 2π. Il coniugio nella definizione serve a rendere il prodotto bilineare nel senso degli spazi vettoriali sul campo complesso (ma per quello che ci serve potrebbe anche essere omesso). Il prodotto di convoluzione si estende al solito modo alle distribuzioni.

Data $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}/2\pi)$, le somme parziali della serie di Fourier sono date da

$$T_m\Lambda := \sum_{-m}^{m} \lambda_n e^{inx} = \Lambda * g_m \tag{8.3}$$

per ogni m intero positivo, dove

$$g_m(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{-m}^{m} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)} \ . \tag{8.4}$$

8.12. - Verificare che valgono le solite proprietà del prodotto di convoluzione. In particolare, definire il prodotto di convoluzione di una distribuzione per una funzione C^∞ e poi quello di due distribuzioni, e dimostrare tramite regolarizzazione per convoluzione che $\mathscr{D}(\mathbb{R}/2\pi)$ è denso in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}/2\pi)$.

8.13. - Verificare le formule (8.3) e (8.4), e dimostrare che per ogni intero $m \geq 1$ si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_m(x)\, dx = 1 \ .$$

8.14. - Sia f una funzione in $L^1(\mathbb{R}/2\pi)$. Dimostrare che $T_m f(x)$ converge a $f(x)$ quando $m \to +\infty$ per ogni x tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t-x|}\, dt < +\infty \ .$$

[*Usando la formula (8.3) ed il fatto che l'integrale di g_m è sempre* 1 *(vedi esercizio 8.13), si ottiene*

$$T_m f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-y) - f(x)\big) \frac{\sin((m+1/2)y)}{\sin(y/2)}\, dy$$

e poiché la funzione

$$g(y) := \frac{f(x-y) - f(x)}{\sin(y/2)}$$

appartiene a $L^1(-\pi,\pi)$, per concludere basta utilizzare il fatto che le funzioni $\sin((m+1/2)y)$ *convergono a* 0 *nella topologia debole* di $L^\infty(-\pi,\pi)$.*]

8.15. - Dimostrare che $T_m f$ converge *uniformemente* ad f per ogni funzione $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}/2\pi)$ con $\alpha > 0$, e per ogni funzione $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}/2\pi)$ con $p > 1$ (in questo caso, ovviamente, ci riferiamo alla rappresentante continua di f).

8.16*. - Dimostrare che dato x, esiste f continua su $\mathbb{R}/2\pi$ tale che la successione $T_m f(x)$ non converge ad $f(x)$, ed anzi è illimitata. [*Far vedere che i funzionali lineari $f \mapsto T_m f(x)$ su $C(\mathbb{R}/2\pi)$ non sono equilimitati ed usare il teorema di Banach-Steinhaus.*]

8.17*. - Data $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi)$, allora $T_m f$ converge *uniformemente* a 0 in ogni compatto che non interseca il supporto di f (inteso nel senso delle distribuzioni: il complementare del massimo aperto su cui f è quasi ovunque nulla).

8.18. - Far vedere con un esempio che le conclusioni degli esercizi 8.14 e 8.17 non valgono quando f è una misura.

Osservazione (località della convergenza). - Dall'esercizio 8.14 si deduce che date due funzioni f_1 ed f_2 in L^1 che coincidono nell'aperto A, allora $T_m f_1 - T_m f_2$ tende uniformemente a 0 localmente in A. In altre parole, il comportamento puntuale (convergenza) delle due serie di Fourier coincide sull'aperto A. Più in generale, questo vale per distribuzioni che differiscano per una funzione L^1, ma, come osservato nell'esercizio 8.18, non quando differiscono per una misura.

8.19. - Sia f la funzione su $\mathbb{R}/2\pi$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} \pi + x & \text{per } -\pi \le x < 0, \\ 0 & \text{per } x = 0, \\ -\pi + x & \text{per } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

(ed estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$). Poniamo inoltre

$$f_a(x) := f(x-a) \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}/2\pi.$$

Dimostrare che $T_m f(x) \to f(x)$ per ogni x e per ogni a. [*L'enunciato è vero per $x \ne a$ per via dell'esercizio 8.14. Inoltre $T_m f_a(a) = T_m f(0)$, e quindi possiamo assumere $x = a = 0$, e dimostrare che $T_m f(0) \to 0$. Siccome f è una funzione dispari su $(-\pi, \pi)$, mentre le funzioni g_m definite in (8.4) sono pari, allora $T_m f(0) = \int f(-y)\, g_m(y)\, dy = 0$ per ogni m.*]

8.20. - Dimostrare che data una funzione f di classe $C^{0,\alpha}$ a tratti, allora $T_m f(x)$ converge ad $f(x)$ nei punti di continuità di f, e alla media di $f(x^+)$ ed $f(x^-)$ (limite destro e sinistro) nei punti di salto di f. Far vedere che il risultato vale anche per le funzioni $W^{1,p}$ a tratti. [*Ogni funzione $C^{0,\alpha}$ a tratti si scrive come somma di una funzione $C^{0,\alpha}$ ed una combinazione lineare (finita) delle funzioni f_a definite nell'esercizio 8.19, Basta quindi utilizzare quanto dimostrato negli esercizi 8.15 e 8.19.*]

Osservazione. - In effetti, il risultato precedente vale anche per funzioni f che siano a variazione limitata in senso classico, ovvero tali che risulti finito il numero

$$\mathrm{Var}(f) := \sup \Big[\sum_0^n \big| f(x_i) - f(x_{i-1}) \big| \Big]$$

dove l'estremo superiore è preso tra tutte le possibili scelte di n intero e dei punti $\{x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n\} \subset [-\pi, \pi]$. Si noti che f è continua eccetto che in una quantità numerabile di punti, dove comunque esistono il limite destro e sinistro. La convergenza della serie di Fourier per queste funzioni può essere ottenuto a partire dal risultato dell'esercizio 8.22.

8.21*. - Dimostrare che le funzioni g_m definite in (8.4) hanno primitive equilimitate in $[-\pi, \pi]$. [*Sia G_m la primitiva di g_m nulla in 0. Integrando per parti si ottiene, per $x > 0$,*

$$G_m(x) = \frac{1 - \cos((m+1/2)x)}{(m+1/2)\sin(x/2)} + \int_0^x \frac{1 - \cos((m+1/2)t)}{(m+1/2)\sin^2(t/2)} \cos(t/2)\, dt$$

e da una stima accurata si deduce la tesi.]

8.22*. - Dimostrare che esiste una costante C, indipendente da m, tale che $\|T_m f\|_\infty \le C\|Df\|_1$ per tutte le funzioni $f \in C^1(\mathbb{R}/2\pi)$. Estendere il risultato alle funzioni f la cui derivata distribuzionale Df è una misura reale finita (ovvero $f \in BV(\mathbb{R}/2\pi)$).

Notazione. - Gli esercizi che seguono riguardano la risoluzione delle equazioni del calore e delle onde per trasformata di Fourier (separazione delle variabili). Indicheremo con u una generica funzione su $I \times \mathbb{R}/2\pi$, con I intervallo aperto (non necessariamente limitato) di $\mathbb{R}$.

Indichiamo la variabile in I con la lettera t e quella in $\mathbb{R}/2\pi$ con x; u_t, u_{tt}, u_x, u_{xx} indicano per le derivate parziali di u.

8.23. - Data $u \in C^2(I \times \mathbb{R}/2\pi)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ indichiamo con a_n i coefficienti di Fourier di u rispetto alla variabile x, vale a dire

$$a_n(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t,x) e^{-inx} dx \ .$$

Dimostrare che:

(a) le funzioni a_n appartengono a $C^2(I)$;

(b) se u risolve $u_t = u_{xx}$ su $I \times \mathbb{R}/2\pi$ allora a_n risolve $\dot{a}_n = -n^2 a_n$ su I;

(c) se u risolve $u_{tt} = u_{xx}$ su $I \times \mathbb{R}/2\pi$ allora a_n risolve $\ddot{a}_n = -n^2 a_n$ su I.

[*L'equazione $u_t = u_{xx}$ implica che per ogni $t \in I$ ed $n \in \mathbb{Z}$ vale*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(t,x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}(t,x) e^{-inx} dx \ .$$

Portando la derivata rispetto a t fuori dall'integrale nel termine di sinistra, ed integrando quello di destra per parti due volte si ottiene $\dot{a}_n = -n^2 a_n$. Per l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$ si procede in modo analogo.]

8.24. - Sia u una funzione in $C^1(I \times [-\pi,\pi]) \cap C^2(I \times (-\pi,\pi))$ che risolve $u_t = u_{xx}$ in $I \times (-\pi,\pi)$ con condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot,\pi) = u(\cdot,-\pi)$ e $u_x(\cdot,\pi) = u_x(\cdot,-\pi)$. Dimostrare che risolve $u_t = u_{xx}$ in $I \times \mathbb{R}/2\pi$. Far vedere che lo stesso vale per l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$.

8.25. - Sia $T > 0$, e siano $u_0, v_0 \in C^2(\mathbb{R}/2\pi)$.

(a) Dimostrare che l'equazione $u_t = u_{xx}$ ammette un'unica soluzione in $C^2([0,T) \times \mathbb{R}/2\pi)$ con dato iniziale $u(0,\cdot) = u_0$;

(b) dimostrare che l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$ ammette un'unica soluzione in $C^2([0,T) \times \mathbb{R}/2\pi)$ con dati iniziali $u(0,\cdot) = u_0$ e $u_t(0,\cdot) = v_0$.

8.26. - Risolvere i seguenti problemi con condizione di periodicità al bordo $u(\cdot,\pi) = u(\cdot,-\pi)$ e $u_x(\cdot,\pi) = u_x(\cdot,-\pi)$:

$$(a) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(0,x) = 2\sin(2x) \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(2t) \\ u(0,\cdot) = 1 \\ u_t(0,\cdot) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} u_t = u - 2u_{xx} + u_{xxxx} \\ u(0,x) = 2\sin(2x) \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,x) = x \end{cases}$$

8.27. - Sia P un polinomio di una variabile a coefficienti reali di grado d. Dimostrare che se u è una distribuzione su $\mathbb{R}$ che risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

$$P(D)u = 0 \ , \tag{8.5}$$

allora u è (rappresentata da) una funzione di classe C^∞. In altre parole, le soluzioni di (8.5) nel senso delle distribuzioni coincidono con quelle classiche. [*Dimostrare che le regolarizzate per convoluzione di u risolvono (8.5), ed usare quindi il fatto che ogni sottospazio di dimensione finita di $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è chiuso rispetto alla convergenza debole delle distribuzioni.*]

8.28. - Estendere il risultato dell'esercizio 8.27 ad equazioni lineari con coefficienti costanti non omogenee $P(D)u = g$ con $g \in C(\mathbb{R})$.

8.29*. - Estendere il risultato dell'esercizio 8.27 alle equazioni lineari non omogenee con coefficienti non costanti di classe $C^\infty(I)$, con I intervallo aperto di $\mathbb{R}$.

8.30*. - Data u distribuzione su $I \times \mathbb{R}/2\pi$, definiamo per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la distribuzione a_n su I come segue (cfr. esercizio 8.23):

$$\langle a_n, \varphi \rangle := \frac{1}{2\pi} \big\langle u, e^{-inx} \varphi(t) \big\rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(I).$$

Dimostrare che l'identità

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{inx}$$

vale nel senso delle distribuzioni su $I \times \mathbb{R}/2\pi$, ovvero

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \langle a_n, \varphi(\cdot, x) \rangle \, e^{inx} \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(I \times \mathbb{R}/2\pi).$$

Far vedere inoltre che

$$u_t = \sum_{-\infty}^{+\infty} Da_n \, e^{inx} \ , \quad u_{tt} = \sum_{-\infty}^{+\infty} D^2 a_n \, e^{inx} \ , \quad u_{xx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} -n^2 a_n \, e^{inx}$$

(tutte le derivate e le uguaglianze sono intese nel senso delle distribuzioni).

8.31*. - Siano u ed a_n come nell'esercizio precedente. Dimostrare che se u risolve l'equazione $u_t = u_{xx}$ su $I \times \mathbb{R}/2\pi$ (nel senso delle distribuzioni) allora $Da_n = -n^2 a_n$ su I (nel senso delle distribuzioni) per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare quindi che u è una funzione di classe C^∞. [*In base all'esercizio 8.27 le distribuzioni a_n sono funzioni esponenziali decrescenti di t, se ne deduce quindi con un po' di lavoro che la serie $\sum a_n(t) e^{inx}$ rappresenta una funzione di classe C^∞.*]

8.32*. - Siano u ed a_n come nell'esercizio precedente. Dimostrare che se u risolve l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$ su $I \times \mathbb{R}/2\pi$ (nel senso delle distribuzioni) allora $D^2 a_n = -n^2 a_n$ su I (nel senso delle distribuzioni) per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

9. Teorema spettrale e varianti della serie di Fourier

NOTAZIONE. - Gli esercizi che seguono riguardano il teorema spettrale in versioni più o meno astratte. Sono dunque dati:

- H spazio di Hilbert separabile (reale) con prodotto scalare $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$,
- V spazio di Hilbert con immersione compatta e densa in H,
- f forma quadratica semicontinua inf., coerciva e definita positiva su V

Ricordo che f è una forma quadratica se $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ e $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)+2f(y)$ per ogni $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ed è coerciva se $f(x) \to +\infty$ quando $\|x\|_V \to +\infty$. Indichiamo con B_f la forma bilineare simmetrica associata ad f, vale a dire

$$B(x,y) := \frac{1}{4}\big(f(x+y) - f(x-y)\big) \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$

Nel seguito identifichiamo V con un sottospazio di H. Indichiamo inoltre con W il sottospazio degli $x \in V$ tali che $|B(x,y)| \le C(x)\|y\|_H$ per ogni $y \in V$, con $C(x)$ costante finita. Se $x \in W$, il funzionale lineare $y \mapsto B(x,y)$ (definito per $y \in V$) è limitato rispetto alla norma di H, e quindi esiste $T(x) \in H$ tale che

$$B(x,y) = \langle T(x) \,|\, y\rangle \quad \text{per ogni } y \in V.$$

Si verifica facilmente che $T : W \to H$ è un operatore lineare.

9.1*. - Dati $x_1, \dots, x_n \in W$ autovettori di T a due a due ortonormali, si consideri il problema di minimo

$$\min\big\{f(x): \ \langle x \,|\, x\rangle = 1 \text{ e } \langle x_i \,|\, x\rangle = 0 \text{ per } i = 1, \dots, n\big\} \ . \tag{9.1}$$

Dimostrare che:

(a) Il problema (9.1) ammette una soluzione $\bar{x} \in V$;

(b) esistono $\lambda, \mu_i \in \mathbb{R}$ tali che

$$2B(\bar{x}, y) - 2\lambda\langle \bar{x} \,|\, y\rangle - \sum_i \mu_i \langle x_i \,|\, y\rangle = 0 \quad \text{per ogni } y \in V; \tag{9.2}$$

(c) $\bar{x}$ appartiene a W e soddisfa l'equazione $2T\bar{x} - 2\lambda\bar{x} - \sum_i \mu_i x_i = 0$;

(d) inoltre $\mu_i = 0$ per ogni i, e quindi $T\bar{x} = \lambda\bar{x}$;

(e) $\lambda = f(\bar{x})$ è il valore del minimo in (9.1).

[*Il minimo in (9.1) esiste perché (a) f è semicontinua inferiormente in senso debole su V – cosa che segue dalla semicontinuità forte e dalla convessità – e coerciva su V; (b) il vincolo $\langle x \,|\, x\rangle = 1$ è debolmente chiuso in V per via dell'immersione compatta di V in H; (c) i vincoli $\langle x \,|\, x_i\rangle = 0$ sono debolmente chiusi in V in quanto lineari. La condizione (9.2) si ottiene ponendo uguale a zero la derivata in $t = 0$ di*

$$t \mapsto f\Big(\frac{\bar{x} + ty}{\|\bar{x} + ty\|}\Big)$$

per ogni y perpendicolare a $\bar{x}$ e ad x_i per $i = 1, \dots, n$. La norma $\|\cdot\|$ e la nozione di perpendicolarità sono quelle derivate dal prodotto scalare si H.]

9.2*. - Sia (x_n) una successione di vettori in W costruita per induzione come segue: x_{n+1} risolve il problema di minimo (9.1) rispetto ai vettori $x_1, \dots, x_n$ già costruiti. Dimostrare che:

(a) x_n appartiene a W e risolve $Tx_n = \lambda_n x_n$ con $\lambda_n = f(x_n)$;

(b) i vettori x_n sono unitari e a due a due ortogonali;

(c) $f(x_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$;

(d) $\{x_n\}$ è una base ortonormale di H.

9.3. - Sia $H = L^2(\mathbb{R}/2\pi)$, sia V il sottospazio delle funzioni in $W^{1,2}(\mathbb{R}/2\pi)$ e

$$f(u) := \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 + |Du|^2 \ . \tag{9.3}$$

Mostrare che:

(a) f è quadratica, semicontinua inferiormente e coerciva su V;

(b) $W := W^{2,2}(\mathbb{R}/2\pi)$ e $Tu = u - D^2u$;

(c) calcolare autovalori ed autovettori di T (cfr. esercizio 8.27).

9.4*. - Dato Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, ed u in $W^{1,1}(\Omega)$, dimostrare che

$$\int_\Omega Du \cdot \varphi + \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi = \int_{\partial\Omega} u\, \varphi \cdot \eta \quad \text{per ogni } \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

dove nell'integrale a destra u è inteso nel senso della traccia ed η è la normale esterna a $\partial\Omega$. [*La formula è nota per $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, e si estende per densità ad ogni $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Per concludere, basta ricordarsi del teorema di estensione.*]

9.5*. - Dato Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, poniamo $H := L^2(\Omega)$ e $V := W_0^{1,2}(\Omega)$ (funzioni in $W^{1,2}$ con traccia nulla al bordo) e

$$f(u) := \int_\Omega |Du|^2 \ .$$

Mostrare che:

(a) V è denso in H,

(b) f è una forma quadratica semicontinua inferiormente e coerciva su V,

(c) $B(u, v) = \int_\Omega Du \cdot Dv$ per ogni $u, v \in V$,

(d) $W = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $Tu = -\Delta u$.

[*Punto (d): siano date $u \in V$ e C costante finita tali che*

$$C\|v\|_2 \geq \left| \int_\Omega Du \cdot Dv \right| \quad \textit{per ogni } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Se ne deduce che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ vale

$$C\|\varphi\|_2 \geq \left| \int_\Omega Du \cdot Dv \right| = \left| \int_\Omega -\Delta u \cdot \varphi \right|$$

e dunque il laplaciano distribuzionale Δu è rappresentato da una funzione in $L^2(\Omega)$. Usando poi la formula dimostrata nell'esercizio 9.4 si ottiene che

$$B(u, v) = \int_\Omega Du \cdot Dv = \int_\Omega -\Delta u \cdot v$$

per ogni $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – qui è essenziale l'ipotesi che u abbia traccia nulla al bordo – e per densità si conclude che lo stesso vale per ogni $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.]

9.6. - Sia $\Omega := (0, a)$ con $a > 0$, e si prenda T e W come nell'esercizio 9.5. Calcolare esplicitamente autovalori ed autovettori di T (cfr. esercizio 8.27).

9.7. - Dimostrare che $\{\sin(nx) : \ n = 1, 2, \ldots\}$ costituisce una base ortonormale di $L^2(0, \pi)$ dotato del prodotto scalare

$$\langle f \mid g \rangle := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx \ . \tag{9.4}$$

Osservazione. - In particolare, data $f \in L^2(0,\pi)$, abbiamo che

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{con } a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, \sin(nx)\, dx\ , \tag{9.5}$$

dove la convergenza della serie è intesa in senso L^2. È anche possibile definire una formula analoga per funzioni L^1 e misure su $(0,\pi)$, e molto altro. Tuttavia non si può arrivare ad includere tutte le distribuzioni su $(0,\pi)$ – a differenza di quanto fatto con la serie di Fourier – a causa del fatto che lo spazio delle funzioni test $\mathscr{D}(0,\pi)$ non include $\sin(nx)$. La decomposizione (9.5), a differenza di quella in serie di Fourier, risulta particolarmente conveniente nella risoluzione di equazioni differenziali con condizioni di Dirichlet al bordo.

9.8. - Scrivere la decomposizione in serie (9.5) delle seguenti misure e funzioni su $(0,\pi)$:

$$\delta_{\pi/2}\ ,\quad 1_{(\pi/2,\pi)}\ ,\quad 1\ ,\quad x\ ,\quad x^2\ .$$

9.9*. - Data $f \in L^2(0,\pi)$, si prenda (a_n) come sopra. Dimostrare quanto segue:
(a) data f in $W_0^{1,2}(0,\pi)$ allora vale la formula

$$Df(x) = \sum_1^{+\infty} n a_n \cos(nx)\ .$$

(b) f appartiene a $W_0^{1,2}(0,\pi)$ se e solo se $\displaystyle\sum_1^{+\infty}(1+n^2)|a_n| < +\infty$.

(c) dare un esempio di $f \in C^1([0,\pi])$ per cui $\displaystyle\sum_1^{+\infty}(1+n^2)|a_n| = +\infty$.

[*Dimostrare innanzitutto che* $W_0^{1,2}(0,\pi)$ *coincide con la chiusura nella norma* $W^{1,2}$ *di* $C_c^1(0,\pi)$. *Osservare poi che* $\{\cos(nx) :\ n = 1,2\dots\}$ *è un sistema ortonormale di* $L^2(0,\pi)$ *– cfr. Esercizio 9.14.*]

9.10. - I coefficienti a_n di una funzione f su $(0,\pi)$ possono essere calcolati a partire dai coefficienti di Fourier della funzione $\tilde f$ su $(-\pi,\pi)$ definita da $\tilde f(x) := f(x)$ per $x>0$ e $\tilde f(x) := -f(-x)$ per $x<0$. Come?

9.11. - Usando la decomposizione (9.5), risolvere i seguenti problemi con condizioni di Dirichlet al bordo per funzioni $u = u(t,x)$ su $I \times (0,\pi)$:

$$(a)\quad \begin{cases} u_t = -u + u_{xx} \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,x) = \sin x - \sin(3x) \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(2t) \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 1 \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,0) = 0,\ \ u(\cdot,\pi) = \pi \\ u(0,x) = x \end{cases}$$

[*Per il problema (d), ricondursi al caso delle solite condizioni al bordo sottraendo ad u un'opportuna funzione.*]

Osservazione. - Confrontare la soluzione del problema (c) nell'esercizio 9.11 con quella ottenuta tramite la solita decomposizione di Fourier, cioè quella con condizioni di periodicità al bordo.

9.12*. - Dato Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, sia $H = L^2(\Omega)$, $V := W^{1,2}(\Omega)$, ed f la forma quadratica
$$f(u) := \int_\Omega |u|^2 + |Du|^2 \ .$$
Dimostrare che W è l'insieme delle $u \in W^{1,2}(\Omega)$ con Laplaciano Δu in $L^2(\Omega)$ e *derivata normale nulla al bordo* nel senso delle distribuzioni (cfr. esercizio 7.21). Infine, $Tu = u - \Delta u$ per ogni $u \in W$.

9.13. - Sia $\Omega := (0, a)$ con $a > 0$, e si prenda T e W come nell'esercizio 9.12. Calcolare esplicitamente autovalori ed autovettori di T (cfr. esercizio 8.27).

9.14. - Dimostrare che $\{\cos(nx) : \ n = 1, 2, \dots\} \cup \{1/\sqrt{2}\}$ costituisce una base ortonormale di $L^2(0, \pi)$ dotato del prodotto scalare definito in (9.4).

9.15. - Usare quanto dimostrato nell'esercizio precedente per risolvere il seguente problema con condizioni di Neumann al bordo per funzioni $u(t, x)$ su $I \times (0, \pi)$:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u_x(\cdot, 0) = u_x(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, x) = 1 \\ u_t(0, x) = \cos x \end{cases}$$

9.16*. - Dati (X_1, μ_1) ed (X_2, μ_2) spazi misurati, siano $\{f^1_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ e $\{f^2_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ basi ortonormali di $\mathscr{L}^2(\mu_1)$ ed $\mathscr{L}^2(\mu_2)$ rispettivamente. Dimostrare che l'insieme delle funzioni f_n definite da
$$f_n(x) := f_{n_1}(x_1) \cdot f_{n_2}(x_2) \quad \text{per ogni } x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$$
con $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ costituisce una base ortonormale di $L^2(\mu_1 \times \mu_2)$.

9.17. - Sia P_N il toro N-dimensionale $(\mathbb{R}/2\pi)^N$. Dimostrare che $\{e^{in\cdot x} : \ n \in \mathbb{Z}^N\}$ è una base ortonormale di $L^2(P_N)$ dotato del prodotto scalare
$$\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{P_N} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx \ .$$

Osservazione. - La base definita nell'esercizio precedente definisce la decomposizione in serie di Fourier (complesse) per funzioni e distribuzioni sul toro N-dimensionale P_N:
$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} a_n e^{in\cdot x} \quad \text{con } a_n := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{P_N} f(x) \, e^{-in\cdot x} \, dx \ .$$
Praticamente tutte le proprietà della serie di Fourier su $\mathbb{R}/2\pi$ valgono anche per la serie di Fourier su P_N. Omettiamo di ridimostrarle.

9.18. - Dimostrare che esiste una costante finita $C = C(N)$ tale che
$$\|D^2 f\|_2 \leq C \|\Delta f\|_2$$

per ogni funzione regolare f su P_N.

Osservazione. - La conclusione del paragrafo precedente è un caso particolare della disuguaglianza di John e Niremberg, che dimostra che per funzioni con supporto contenuto in un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, la norma L^p della derivata seconda si controlla con la norma L^p del Laplaciano per ogni $p \in (1, +\infty)$.

9.19. - Dimostrare che $W^{k,2}(P_N)$ coincide con l'insieme delle funzioni f tali che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^N} (1 + |n|^{2k})\, |a_n| < +\infty \ .$$

Usare quanto visto l'esercizio 9.18 per dimostrare che ogni funzione f in $L^2(P_N)$ con Laplaciano distribuzionale in L^2 appartiene a $W^{2,2}(P_N)$.

10. Trasformata di Fourier

Notazione. - Gli esercizi che seguono riguardano la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^N$. Indicheremo la variabile nello spazio reale, sia esso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^N$ con x, e la variabile nello spazio delle frequenze (spazio di Fourier) con y. Data f in $L^1(\mathbb{R}^N)$, la trasformata di Fourier di f è la funzione $\mathscr{F} f = \hat{f}$ in $C_0(\mathbb{R}^N)$ definita da

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-iy\cdot x}\, dx \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^N,$$

mentre l'anti-trasformata di Fourier di f è definita da

$$\check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, e^{iy\cdot x}\, dy \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Indichiamo con $\mathscr{S}_N$ lo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti su $\mathbb{R}^N$, ovvero delle funzioni $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tali che per ogni multi-indice $a = (a_1, \dots, a_k)$ e per ogni intero h si ha $D^a f(x) = o(1/|x|^h)$ per $|x| \to +\infty$. Indichiamo con $\mathscr{S}'_N$ lo spazio delle distribuzioni temperate su $\mathbb{R}^N$, ovvero il duale di $\mathscr{S}_N$.

Giustificazione formale della formula di inversione. - Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ed $L > 0$, indichiamo con f_L la funzione di periodo $2\pi L$ che coincide con f su $(-\pi L, \pi L)$. Utilizzando la serie di Fourier per funzioni su $\mathbb{R}/2\pi L$ otteniamo che

$$f_L(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx/L} \quad \text{con } a_n := \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} f(t) e^{-int/L} dt \ .$$

Questa identità può essere riscritta come

$$f_L(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} \hat{f}_L(y)\, d\mu_L(y) \tag{10.1}$$

dove si è posto

$$\hat{f}_L(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi L}^{\pi L} f(t) e^{-iyt}\, dt \quad \text{e} \quad \mu_L := \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \delta_{n/L} \ .$$

Passando al limite per $L \to +\infty$, si vede che il termine a sinistra di (10.1) converge ad f, mentre a destra le misure μ_L convergono alla misura di Lebesgue e le funzioni $\hat{f}_L$ convergono a $\hat{f}$. Ci aspettiamo dunque di ottenere la formula di inversione

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{iyx}\, dy \ . \tag{10.2}$$

10.1. - Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, e prese f_L, μ_L, ecc. come sopra, dimostrare quanto segue:

(a) le funzioni f_L convergono ad f nel senso delle distribuzioni per $L \to +\infty$, e più precisamente $\int_{\mathbb{R}} f_L \varphi \to \int_{\mathbb{R}} f \varphi$ per ogni φ in $L^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto;

(b) $\hat{f}_L$ converge ad $\hat{f}$ uniformemente;

(c) le misure μ_L convergono alla misura di Lebesgue nel senso delle distribuzioni, e più precisamente $\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_L \to \int_{\mathbb{R}} \varphi$ per ogni φ continua a supporto compatto;

10.2. - Trovare condizioni su f ed eventualmente $\hat{f}$ che garantiscano la correttezza della dimostrazione della formula di inversione (10.2) data sopra.

10.3. - (a) Far vedere che se $u(x)$ risolve l'equazione differenziale $\dot{u} = a\, x\, u$ con $a \in \mathbb{R}$, allora $\hat{u}$ risolve un'equazione dello stesso tipo;

(b) calcolare tutte le soluzioni di queste equazioni differenziali;

(c) calcolare la trasformata di Fourier di $f_\lambda(x) := e^{-\lambda^2 x^2}$;

(d) Dimostrare "a mano" la formula di inversione (10.2) per tutte le f nello spazio X delle combinazioni lineari (finite) di traslate delle funzioni f_λ;

(e) Far vedere che X è denso (e.g., rispetto alla convergenza uniforme) in $\mathscr{S}_1$, e dedurne la validità della formula di inversione (10.2) per tutte le $f \in \mathscr{S}_1$.

10.4. - Calcolare la trasformata di Fourier della funzione indicatrice di un intervallo, e cercare quindi di dimostrare la formula di inversione per calcolo diretto.

10.5. - Usando il metodo dei residui, calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = 1/(1+x^2)$.

10.6. - Data $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare la trasformata di Fourier di $f(\lambda x)$ e di $f(x - \lambda)$. Estendere i risultati al caso di f distribuzione temperata.

10.7*. - Per ogni n intero, sia μ_n la misura di probabilità su $\mathbb{R}$ definita da

$$\mu_n := \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{x_k} \quad \text{dove } x_k := \frac{k - n/2}{\sqrt{n}}$$

Usando la trasformata di Fourier, calcolare il limite di μ_n (nel senso delle misure) per $n \to +\infty$.

10.8. - La μ_n nell'esercizio precedente è la distribuzione di probabilità associata ad n estrazioni di ± 1, ciascuna con probabilità $1/2$, e rinormalizzata in x di un fattore $\sqrt{n}$. Discutere cosa succede al limite delle μ_n se nella rinormalizzazione si usa una differente potenza di n.

10.9. - Determinare la trasformata di Fourier $e^{i\lambda x}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Far vedere che $e^{\lambda x}$ non è una distribuzione temperata per alcun $\lambda \neq 0$.

10.10. - Confrontare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione lineare $\ddot{u} - \lambda u = 0$ ottenute col metodo classico e quelle ottenute tramite trasformata di Fourier, e cioè risolvendo l'equazione $(y^2 + \lambda)\hat{u} = 0$ nell'ambito delle distribuzioni temperate.

10.11. - Sia $N > 1$, e sia u una funzione su $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ della forma $u(x) = v(|x|)$ con v funzione C^2 su $(0, +\infty)$.

(a) Esprimere il Laplaciano di u in termini di v;

(b) determinare tutte le soluzioni radiali di $-\Delta u = 0$ in $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$;

(c)* far vedere che ciascuna delle soluzioni ottenute al punto (b) è una distribuzione temperata, e calcolarne il laplaciano nel senso delle distribuzioni su tutto $\mathbb{R}^N$;

(d)** posto $f(x) := |x|^2$, determinare tutte le distribuzioni $\Lambda \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ che soddisfano l'uguaglianza $f\Lambda = 0$ [*osservare che f è di classe C^∞ e quindi il prodotto $f\Lambda$ è una distribuzione ben definita. Inoltre f si annulla in* 0, *quindi ci sono soluzioni Λ diverse da* 0 – *ad esempio la delta di Dirac in* 0];