Versione: 12 ottobre 2003

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali

a.a. 2002/03

docente: Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per il modulo di "Introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali" del corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03. La prima parte consta dei testi di tutti gli scritti, mentre la seconda parte contiene una breve traccia delle soluzioni. Siccome alcuni degli argomenti sono stati svolti solo in modo superficiale, non si presuppone che degli esercizi corrispondenti vengano date soluzioni accurate in tutti i dettagli.

Programma del corso

1. Elementi di calcolo delle variazioni
   - 1.1. Una funzione sufficientemente regolare che minimizza un funzionale integrale (con condizioni fissate al bordo oppure no) risolve l'equazione di Eulero-Lagrange associata (con condizioni di Dirichlet oppure di Neumann al bordo).
   - 1.2. Vale il viceversa per funzionali convessi. Funzionale di Dirichlet ed equazione di Laplace.
2. Complementi di analisi funzionale
   - 2.1. Misure (finite) vettoriali, e duale delle funzioni continue.
   - 2.2. Dimostrazione completa del teorema di Riesz (duale di L^p)
   - 2.3. Topologia debole e debole star, spazi riflessivi, teorema di Banach-Alaoglu.
   - 2.4. Esempi di convergenza debole ma non forte: limite di $f_n(x) := f(nx)$.
   - 2.5. *Il teorema di Hahn-Banch come teorema di separazione (senza dimostrazione). Un convesso fortemente chiuso è debolmente chiuso.*
   - 2.6. Esistenza di minimi per funzionali coercivi e debolmente semicontinui inferiormente su uno spazio riflessivo separabile.
   - 2.7. Convessità e semicontinuità inferiore forte implicano la semicontinuità inferiore debole. Applicazione: funzionali integrali convessi su L^p: coercività e crescita p dell'integranda.
3. Distribuzioni
   - 3.1. Distribuzioni (su $\mathbb{R}$) come duale delle funzioni regolari a supporto compatto. *Topologia sullo spazio delle distribuzioni.* Nozione di convergenza debole per una successione di distribuzioni.
   - 3.2. L'operatore di derivazione sulle distribuzioni.
   - 3.3. Prodotto di convoluzione di funzioni L^p, stime L^p standard. Derivata del prodotto di convoluzione.
   - 3.4. Regolarizzazione per convoluzione delle funzioni L^p.
   - 3.5. Convoluzione di distribuzioni e regolarizzazione per convoluzione.
   - 3.6. Distribuzioni su un aperto qualunque; approssimazione con funzioni regolari.
4. Spazi di Sobolev
   - 4.1. Definizione distribuzionale degli spazi di Sobolev $W^{1,p}$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$.
   - 4.2. Proprietà degli spazi di Sobolev su un intervallo: estensione, approssimazione con funzioni regolari, immersione (compatta) nelle funzioni Hölderiane fin sul bordo.
   - 4.3. Caratterizzazione della convergenza debole negli spazi di Sobolev in termini di convergenza debole di funzioni e derivate.
   - 4.4. Esistenza del minimo per alcuni esempi di funzionali integrali convessi. Equazione di Eulero-Lagrange in senso debole, regolarità ulteriore per i minimi del funzionale di Dirichlet.

4.5. *Spazi di Sobolev su un aparto regolare in dimensione qualunque: caratterizzazioni alternative, estensione, immersioni, traccia sul bordo, disuguaglianze tipo Poincaré.*

4.6. Convergenza debole degli spazi di Sobolev ed esistenza del minimo per l'energia di Dirichlet; soluzioni deboli dell'equazione di Laplace (con varie condizioni al bordo).

5. Serie di Fourier

5.1. Serie di Fourier reale e complessa per fuzioni in $L^2(-\pi, \pi)$. Differenza tra $(-\pi, \pi)$ e $\mathbb{R}/2\pi$.

5.2. Serie di Fourier di una funzione C^1 su $\mathbb{R}/2\pi$ e della sua derivata.

5.3. Caratterizzazione delle funzioni regolari su $\mathbb{R}/2\pi$ in termini dei coefficienti Fourier.

5.4. *Caratterizzazione delle distribuzioni su $\mathbb{R}/2\pi$ in termini dei coefficienti Fourier.*

5.5. Convergenza della serie di Fourier per funzioni a) in L^2, b) con coefficienti sommabili, c) in $W^{1,2}$, d) in $W^{1,2}$ a tratti.

5.6. Calcolo delle serie di Fourier di alcune funzioni.

5.7. Soluzione dell'equazione delle onde e del calore via serie di Fourier (separazione delle variabili, caso classico). Ruolo dei dati iniziali e delle condizioni al bordo.

5.8. Serie di Fourier per funzioni sul cubo $(-\pi, \pi)^n$.

6. Teorema spettrale e basi ortonormali

6.1. Teorema spettrale: dato un spazio di Hilbert W che si immerge compattamente e densamente nello spazio di Hilbert H, ed una forma quadratica Q su W semicontinua inferiormente e coerciva, allora esiste una base ortonormale di H fatta di autovettori dell'operatore autoaggiunto T associato a Q. Dimostrazione per minimizzazioni successive.

6.2. La base standard di $L^2(-\pi, \pi)$ come base di autovettori dell'operatore $Tu = -\ddot{u}$ con condizioni di periodicità al bordo.

6.3. Basi $L^2(0, \pi)$ di autovettori dell'operatore $Tu = -\ddot{u}$ con condizioni di Dirichlet (risp. Neumann) al bordo.

7. Trasformata di Fourier

7.1. *Trasformata di Fourier come limite delle serie di Fourier.*

7.2. Trasformata di Fourier di una funzione in L^1 di $\mathbb{R}^n$.

7.3. La trasformata di Fourier è un'isometria su L^2; trasformata della derivata.

7.4. Distribuzioni temperate e loro trasformate di Fourier.

7.5. Calcolo delle trasformate di Fourier di alcune funzioni.

7.6. *Soluzione fondamentale di un'equazione lineare su $\mathbb{R}^n$.*

Introduzione alla teoria delle E.D.P., a.a. 2002/03 - Testi

PRIMO APPELLO, 16 GIUGNO 2003

1. Sia B la palla in $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, di centro 0 e raggio 1, e preso $a > 0$, sia $f_a(x) := |x|^{-a}$ per ogni $x \neq 0$.
   a) Determinare per quali a e p la funzione f_a appartiene a $L^p(B)$.
   b) Determinare per quali a e p la funzione f_a appartiene a $W^{1,p}(B \setminus \{0\})$.
   c) Dimostrare che se f_a appartiene a $W^{1,p}(B \setminus \{0\})$ allora appartiene anche a $W^{1,p}(B)$.
   d) Dimostrare in generale che $W^{1,p}(B \setminus \{0\}) = W^{1,p}(B)$ per ogni $p \in [1, \infty]$.

2. Sia I un intervallo aperto limitato di $\mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathscr{D}'(I)$ ed $f \in C^\infty(I)$.
   a) Definire la distribuzione prodotto $f \cdot \Lambda$.
   b) Dimostrare che $D(f \cdot \Lambda) = (Df) \cdot \Lambda + f \cdot (D\Lambda)$.
   c) Dimostrare che date $u, v \in W^{1,p}(I)$ allora $uv \in W^{1,p}(I)$ e $D(uv) = v\,Du + u\,Dv$.

3. Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, e sia $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.
   a) Caratterizzare (in termini di equazioni differenziali e condizioni al bordo) le funzioni u di classe $C^2(\overline{\Omega})$ che minimizzano
$$F(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |u - g|^2 \ .$$
   b) Dimostrare che questo problema di minimo è ben posto ed ammette soluzione in $W^{1,2}(\Omega)$.
   c) Discutere cosa succede se l'integrale $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |u - g|^2$ viene sostituito con $\displaystyle\int_\Omega ug$.

4. a) Sia $Q = (0, \pi) \times (0, \pi)$. Trovare una base ortonormale di $L^2(Q)$ (dotato del solito prodotto scalare, eventualmente rinormalizzato in modo comodo) fatta di autovettori di $-\Delta$ con condizioni di Dirichlet (cioè funzioni nulle sul bordo di Q).
   b) Risolvere esplicitamente il seguente problema ai dati iniziali:
$$\begin{cases} u_t = \Delta u + 2u & \text{su } (0, +\infty) \times Q, \\ u(0, x) = 4 \sin(3x_1) \sin(2x_2) & \text{su } Q, \\ u = 0 & \text{su } (0, +\infty) \times \partial Q. \end{cases}$$

PRIMO APPELLO (BIS), 18 GIUGNO 2003

1. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione radiale, ovvero della forma $u(x) = v(|x|)$.
a) Scrivere il laplaciano di u in termini di v;
b) determinare le soluzioni radiali di $\Delta^2 u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ per $n \geq 5$;
c) determinare una soluzione fondamentale del bi-laplaciano Δ^2 su $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 5$.

2. Sia I un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, k un intero positivo, e x_0 un punto di I. Dimostrare che:
a) ogni Λ nel duale di $C^k(I)$ si rappresenta come
$$\langle \Lambda, \varphi \rangle = \int_I D^k \varphi \, d\mu_k + \sum_{h=0}^{k-1} a_h D^h \varphi(x_0) \quad \text{per ogni } \varphi \in C^k(I),$$
con μ_k misura reale finita su I, $a_0, \ldots, a_{k-1}$ numeri reali.
b) se $\Lambda \in (C^k(I))^*$ ha supporto contenuto in $\{x_0\}$, allora esistono $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tali che $\langle \Lambda, \varphi \rangle = \sum_0^k a_h D^h \varphi(x_0)$ per ogni $\varphi \in C^k(I)$.
c) Se Λ è una distribuzione su $\mathbb{R}$ con supporto contenuto in $\{x_0\}$ allora Λ si rappresenta come in b) per qualche k intero positivo.

3. Dato $I = [a_1, a_2]$ un intervallo di $\mathbb{R}$, e siano fissati $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, e $g \in C^\infty(I)$.
a) Caratterizzare (in termini di equazioni differenziali e condizioni al bordo) le funzioni u di classe $C^4(I)$ che minimizzano
$$F(u) := \int_I |u''|^2 + |u - g|^2$$
con la condizione al bordo $u(a_i) = b_i$ per $i = 1, 2$.
b) Dimostrare che questo problema di minimo è ben posto ed ammette soluzione in $W^{2,2}(I)$.
c) Dimostrare che questa soluzione è unica ed appartiene a $C^\infty(I)$.

4. Sia $I = (0, \pi/2)$, ed X lo spazio delle funzioni u in $W^{1,2}(I)$ tali che $u(0) = 0$. Si consideri su X la forma quadratica $f(u) := \int_I |Du|^2$.
a) Dimostrare che f è coerciva su X e scrivere la forma bilineare B associata ad f.
b) Per quali u è possibile trovare un operatore lineare T a valori in L^2 tale che $B(u, v) = \int_I (Tu)v$ per ogni $v \in X$?
c) Trovare tutti gli autovalori di T ed estrarne una base ortonormale di $L^2(I)$.
d) Usare questa base per risolvere esplicitamente il problema
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } (0, +\infty) \times I, \\ u(0, x) = 2 \sin x - \sin(3x) & \text{per } x \in I, \\ u(t, 0) = 0 & \text{per } t \in (0, +\infty), \\ u_x(y, \pi/2) = 0 & \text{per } t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

SECONDO APPELLO, 14 LUGLIO 2003

1. Dato a reale positivo, sia
$$u_a(x) := \begin{cases} e^{-x/a} & \text{per } x \geq 0, \\ 0 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$
a) dire in che spazio ed in che topologia esiste il limite delle funzioni u_a/a per $a \to 0$;
b) calcolare la trasformata di Fourier $\hat{u}_a$;
c) dire in che spazio ed in che topologia esiste il limite delle funzioni $\hat{u}_a/a$ per $a \to 0$.

2. a) Usando la trasformata di Fourier, far vedere che esiste una costante C, che dipende solo da n, tale che
$$\|D^2u\|_2 \leq C\|\Delta u\|_2 \quad \text{per ogni } u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$
dove si intende $\|D^2u\|_2 = +\infty$ se $D^2u \notin L^2(\mathbb{R}^n)$ etc. etc.
b) Sia f una funzione in $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ ed u una funzione in $L^2(\mathbb{R}^n)$ che risolve
$$\Delta u = f \quad \text{su } \mathbb{R}^n$$
nel senso delle distribuzioni. Cosa si può dire sulla regolarità di u?
c) Sia $u(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2$. Far vedere che u è una distribuzione temperata, e calcolare la trasformata di Fourier sua e di tutte le sue derivate seconde.
d) Osservare che la funzione u al punto c) non soddisfa la (1). Spiegare perché la dimostrazione del punto a) non si applica a questo caso.

3. Sia $\Omega = (a, b)$ un'intervallo in $\mathbb{R}$, e sia E lo spazio di Banach delle funzioni in $C^1(\Omega)$ infinitesime al bordo con derivata infinitesima al bordo, dotato della norma C^1.
a) Dimostrare che per ogni $\Lambda \in E^*$ esiste μ misura reale finita su Ω tale che
$$\langle \Lambda, u \rangle = \int_\Omega \dot{u}\, d\mu \quad \text{per ogni } u \in E; \tag{2}$$
b) esiste una ed una sola μ che soddisfa (2) e $\mu(\Omega) = 0$;
c) discutere l'estensione dei punti a) e b) al caso in cui Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.
d) discutere l'estensione dei punti a) e b) al caso in cui $\Omega = \mathbb{R}$;

4. Dato Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, si consideri il problema con condizioni al bordo
$$\begin{cases} \operatorname{div}(|Du|^2\, Du) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$
a) Far vedere che questo problema è *variazionale*, ovvero corrisponde alla minimizzazione di un opportuno funzionale con condizioni di Dirichlet al bordo.
b) In quale spazio è possibile trovare una soluzione di questo problema di minimo?
c) In che senso la soluzione del problema di minimo risolve anche la (3)?
d) Discutere l'unicità della soluzione di (3).

SECONDO APPELLO (BIS), 22 LUGLIO 2003

1. Sia $u(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$:
   a) calcolare (con il metodo dei residui) la trasformata di Fourier $\hat{u}$;
   b) dimostrare che le soluzioni distribuzionali di $v - D^2 v = 0$ coincidono con quelle classiche;
   c) dimostrare che $v(x) := e^{-|x|}$ risolve $v - D^2 v = 2\delta_0$ nel senso delle distribuzioni;
   d) dimostrare che $\hat{u}$ verifica $\hat{u} - D^2 \hat{u} = \sqrt{2\pi}\,\delta_0$ ed usare questo fatto per calcolare $\hat{u}$.

2. Sia $I = (a, b)$ un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, e sia u la rappresentante continua di una funzione in $W^{1,1}(I)$. Far vedere che vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_a^b u \cdot D\varphi = \Big| u \cdot \varphi \Big|_a^b - \int_a^b Du \cdot \varphi \quad \text{per ogni } \varphi \in C^1(\mathbb{R}). \tag{1}$$

   Dimostrare quindi che i seguenti fatti sono equivalenti:
   (i) u ha traccia nulla sul bordo di I, ovvero, $u(a) = u(b) = 0$;
   (ii) estendendo la funzione u a 0 nel complementare di I si ottiene una funzione in $W^{1,1}(\mathbb{R})$;
   (iii) u appartiene alla chiusura in $W^{1,1}(I)$ di $\mathscr{D}(I)$.

3. a) Dimostrare che per ogni $a > 1/2$ esiste una costante C_a tale che

$$\|u\|_1 \leq C_a \big\| (1 + |x|^a)\, u \big\|_2 \quad \text{per ogni } u \in L^1(\mathbb{R}). \tag{2}$$

   b) Dimostrare che la rappresentante continua di una funzione in $W^{1,2}(\mathbb{R})$ ha limite 0 a $\pm\infty$ (suggerimento: usare la trasformata di Fourier e la stima (2)).

4. a) Far vedere che non esiste alcun C finito tale che $\|u\|_2 \leq C\|Du\|_2$ per ogni $u \in C^1_c(\mathbb{R})$.
   b) Far vedere che il funzionale $\int_{\mathbb{R}} |Du|^2$ non ammette minimo sull'insieme X delle funzioni $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ tali che $\|u\|_2 = 1$.
   c) Si consideri la forma quadratica $f(u) := \int_{\mathbb{R}} |Du|^2 + |u|^2$ definita per $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Scrivere la forma bilineare e l'operatore autoaggiunto associato ad f.
   d) È possibile trovare una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ fatta di autovettori di questo operatore?

TERZO APPELLO, 26 SETTEMBRE 2003

1. Dato a reale positivo, si consideri la funzione

$$f_a(x) := \begin{cases} ae^{ax} & \text{per } x \leq 0, \\ 0 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

a) dire in quale spazio funzionale ed in che topologia esiste il limite di f_a per $a \to +\infty$;
b) calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}_a$;
c) dire in che spazio ed in che topologia esiste il limite delle funzioni $\hat{f}_a$ per $a \to +\infty$.

2. Dato Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, p numero reale tale che $0 \leq p < +\infty$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione regolare, si consideri il problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|Du|^p\, Du) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

a) Far vedere che questo problema è *variazionale*, ovvero che $\operatorname{div}(|Du|^p\, Du) = f$ è l'equazione di Eulero-Lagrange di un opportuno funzionale $F(u)$.
b) Data $f \in L^\infty(\Omega)$, dire in quale spazio di Sobolev esiste una soluzione del problema di minimo

$$\min\left\{F(u) :\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\right\} . \tag{2}$$

c) In che senso la soluzione di (2) risolve anche (1)?
d) Discutere cosa succede per $f \in L^q(\Omega)$, al variare di $q \in [1, +\infty]$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e tale che $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che i limiti

$$a^- := \lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad a^+ := \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

esistono e sono finiti, ed usarli per calcolare la derivata distribuzionale di f su tutto $\mathbb{R}$.

4. Posto $I = (0, \pi)$, e sia X il sottospazio delle funzioni u in $W^{2,2}(I)$ tali che $u(0) = u(\pi) = 0$. Si consideri su X_1 la forma quadratica

$$f(u) := \int_0^\pi |u''|^2 + |u|^2 .$$

a) Dimostrare che f è coerciva su X e scrivere la forma bilineare B associata ad f;
b) per quali $u \in X$ è possibile trovare un operatore lineare T a valori in $L^2(I)$ tale che $B(u, v) = \int_I (Tu)\, v$ per ogni $v \in X$?
c) trovare una base ortonormale di $L^2(I)$ fatta di autovalori di T.

Introduzione alla teoria delle E.D.P., a.a. 2002/03 - Soluzioni

PRIMO APPELLO, 16 GIUGNO 2003

1. a) Un facile conto mostra che f_a appartiene ad L^p se e solo se $a < n/p$.
   b) Siccome f_a è di classe C^1 al di fuori dell'origine, la sua derivata distribuzionale su $B \setminus \{0\}$ coincide con quella puntuale, ed essendo $|Df_a(x)| \sim |x|^{-(a+1)}$, essa appartiene a L^p se e solo se $a < n/p - 1$.
   c) Un modo semplice è il seguente: dato $m > 0$, sia $\phi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 tale che (i) $\phi_m(t) = t$ per $-m \leq t \leq m$, (ii) $\phi_m(t)$ è costante per $t < -m$ e $t > m$, (iii) $|\phi'_m(t)| \leq 1$ ovunque. Si vede facilmente che le funzioni $\phi_m(f_a)$ convergono ad f_a in L^p per $m \to +\infty$. Inoltre, usando la formula
   $$D(\phi_m(f_a)) = \phi'_m(f_a)\, Df_a \tag{1}$$
   si vede che le funzioni $\phi_m(f_a)$ sono equilimitate in $W^{1,p}$, e dunque, a meno di sottosuccessioni, convergono ad una qualche f nella topologia debole di $W^{1,p}$. Per l'immersione compatta, la convergenza è forte in L^p, e questo basta a verificare che f deve essere f_a, che dunque appartiene a $W^{1,p}$.
   d) Esercizio delicato. Data $u \in W^{1,p}(B \setminus \{0\})$, sappiamo dalla definizione di derivata distribuzionale che
   $$\int_B u \operatorname{div}\varphi = -\int_B Du \cdot \varphi \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(B \setminus \{0\}). \tag{2}$$
   Vogliamo ora dimostrare che l'uguaglianza (2) si estende ad ogni funzioni test $\varphi \in \mathscr{D}(B)$. Prendiamo dunque una successione di funzioni regolari $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ che valgono 1 fuori dalla palla $B(0,\varepsilon)$ e valgono 0 nella palla $B(0,\varepsilon/2)$. Applicando la (2) alla funzione test $\sigma_\varepsilon\varphi$ otteniamo
   $$\int_B u\,\sigma_\varepsilon \operatorname{div}\varphi + \int_B u\,(D\sigma_\varepsilon \cdot \varphi) = -\int_B \sigma_\varepsilon(Du \cdot \varphi)\ . \tag{3}$$
   Passiamo ora al limite in (3) per $\varepsilon \to 0$. Si vede subito che il primo integrale nel termine di sinistra converge (per Lebesgue) all'integrale di $u \operatorname{div}\varphi$, mentre l'integrale a destra converge all'integrale di $Du \cdot \varphi$. Inoltre, *se u è limitata*, l'integrale che rimane può essere maggiorato in modulo da $\|u\|_\infty \|\varphi\|_\infty \|D\sigma_\varepsilon\|_1$. Siccome $D\sigma_\varepsilon$ è supportata in $B(0,\varepsilon)$, se scegliamo σ_ε in modo tale che $D\sigma_\varepsilon = O(1/\varepsilon)$ (cosa possibile!), otteniamo subito che $\|D\sigma_\varepsilon\|_1 = O(\varepsilon^{n-1})$, e dunque l'integrale in questione tende a 0 per $\varepsilon \to 0$, ed abbiamo quindi ottenuto la (2) anche per $\phi \in \mathscr{D}(B)$.
   Nel caso che u non sia limitata, basta approssimare u con le funzioni limitate $\phi_m(u)$, dove ϕ_m è data al punto precedente. Nel far questo, avremo bisogno della formula per la derivata della funzione composta (1) anche per u in $W^{1,p}$ (la si dimostra per approssimazione).

2. a) Si pone ovviamente
   $$\langle f \cdot \Lambda, \varphi \rangle := \langle \Lambda, f\varphi \rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}). \tag{4}$$
   b) Immediato a partire dalla (4).
   c) Segue dal punto b) e dal fatto che u e v sono in L^∞, (e dunque la distribuzione $v\,Du + u\,Dv$ appartiene ad L^p).

3. a) Procedendo come al solito, per ogni funzione $v \in C^2(\overline{\Omega})$ si ottiene
   $$0 = \frac{d}{dt} F(u + tv)\Big|_{t=0} = -\int_\Omega v\,\Delta u + \int_{\partial\Omega} v\,D_\eta u + \int_{\partial\Omega} v(u - g)\ , \tag{5}$$
   dove η è la normale esterna a $\partial\Omega$. Considerando solo le v con traccia nulla su $\partial\Omega$, la (5) implica $\Delta u = 0$, e considerando poi tutte le v otteniamo anche $D_\eta u + u = g$ su $\partial\Omega$. In breve,

la minimalità di u implica, ed è anzi equivalente per via dalla convessità del funzionale F, al soddisfare il problema con condizione mista al bordo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ D_\eta u + u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

b) Il funzionale F è ben definito in $W^{1,2}$ a patto di intendere la restrizione di u su $\partial\Omega$ nel senso della traccia Tu. Inoltre, essendo l'operatore di traccia $T : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ continuo, F è un funzionale continuo nella topologia forte di $W^{1,2}$, e quindi semicontinuo inferiore nella topologia debole per via della convessità. Infine, usando il fatto che $\|Tu\|_2 + \|Du\|_2$ è una norma equivalente alla norma standard di $W^{1,2}$, è facile vedere che F è coercivo. Quindi F ammette minimo in $W^{1,2}(\Omega)$, ed il minimo soddisfa la (6) nell'opportuno senso distribuzionale.
c) In questo caso, il problema (6) diviene

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ D_\eta u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Tuttavia, il funzionale F non è *mai* coercivo su $W^{1,2}(\Omega)$. Più precisamente, indicando con c la funzione costante, $F(c) = c\int_{\partial\Omega} g$, e quindi, se $\int_{\partial\Omega} g$ non è zero, ne segue che l'estremo inferiore dei valori di F è $-\infty$, ed il funzionale non ammette minimo. Nel caso che invece si abbia

$$\int_\partial \Omega g = 0 \ , \tag{8}$$

si vede che F è invariante per l'aggiunta di costanti. Dunque minimizzare F su $W^{1,2}$ è uguale a minimizzarlo sul sottospazio X delle funzioni in $W^{1,2}$ a media nulla. Su X, tuttavia, $\|Du\|_2$ è una norma equivalente alla norma standard, e dunque F è coercivo, ed ammette sicuramente minimo. In altre parole, il problema (6′) è risolubile se e solo se è verificata la condizione di compatibilità (8).

4. a) Già sappiamo che $\{\sin(nx) : \ n = 1, 2, \dots\}$ è una base ortonormale di $L^2(0, \pi)$ (modulo un'opportuna rinormalizzazione del prodotto scalare) e quindi

$$\{\sin(n_1x_1)\sin(n_2x_2) : \ n_1, n_2 = 1, 2, \dots\}$$

è una base ortonormale di $L^2(Q)$, e si verifica facilmente che le funzioni $e_n(x) := \sin(n_1x_1)\sin(n_2x_2)$ sono autovettori del laplaciano con condizioni di Dirichlet al bordo, e più precisamente

$$-\Delta e_n(x) = -\Delta\big(\sin(n_1x_1)\ \sin(n_2x_2)\big) = (n_1^2 + n_2^2)\ \sin(n_1x_1)\ \sin(n_2x_2) = |n|^2\, e_n(x) \ .$$

b) A questo punto si procede in modo standard: scrivendo la soluzione u del problema come $u(t, x) = \sum a_n(t)e_n(x)$, con $n = (n_1, n_2)$ in $\{1, 2, \dots\}^2$, si vede che i coefficienti $a_n(t)$ devono soddisfare l'equazione differenziale

$$\dot a_n(t) = (-|n|^2 + 2)a_n$$

con dato iniziale $a_n(0)$ uguale a 0 se $n \neq (3, 2)$, ed uguale a 4 se $n = (3, 2)$. Nel primo caso la soluzione deve essere nulla, mentre nel secondo è $4e^{-11t}$. Quindi

$$u(x, t) = 4e^{-11t}\sin(3x_1)\sin(2x_2) \ .$$

1. a) Posto $\rho := |x|$, un facile calcolo dà

$$\Delta u = \ddot{v} + \frac{n-1}{\rho}\dot{v} \ , \tag{1}$$

dove il termine di sinistra è calcolato in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e quello di destra in $\rho \in (0, \infty)$.
b) Risolvendo dunque l'equazione lineare del primo ordine in $\dot{v}$

$$\ddot{v} + \frac{n-1}{\rho}\dot{v} = 0$$

otteniamo $v = a_1 + a_2\rho^{2-n}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Risolvendo quindi

$$\ddot{v} + \frac{n-1}{\rho}\dot{v} = a_1 + a_2\rho^{2-n}$$

otteniamo infine $v = a_1 + a_2\rho^2 + a_3\rho^{2-n} + a_4\rho^{4-n}$ con $a_i \in \mathbb{R}$. In altre parole, le soluzioni radiali di $\Delta^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono tutte (e sole) le combinazione lineari di 1, ρ^2, ρ^{2-n}, ρ^{4-n}.
c) Difficile: si tratta di stabilire quali delle soluzioni trovate al punto b) soddisfano $\Delta^2 u = \delta_0$ nel senso delle distribuzioni su $\mathbb{R}^n$. Cerchiamo di calcolare esplicitamente il laplaciano della distribuzione Λ_a associata alla funzione $\rho^a = |x|^a$, con $a \in \mathbb{R}$. Osserviamo innanzitutto che Λ_a è ben definita come distribuzione se (e solo se) ρ^a è integrabile su ogni limitato di $\mathbb{R}^n$, ovvero se e solo se

$$a > -n \ .$$

A questo punto si ottiene

$$\langle \Delta\Lambda_a, \varphi \rangle = \langle \Lambda_a, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \rho^a \cdot \Delta\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\rho \geq \varepsilon} \rho^a \cdot \Delta\varphi \tag{2}$$

Siccome la funzione ρ^a è sempre di classe C^∞ sul dominio $D_\varepsilon := \{\rho \geq \varepsilon\}$, possiamo applicare il teorema della divergenza (per due volte), ed indicando con η la normale esterna alla sfera $\partial D_\varepsilon = \{\rho = \varepsilon\}$ otteniamo

$$\int_{\rho \geq \varepsilon} \rho^a \cdot \Delta\varphi = \int_{\rho \geq \varepsilon} \Delta(\rho^a) \cdot \varphi - \varepsilon^a \int_{\rho = \varepsilon} \partial_\eta \varphi - a\varepsilon^{a-1} \int_{\rho = \varepsilon} \varphi \ . \tag{3}$$

Supponiamo ora che il laplaciano *puntuale* $\Delta(\rho^a)$ sia una funzione integrabile sui limitati, e che

$$a > 2 - n \ .$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ in (3), il secondo ed il terzo integrale tendono a 0 (perché la misura della sfera $\{\rho = \varepsilon\}$ è di ordine ε^{n-1}, e dunque, ricordando la (2)

$$\langle \Delta\Lambda_a, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(\rho^a) \cdot \varphi \ ,$$

in altre parole, il laplaciano distribuzionale di $\Lambda_a = \rho^a$ coincide con quello puntuale. Se si assume invece che

$$a = 2 - n \ ,$$

l'ultimo integrale nel termine destro di (3) converge a $\varphi(0)$ diviso c_n, la misura della sfera unitaria di dimensione $n-1$, e dunque

$$\langle \Delta\Lambda_a, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(\rho^a)\cdot\varphi + \frac{\varphi(0)}{c_n} \ ,$$

in altre parole, il laplaciano distribuzionale di $\Lambda_a = \rho^a$ coincide con quello puntuale *più* la delta di Dirac $c_n^{-1}\delta_0$. Utilizzando quanto fatto finora si vede che

$$\Delta^2\Lambda_0 = \Delta^2\Lambda_2 = \Delta^2\Lambda_{2-n} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta^2\Lambda_{4-n} = \frac{1}{c_n}\delta_0 \ .$$

2. a) Si consideri l'operatore $T : C^k(I) \to \mathbb{R}^k \oplus C^0(I)$ definito da

$$T : u \mapsto \big(u(x_0), Du(x_0), \dots, D^{k-1}u(x_0), D^k u\big) \ .$$

Si vede facilmente che T è un operatore bigettivo e continuo, e quindi, per il teorema della mappa aperta, anche T^{-1} è continuo. Dato dunque un funzionale Λ nel duale di $C^k(I)$, si ha che ΛT^{-1} appartiene al duale di $\mathbb{R}^k \oplus C^0(I)$, che non è altro che $\mathbb{R}^k \oplus \mathscr{M}(I)$. Più precisamente, esiste $a = (a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ e μ misura reale su I che rappresentano Λ come richiesto.
b) Basta applicare il fatto che le uniche misure reali con supporto nel punto x_0 sono i multipli della delta di Dirac δ_{x_0}.
c) Basta applicare il fatto che ogni distribuzione a supporto compatto si estende ad un funzionale continuo su C^k per k opportuno.

3. a) Procedendo al solito modo si vede subito che u minimizza $F(u)$ con le condizioni al bordo $u(a_i) = b_i$ se e solo se risolve

$$\begin{cases} D^4u + u = g & \text{in } (a_1, a_2), \\ u(a_i) = b_i & \text{per } i = 1, 2, \\ D^2u(a_i) = 0 & \text{per } i = 1, 2. \end{cases}$$

b) Si vede facilmente che F è debolmente semicontinuo inferiormente e convesso su $W^{2,2}(I)$. La coercività segue dal fatto che

$$F(u) \geq \|D^2u\|_2^2 + (\|u\|_2 - \|g\|_2)^2$$

e $\|u\|_2 + \|D^2u\|_2$ è una norma equivalente alla norma standard di $W^{2,2}(I)$. Infine, per ottenere l'esistenza del minimo, basta osservare che l'insieme X delle funzioni u che soddisfano $u(a_i) = b_i$ è chiuso in $W^{2,2}$, ed essendo convesso è anche debolmente chiuso.
c) Siccome il minimo di F su X deve comunque soddisfare l'equazione $D^4u + u = g$ nel senso delle distribuzioni, e la tesi segue per boot-strap.

4. a) La coercività di f su X segue dal fatto che $\|Du\|_2 + |u(0)|$ è una norma equivalente a quella standard di $W^{1,2}$, e coincide con $\sqrt{f}$ su X (che è un sottospazio chiuso di $W^{1,2}$). La forma bilineare associata ad f è chiaramente

$$B(u, v) := \int_0^{\pi/2} Du\cdot Dv \ .$$

b) Integrando per parti si vede subito che per ogni $u \in X$ e $v \in \mathscr{D}(0, \pi/2)$

$$B(u, v) = \langle -D^2u, v\rangle$$

e quindi T deve necessariamente coincidere con $-D^2u$, e richiede quindi che u appartenga a $W^{2,2}$. In tal caso si ha inoltre che per ogni v in X vale

$$B(u,v) = \int_0^{\pi/2} (-D^2u) \cdot v + Du(\pi/2) \cdot v(\pi/2)$$

(la formula è ovviamente vera per u e v regolari, e si estende poi per approssimazione), e ne consegue che T è definito solo per le $u \in W^{2,2}$ tali che $u(0) = 0$ e $Du(\pi/2) = 0$ (ed in tal caso coincide con $-D^2u$).
c) Gli autovettori di T sono le soluzioni non banali di

$$\begin{cases} D^2u + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 \\ Du(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

in $W^{2,2}$. Queste coincidono chiaramente con quelle classiche, ed un conto veloce mostra che esistono solo per $\lambda = 1, 9, 25, \dots$, e corrispondono ai multipli di $\sin x$, $\sin(3x)$, $\sin(5x), \dots$ Pertanto, una base ortonormale di autovettori è data da proprio dalle funzioni $\sin(nx)$ con n intero positivo dispari (eventualmente rinormalizzate per un fattore $2/\sqrt{\pi}$).
d) La soluzione del problema si trova in modo solito per separazione delle variabili:

$$u(t,x) = 2e^{-t} \sin x - e^{-9t} \sin(3x) \ .$$

In effetti si tratta dell'unica soluzione.

Commenti

- Esercizio 1b). Una soluzione alternative è la seguente: iterando la formula (1) si ottiene

$$\Delta^2 u = D^4 v + \frac{2(n-1)}{\rho} D^3 v + \frac{(n-1)(n-3)}{\rho^2} D^2 v - \frac{(n-1)(n-3)}{\rho^3} Dv \ .$$

Ponendo il termine di destra uguale a 0 si ottiene un'equazione lineare di ordine 4 in v. Cercando soluzioni della forma $v = \rho^\lambda$, otteniamo che λ deve soddisfare l'equazione di quarto grado

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) + 2(n-1)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \\ &\qquad + (n-1)(n-3)\lambda(\lambda-1) - (n-1)(n-3)\lambda = 0 \ . \end{aligned}$$

Raccogliendo insieme gli ultimi due termini e mettendo in evidenza $\lambda(\lambda-2)$ abbiamo

$$\lambda(\lambda-2)\big[\lambda^2 + 2(n-3)\lambda + n^2 - 6n + 8\big] = 0$$

che ha soluzioni $\lambda = 0$, 2, $2-n$, $4-n$. Dunque, per $n \neq 1, \dots, 4$ si ottiene che le soluzione radiali di $\Delta^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono tutte (e sole) le combinazione lineari di 1, ρ^2, ρ^{2-n}, ρ^{4-n}.

- Un modo facile per vedere che $\|u\|_2 + \|D^2u\|_2$ è una norma equivalente a quella standard di $W^{2,2}$ è il seguente: supponendo per assordo che non lo sia, si costruisce facilmente una successione (u_n) tale che $\|u_n\|_2 + \|D^2u_n\|_2$ converge a 0 mentre $\|Du_n\|_2 = 1$ per ogni n. Ma allora u_n e D^2u_n convergono a 0 in L^2, mentre Du_n converge debole ad una qualche v. Siccome v deve essere la derivata del limite delle u_n, per forza di cose $v = 0$. Inoltre l'immersione compatta di $W^{1,2}$ in L^2 implica che Du_n deve convergere forte a v, e siccome $v = 0$, questo contraddice l'ipotesi $\|Du_n\|_2 = 1$.

1. a) Siccome $u_a(x) = u_1(x/a)$ ed u_1 appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ ed ha integrale 1, è un fatto ben noto che le funzioni u_a/a convergono nel senso debole* delle misure su $\mathbb{R}$ alla delta δ_0. Volendolo verificare:
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u_a(x)}{a}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u_1(x/a)}{a}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u_1(y)\,\varphi(ay)\,dy \to \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} u_1(y)\,dy = \varphi(0)\ .$$
b) Siccome u_1 appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier è la funzione $\hat{u}_1$ in $C_0(\mathbb{R})$ data da
$$\hat{u}_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(1+iy)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iy)}$$
e quindi
$$\hat{u}_a(y) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}(1+iay)}\ .$$
c) Le funzioni $\hat{u}_a/a$ convergono localmente uniformemente e nella topologia debole* di $L^\infty(\mathbb{R})$ alla funzione $1/\sqrt{2\pi}$ (che è la trasformata di Fourier della delta δ_0).

2. a) Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, allora la trasformata di Fourier $\mathscr{F}u = \hat{u}$ appartiene pure a $L^2(\mathbb{R}^n)$ e
$$\mathscr{F}(D_hD_ku) = -y_hy_k\,\hat{u} \quad \text{per ogni } h,k = 1,\dots,n, \tag{4}$$
ed in particolare $\mathscr{F}(\Delta u) = -|y|^2\,\hat{u}$. Ricordando che la trasformata di Fourier è un'isometria di L^2 otteniamo allora
$$\begin{aligned}\big\|D_hD_ku\big\|_2^2 = \big\|-y_hy_k\,\hat{u}\big\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |y_h|^2|y_k|^2|\hat{u}|^2\,dy\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |y|^4|\hat{u}|^2\,dy = \big\|-|y|^2\,\hat{u}\big\|_2^2 = \big\|\Delta u\big\|_2^2\end{aligned} \tag{5}$$
per ogni coppia di indici h,k, e questo dimostra la tesi.
b) Segue immediatamente dal punto a) per induzione su k.
c) u ha crescita polinomiale all'infinito, e dunque l'azione di u sulle funzioni di Schwarz è ben definita per integrazione. Inoltre, vedendo u come il polinomio $x_1^2 - x_2^2$ moltiplicato per la funzione 1, e ricordando che la trasformata di Fourier di quest'ultima è la delta di Dirac δ_0 otteniamo
$$\hat{u} = \mathscr{F}\big[((-ix_2)^2 - (-ix_1)^2)\cdot 1\big] = \big(D_2^2 - D_1^2\big)\delta_0$$
ed anche
$$\begin{aligned}\mathscr{F}(D_1D_2u) &= \mathscr{F}(0) = 0\\ \mathscr{F}(D_1^2u) &= \mathscr{F}(1) = \delta_0\\ \mathscr{F}(D_2^2u) &= \mathscr{F}(-1) = -\delta_0\ .\end{aligned}$$
d) La funzione u è armonica (cioè $\Delta u = 0$) ma non affine, quindi le derivate seconde non sono tutte nulle e la (1) non vale. La dimostrazione fatta al punto a) non funziona in questo caso perché la trasformata $\hat{u}$ è una distribuzione che non è rappresentata da una funzione, e dunque l'identità (4) vale, ma solo nel senso delle distribuzioni. In particolare, anche se sappiamo che Δu sta in L^2, e che quindi la distribuzione $-|y|^2\hat{u}$ è una funzione, non possiamo dire lo stesso per le trasformate delle derivate seconde, e quindi la (5) non ha senso.

3. a) Sia $T : E \to C_0(\Omega)$ l'applicazione lineare $T : u \mapsto \dot{u}$, e sia F la sua immagine. Siccome T è iniettiva, $\Lambda' := \Lambda T^{-1}$ definisce un funzionale lineare su F. Siccome inoltre
$$\|\dot{u}\|_\infty \le \|u\|_E = \|u\|_\infty + \|\dot{u}\|_\infty \le (1 + \operatorname{diam}(\Omega))\,\|\dot{u}\|_\infty\ ,$$

T è anche un isomorfismo, e dunque Λ' risulta anche limitato su F. Dunque può essere esteso a tutto $C_0(\Omega)$ usando il teorema di Hahn-Banach, e la rappresentazione (2) segue dal Teorema di Riesz per il duale di $C_0(\Omega)$.
b) Siccome $\dot{u}$ ha media nulla, il valore dell'integrale in (2) non cambia se si si sostituisce μ con $\mu' := \mu + c\mathscr{L}^1$ con $c \in \mathbb{R}$. A questo punto basta prendere $c := -\mu(\Omega)/\mathscr{L}^1(\Omega)$ per avere che $\mu'(\Omega) = 0$. Inoltre, siccome F è esattamente lo spazio delle funzioni in $C_0(\Omega)$ con media nulla, F ha codimensione 1, e quindi lo spazio dei funzionali su $C_0(\Omega)$ che estendono Λ' – ovvero lo spazio delle misure reali μ che rappresentano Λ – ha dimensione 1, e la condizione $\mu(\Omega) = 0$ se ne individua una sola.
c) Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, si può procedere come nel punto a) prendendo $T : u \mapsto Du$, e si rappresentare Λ come

$$\langle \Lambda, u \rangle = \int_\Omega Du \cdot d\mu$$

con μ misura finita a valori in $\mathbb{R}^n$. Tuttavia, per $n \geq 2$, F ha codimensione infinita, e dunque lo spazio delle misure vettoriali μ che rappresentano Λ ha dimensione infinita, ed imporre la condizione $\mu(\Omega) = 0$ non è sufficiente ad individuarne una sola (in effetti, vale un discorso analogo anche se $n = 1$ ed Ω non è connesso).
d) Se $\Omega = \mathbb{R}$ la dimostrazione al punto a) non funziona, perché $\|\dot{u}\|_\infty$ non è una norma equivalente a quella di E. Ad esempio, il funzionale $\Lambda(u) := u(0)$ non si rappresenta come in (2) per nessuna misura reale finita μ: consideriamo infatti delle funzioni $u_n \in E$ che sono uguali a 1 in 0, con derivata minore di 1 in modulo, e diversa da 0 solo in $A_n := (-2n-2, 2n) \cup (2n, 2n+2)$; se esistesse μ, dovrebbe essere anche $\|\mu\|(A_n \geq 1$ per ogni n, e siccume gli insiemi A_n sono disgiunti, $|\mu|(\mathbb{R}) = +\infty$, ovvero μ non sarebbe una misura finita.

4. a) Si vede subito che $\operatorname{div}(|Du|^2 Du) = 0$ è l'equazione di Eulero-Lagrange associata al funzionale

$$F(u) := \frac{1}{4} \int_\Omega |Du|^4 \ ,$$

ed essendo questo funzionale convesso, per funzioni u di classe $C^2(\overline{\Omega})$ risolvere il problema (3) coincide con il minimizzare F con la condizione di Dirichlet $u = 0$ su $\partial\Omega$.
b) $F(u)$ è chiaramente ben definito per $u \in W^{1,4}(\Omega)$, è continuo forte e convesso, e dunque semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole. Inoltre F è coercivo sul sottospazio $W_0^{1,4}(\Omega)$ *chiuso* delle funzioni con dato al bordo nullo (dove $\|Du\|_4$ risulta essere una norma equivalente alla norma standard di $W^{1,4}$). Quindi u ammette minimo su $W_0^{1,4}(\Omega)$.
c) Ripetendo la dimostrazione solita, si vede che se u minimizza F su $W_0^{1,4}(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega (|Du|^2 Du) \cdot D\varphi = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in W_0^{1,4}(\Omega),$$

ed in particolare $\operatorname{div}(|Du|^2 Du) = 0$ nel senso delle distribuzioni (si osservi che $|Du|^2 Du$ appartiene a $L^{4/3}$, e dunque definisce effettivamente una distribuzione). Inoltre la condizione $u = 0$ su $\partial\Omega$ è soddisfatta nel senso delle tracce.
d) Per via della convessità del funzionale, ogni funzione in $W^{1,4}(\Omega)$ che soddisfi la (3) nel senso descritto al punto c) deve essere un minimo di F su $W_0^{1,4}(\Omega)$, e siccome F è *strettamente* convesso, su $W_0^{1,4}(\Omega)$, questo minimo deve essere unico.

Secondo appello (bis), 22 luglio 2003

1. a) Siccome u appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier è la funzione in $C_0(\mathbb{R})$ data dalla formula
$$\hat{u}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
Per $y \le 0$ possiamo calcolare questo integrale considerando i residui della funzione olomorfa
$$f_y(z) := \frac{e^{-iyz}}{1+z^2}$$
nel semipiano *superiore*. L'unico punto singolare è $z = i$, ed essendo
$$f_y(z) = \frac{1}{z-i}\,\frac{e^{-iyz}}{z+i} \sim \frac{1}{z-i}\,\frac{e^y}{2i} \ ,$$
il residuo, e quindi anche il valore dell'integrale, è πe^y. Un conto analogo per $y > 0$, oppure l'osservazione che $\hat{u}$ deve essere una funzione pari, portano alla formula
$$\hat{u}(y) = \sqrt{\pi/2}\, e^{-|y|} \ .$$
b) Data una soluzione distribuzione v, allora anche le regolarizzate per convoluzione sono soluzioni, e dunque v appartiene alla chiusura (sequenziale e nel senso delle distribuzioni) dello spazio delle soluzioni classiche – cioè lo span di e^{-x} ed e^x – ed essendo questo finito-dimensionale, la sua chiusura coincide con se stesso.
c) Si verifica facilmente che la distribuzione $D^2 v$ coincide con la derivata seconda puntuale di v, definita per $x \ne 0$, ovvero $-e^{-|x|}$, *più* la misura $-2\delta_0$. In altre parole
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\varphi}(x)\, e^{-|x|}\, dx = -2\varphi(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-|x|}\, dx \ . \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$
d) Essendo $(1+x^2)\, u(x) = 1$, applicando la trasformata di Fourier ad entrambe i termini otteniamo
$$(1 - D^2)\hat{u} = \sqrt{2\pi}\, \delta_0 \ .$$
In base ai punti b) e c), la soluzione generale di quest'equazione nello spazio delle distribuzioni è
$$v = a_1 e^x + a_2 e^{-x} + \sqrt{\pi/2} e^{-|x|} \quad \text{con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$
Tra queste, l'unica distribuzione temperata si ha per $a_1 = a_2 = 0$. Questa deve essere $\hat{u}$.

2. La formula (1) è ben nota quando u è di classe C^1, e la estende a tutto $W^{1,1}(I)$ per approssimazione.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $\tilde{u}$ l'estensione di u a 0 nel complementare di I. Siccome $u(a) = u(b) = 0$, la formula (1) implica che la derivata distribuzionale su $\mathbb{R}$ di $\tilde{u}$ coincide con l'estensione a 0 di Du nel complementare di I (e questa resta una funzione in $L^1(\mathbb{R})$!).
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Possiamo supporre che sia $I = (a,b) = (-1,1)$. Siano $\tilde{u}_\varepsilon$ le regolarizzate per convoluzione di $\tilde{u}$ con un nucleo ρ a supporto in $[-1,1]$. Allora le funzioni $\tilde{u}_\varepsilon$ sono C^∞, convergono in $W^{1,1}(\mathbb{R})$ a $\tilde{u}$ per $\varepsilon \to 0$, ed hanno supporto in $[-1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Quindi le funzioni $u_\varepsilon(x) := \hat{u}((1+2\varepsilon)x)$ hanno supporto strettamente contenuto in $(-1,1)$, e siccome $\|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{W^{1,1}}$ tende a 0 per $\varepsilon \to 0$ (facile verifica), abbiamo che anche le u_ε approsimano $\tilde{u}$ in $W^{1,1}(\mathbb{R})$.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Basta osservare che le funzioni in $\mathscr{D}(I)$ hanno traccia nulla sul bordo di I, e la traccia è un operatore continuo.

3. a) Per $a > 1/2$ la funzione $(1+|x|^a)^{-1}$ appartiene ad $L^2(\mathbb{R})$, e dunque

$$\int_{\mathbb{R}} |u| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^a} \cdot (1+|x|^a)u \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|^a)^2} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|x|^a)^2 |u|^2 \right)^{1/2} .$$

b) Se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$, allora $\hat{u}$ e $|y|\,\hat{u}$ appartengono a $L^2(\mathbb{R})$. Per il punto a) ne consegue che $\hat{u}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, ma allora u, essendo l'anti-trasformata di $\hat{u}$, coincide quasi ovunque con una funzione in $C_0(\mathbb{R})$.

4. a) Per ogni $m > 0$, si prenda la funzione u_m che vale 1 in $[0, m]$, 0 fuori da $(-2, m+2)$, ed ha derivata minore di 1 in modulo. Chiaramente, per m che tende a $+\infty$, si ha $\|u_m\|_2 \geq \sqrt{m} \to +\infty$, mentre $\|Du_m\| \leq 2$.
b) Per quanto visto al punto a), l''estremo inferiore dei valori di $\int_{\mathbb{R}} |Du|^2$ su X deve essere 0, e dunque il minimo, se esistesse, dovrebbe avere derivata nulla, cosa che non è possibile per alcuna funzione in X.
c) La forma bilineare è

$$B(u,v) = \int_{\mathbb{R}} Du \cdot Dv + u \cdot v \tag{7}$$

e l'operatore autoaggiunto corrispondente è $Tu := -D^2u + u$, definito per ogni $u \in W^{2,2}(\mathbb{R})$. Infatti, considerando solo le v in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ ed integrando per parti il termine di destra della (7) si ottiene subito

$$B(u,v) = \int_{\mathbb{R}} (-D^2u + u) \cdot v \tag{8}$$

e dunque Tu deve coincidere con $-D^2u + u$, ed appartiene ad L^2 se e solo se u appartiene a $W^{2,2}$. Inoltre l'identità (8) si estende a tutte le $v \in W^{1,2}$ per approssimazione (usando il fatto che la rappresentante continua di v deve avere limite 0 a $\pm\infty$).
Facendo i conti, si vede però che l'operatore T non ha autovettori non banali in $L^2(\mathbb{R})$, infatti l'equazione $D^2u + \lambda u = 0$ non ammette solo soluzioni non banali che siano infinitesime a $\pm\infty$. Il teorema spettrale non si applica perché l'immersione di $W^{1,2}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ non è compatta (ed infatti già al punto b) si vede che il problema di minimo che dovrebbe dare il primo autovettore non ha soluzione).

Commenti

- Esercizio 3b): una dimostrazione alternativa è la seguente. Sappiamo che la rappresentante continua di u soddisfa, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_x^y |Du| \leq \|Du\|_2 \cdot |x-y|^{1/2} . \tag{3}$$

Fissiamo ora $d > 0$, e prendiamo x tale che $u(x) \geq 2d$. Ponendo $\delta := (d/\|Du\|_2)^2$, dalla (3) deduciamo che

$$u(x+h) \geq d \quad \text{per ogni } h \text{ tale che } 0 \leq h \leq \delta,$$

e dunque

$$\int_x^{x+\delta} |u|^2 \geq d^2\delta = d^4/\|Du\|_2^2 .$$

Ne consegue che $u(x)$ non può essere maggiore di $2d$ frequentemente per x che tende a $+\infty$ (o a $-\infty$), altrimenti la norma L^2 di u risulterebbe infinita. Dall'arbitrarietà di d si conclude facilmente che u deve avere limite 0 a $\pm\infty$.

Terzo appello, 26 settembre 2003

1. a) Siccome $f_a(x) = af_1(ax)$ ed f_1 appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ ed ha integrale 1, è un fatto ben noto che le funzioni f_a convergono nel senso debole* delle misure su $\mathbb{R}$ alla delta di Dirac δ_0. Ed infatti, data una qualunque funzione test $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f_1(y)\,\varphi(y/a)\,dy \to \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} f_1(y)\,dy = \varphi(0)\ .$$
b) Siccome f_1 appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier è la funzione $\hat{f}_1$ in $C_0(\mathbb{R})$ data da
$$\hat{f}_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iy)x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iy)}$$
e quindi
$$\hat{f}_a(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iy/a)}\ .$$
c) Le funzioni $\hat{u}_a/a$ convergono localmente uniformemente e nella topologia debole* di $L^\infty(\mathbb{R})$ alla funzione $1/\sqrt{2\pi}$ (che è la trasformata di Fourier della delta δ_0).

2. a) Si vede subito che $\mathrm{div}(|Du|^p\,Du) = f$ è l'equazione di Eulero-Lagrange associata al funzionale
$$F(u) := \int_\Omega \frac{1}{p+2}|Du|^{p+2} + fu\ .$$
b) $F(u)$ è chiaramente ben definito per $u \in W^{1,p+2}(\Omega)$, è continuo forte e convesso, e dunque semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole. Inoltre F è coercivo sul sottospazio chiuso $W_0^{1,p+2}(\Omega)$ delle funzioni con traccia nulla su $\partial\Omega$, dove $\|Du\|_{p+2}$ risulta essere una norma equivalente alla norma standard. Quindi u ammette minimo su $W_0^{1,p+2}(\Omega)$.
c) Ripetendo la dimostrazione solita, si vede che se u minimizza F in $W_0^{1,p+2}(\Omega)$, allora $\mathrm{div}(|Du|^p\,Du) = f$ nel senso delle distribuzioni (si osservi che $|Du|^p\,Du$ appartiene a $L^{(p+2)/(p+1)}(\Omega)$, e dunque definisce una distribuzione su Ω). La condizione $u = 0$ su $\partial\Omega$ va intesa nel senso delle tracce.
d) Se $p+2 > n$, allora $W^{1,p+2}$ si immerge in L^∞, e dunque il funzionale lineare $\int_\Omega fu$ è ben definito e continuo per ogni $f \in L^1(\Omega)$. Tuttavia, per $p+2 < n$, $W^{1,p+2}$ si immerge al più in $L^{(p+2)^*}$, e dunque il funzionale lineare $\int_\Omega fu$ è ben definito solo per $q \geq \frac{n(p+2)}{(n+1)(p+1)+1}$.

3. Siccome $f(x) = -f(1) + \int_x^1 f'(t)\,dt$ per ogni $x > 0$, per il teorema di convergenza dominata otteniamo
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -f(1) + \int_0^1 f'(t)\,dt$$
(ed una formula analoga vale per il limite per $x \to 0^-$). È poi ben noto che la derivata distribuzionale Df è data dalla misura $f' \cdot \mathscr{L}^1 + (a^+ - a^-)\,\delta_0$.

4. a) La coercività di f segue dal fatto che f è una norma equivalente a quella standard di $W^{2,2}(I)$. Chiaramente $B(u,v) = \int_0^\pi \ddot{u}\ddot{v} + uv$.
b) Tramite una doppia integrazione per parti di $\int \ddot{u}\ddot{v}$ otteniamo $Tu = D^4u + u$, ovvero
$$B(u,v) = \int_0^\pi (D^4u + u)v\ .$$
Perché tutto torni, u deve appartenere allo spazio V delle funzioni $u \in W^{4,2}(I)$ tali che $u(0) = u(\pi) = 0$ e $D^3u(0) = D^3u(\pi) = 0$.
c) Una base ortonormale di $L^2(I)$ è, modulo rinormalizzazione, $\{\sin(mx) :\ m = 1, 2, \ldots\}$ e chiaramente queste funzioni sono autovettori di T ed appartengono a V.