[versione: 1 aprile 2009]

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Appunti ed esercizi per il corso di

Calcolo Differenziale e Integrazione

a.a. 2005/06

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questi appunti riguardano alcuni argomenti svolti nell'ambito dei corsi di "Calcolo Differenziale" e "Integrazione" che sono meno frequentemente trattati nei libri di testo. Pertanto queste note vanno intese come complemento e non come sostituto del libro di testo.

Sfortunatamente non mi è stato possibile scrivere gli appunti per tutti gli argomenti che avevo originariamente previsto, ed infatti alcuni capitoli risultano vuoti.

Per quanto mi sia sforzato di evitarlo, ho inevitabilmente omesso alcune delle definizioni più standard. Le dimostrazioni sono spesso solo accennate, ed i dettagli lasciati come esercizio. La maggior parte degli esercizi alla fine di ogni capitolo sono di carattere fortemente 'teorico' e vanno visti come complemento della teoria esposta in precedenza; dunque non corrispondono al tipico esercizio d'esame. L'asterisco (*) accanto alla numerazione indica quelli *presumibilmente* difficili.

Nei programmi sottostanti sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

Programma di Calcolo Differenziale

1. Successioni di punti nello spazio n-dimensionale. Convergenza delle successioni di Cauchy, Teorema di Bolzano-Weierstrass.
2. Insiemi aperti, chiusi, compatti, densi. Frontiera di un insieme. Funzioni di n variabili reali: definizione di limite e continuità, proprietà delle funzioni continue, esistenza di massimo e minimo su insiemi compatti. Funzioni a valori vettoriali (mappe).
3. Derivate parziali di una funzione di n variabili, gradiente. Differenziabilità e sviluppo di Taylor all'ordine 1. Teorema del differenziale totale. Derivate parziali seconde e matrice Hessiana, teorema di Schwartz, sviluppo di Taylor all'ordine 2. Mappe derivabili. Regole di calcolo delle derivate. *Sviluppo di Taylor all'ordine n.*
4. Massimi, minimi e punti critici. Forme quadratiche e segnatura. Condizioni necessarie e sufficienti di massimalità e minimalità locale.
5. *Dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.*
6. Integrale secondo Riemann-Peano-Jordan di una funzione limitata (integrali multipli). Calcolo degli integrali: teorema di Fubini, formula di cambio di variabile. Integrabilità delle funzioni continue. Approssimazione dell'integrale con somme finite. Misura (secondo Riemann-Peano-Jordan) di un insieme limitato. L'integrale come volume del sottografico.
7. *Topologia in spazi metrici, completezza, equivalenze delle diverse definizioni di continuità. Connessione e connessione per archi.*
8. Norma del sup e completezza dello spazio delle funzioni continue. Completezza dello spazio delle funzioni di classe C^1. Serie di funzioni (convergenza uniforme e totale) e serie di potenze. Teorema delle contrazioni.
9. Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in ipotesi generali. Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine k. Lemma di Gronwall ed applicazioni: teorema di dipendenza continua dai dati iniziali, condizioni sufficienti per l'esistenza globale.
10. Classi di equazioni differenziali risolubili esplicitamente (equazioni a variabili separabili, di Eulero, di Bernoulli, ecc.).

11. Equazioni lineari di ordine k. Struttura dello spazio delle soluzioni. Soluzione esplicita delle equazioni omogenee a coefficienti costanti. Metodo di riduzione dell'ordine. Metodo della variazione delle costanti. Teorema degli annichilatori.

Programma di Integrazione

12. Sistemi di equazioni lineari del primo ordine. Esponenziale di matrici e metodi di calcolo.
13. Lemma di Gronwall e teoremi di confronto. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali non lineari.
14. *Completezza: Teorema di Baire ed applicazioni.*
15. *Compattezza e compattezza sequenziale. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
16. Curve in forma parametrica. Curve regolari: retta tangente ed orientazione. Definizione di lunghezza e formula per il calcolo. Lavoro di un campo di vettori lungo una curva. Teorema di Gauss-Green.
17. Superfici in forma parametrica in $\mathbb{R}^3$. Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$. Piano tangente ed orientazione. Calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori. Rotore di un campo di vettori. Teorema di Stokes.
18. Teorema di invertibilità locale per mappe da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$.
19. Curve e superfici come equazioni: struttura geometrica dell'insieme delle soluzioni di un sistema di k equazioni in n incognite: il teorema della funzione implicita (teorema del Dini).
20. Spazio tangente ad un insieme in un punto. Spazio tangente ad una superficie definita tramite equazioni. Massimi e minimi di una funzione differenziabile su una superficie definita tramite equazioni: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
21. I grafici di funzioni reali come esempi di ipersuperfici. Versore normale, piano tangente ed orientazione. Formula per il calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori.
22. Teorema della divergenza.
23. Potenziale di un campo di vettori. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del potenziale. Calcolo del potenziale.
24. *Derivazione dell'equazione del calore e dell'equazione delle onde in dimensione (spaziale) uguale a uno. Derivazione dell'equazione di Laplace in dimensione tre.*
25. Serie di Fourier reale e complessa per funzioni di una variabile 2π-periodiche. Teorema di convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe C^1.
26. *Soluzione dell'equazione del calore e delle onde in dimensione uno con condizioni di periodicità al bordo tramite serie di Fourier.*

Capitolo 1. Sviluppo di Taylor per funzioni in più variabili

[versione: 18 aprile 2006]

1.1. Definizione. - Un polinomio di n variabili reali $x_1, \dots, x_n$ è una qualunque funzione della forma

$$P(x) := \sum_{(i_1,\dots,i_n)} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

dove la somma viene fatta su tutti i (multi-) indici $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$, ed i coefficienti $a_{i_1\dots i_n}$ sono nulli tranne che per un numero finito di indici. Il grado del polinomio è il massimo valore della somma $i_1 + \cdots + i_n$ per cui $a_{i_1\dots i_n} \neq 0$.

1.2. Proposizione. - *Un polinomio P è nullo come funzione, vale a dire $P(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, se e solo se tutti i coefficienti di P sono nulli.*

Dimostrazione. - Per $n = 1$ si tratta di un enunciato ben noto, e segue dal teorema di fattorizzazione (per cui un polinomio di grado d può avere al più d zeri distinti).

Il caso generale si dimostra per induzione su n.

Ci limitiamo a dimostrare il caso $n = 2$. Sia dato dunque

$$P(x, y) := \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$$

tale che $P(x, y) = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Fissato $x \in \mathbb{R}$, abbiamo allora che il polinomio della sola variabile y dato da $P_x(y) := P(x, y)$ è nullo, ovvero

$$P_x(y) = \sum_j \underbrace{\Big(\sum_i a_{ij} x^i\Big)}_{a_j(x)} y^j = 0 \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R},$$

da cui si deduce che i coefficienti $a_j(x)$ devono essere tutti nulli. Siccome questo vale per ogni x, se ne deduce che pure i coefficienti di ciascun polinomio $a_j(x)$ devono essere tutti nulli, ovvero che $a_{ij} = 0$ per ogni i e per ogni j. $\square$

1.3. Definizione. - Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to \bar{x}$ se

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(si assume che f e g siano definite in un qualche intorno di $\bar{x}$, escluso al più $\bar{x}$ stesso, e che g sia una funzione reale strettamente positiva).

Si dice che $f(x) = O(g(x))$ per $x \to \bar{x}$ se, nelle stesse ipotesi,

$$\limsup_{x \to \bar{x}} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty ,$$

ovvero se esiste un intorno U di $\bar{x}$ ed una costante C tale che $|f(x)| \leq C\, g(x)$ per ogni $x \in U$.

1.4. Proposizione. - *Se P è un polinomio di grado minore o uguale a k su $\mathbb{R}^n$ e $P(x) = o(|x|^k)$ per $x \to 0$, allora P è nullo.*

Dimostrazione. - Per $n = 1$ il fatto è noto: infatti, se P non fosse nullo si avrebbe che $P(x)$ è asintoticamente equivalente a $a_i x^i$ dove i è il più piccolo indice per cui $a_i \neq 0$, e siccome $i \leq k$, $P(x)$ e $a_i x^i$ non sono $o(|x|^k)$.

Dimostriamo il caso n qualunque. Preso $x \in \mathbb{R}^n$, si consideri il polinomio di una variabile $Q_x(t) := P(tx)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si verifica che Q_x è un polinomio di grado minore o uguale a quello di P, e quindi minore o uguale a k, e $Q(t) = o(t^k)$ per $t \to 0$. Quindi, per quanto visto poco sopra, Q deve essere nullo ed in particolare $0 = Q_x(1) = P(x)$. □

1.5. Definizione. - Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, x un punto di A e k un numero naturale. Si dice che f ammette sviluppo di Taylor all'ordine k in x se è possibile decomporre f come

$$f(x+h) = P_{x,k}(h) + R_{x,k}(h) \tag{1.1}$$

dove $P = P_{x,k}$ è un polinomio di grado minore o uguale a k ed il resto $R = R_{x,k}$ soddisfa

$$R_{x,k}(h) = o(|h|^k) \quad \text{per } h \to 0. \tag{1.2}$$

1.6. Osservazioni. - (i) Per essere precisi, alla formula (1.2) andrebbe aggiunta la condizione $R_{x,k}(0) = 0$, che a ben vedere non è implicata dalla definizione di "o" piccolo. La condizione è superflua se si suppone, com'è naturale, che f sia continua in x, perché in tal caso anche il resto $R_{x,k}$ deve essere continuo, e quindi nullo in 0.

(ii) Se tale P esiste, allora è unico. Supponendo infatti di avere due polinomi P e $\tilde{P}$ di grado minore o uguale a k tali che $f(x+h) = P(h)+o(|h|^k)$ e $f(x+h) = \tilde{P}(h)+o(|h|^k)$, prendendo la differenza di queste due espressioni si ottiene che $(P - \tilde{P})(h) = o(|h|^k)$, e quindi, per via della Proposizione 1.4, che il polinomio $P - \tilde{P}$ è nullo.

(iii) f ammette uno sviluppo di ordine 0 se e solo è continua in x.

(iv) f ammette uno sviluppo di ordine 1 se e solo è differenziabile in x.

1.7. Teorema. - *Se f è di classe C^k in A allora ammette uno sviluppo di Taylor all'ordine k in x, ed il polinomio $P_{x,k}$ è dato da*

$$P_{x,k}(h) := \sum_{i_1+\cdots+i_n \leq k} \frac{D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(x)}{i_1! \cdots i_n!} \, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \tag{1.3}$$

dove la somma viene fatta su tutte le possibili n-uple $(i_1, \dots, i_n)$ di numeri naturali tali che $i_1 + \cdots + i_n \leq k$, e il simbolo D_i^j indica la derivata parziale j-esima rispetto alla variabile i-esima (che ovviamente corrisponde ad applicare la derivata parziale D_i per j volte).

Inoltre, se f è di classe C^{k+1} allora il resto $R_{x,k}$ soddisfa

$$R_{x,k}(h) = O(|h|^{k+1}) \tag{1.4}$$

e più precisamente, per ogni h tale che il segmento $[x, x+h]$ è contenuto in A, esiste $t \in [0,1]$ tale che

$$R_{x,k}(h) = \sum_{i_1+\cdots+i_n = k+1} \frac{D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(x+th)}{i_1! \cdots i_n!} \, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \ . \tag{1.5}$$

1.8. Osservazioni. - (i) La formula (1.5) da la rappresentazione del resto secondo Lagrange.

(ii) Applicando le formule (1.3) e (1.5) per $k = 0$ si ottiene che per ogni $x \in A$ ed ogni h tale che $[x, x+h]$ è contenuto in A esiste $t \in [0,1]$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + Df(x+th) \cdot h \ . \tag{1.6}$$

Per $n = 1$ questo enunciato non è altro che il teorema di Lagrange: posto infatti $y := x + h$ e $\xi = x + th$ la (1.6) diventa

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \ .$$

Si osservi che la (1.6) non vale per funzioni a valori vettoriali, neanche di una sola variabile (Esercizio 1.9).

(iii) Per $k = 1$, il polinomio di Taylor dato in (1.3) può essere riscritto nella forma seguente:

$$P_{x,1}(h) := f(x) + Df(x) \cdot h \ ,$$

e per $k = 2$

$$P_{x,2}(h) := f(x) + Df(x) \cdot h + \frac{1}{2}\big(D^2 f(x)\, h\big) \cdot h \ .$$

(iv) Si può parlare di sviluppo di Taylor anche per una funzione vettoriale, e questo consiste semplicemente nell'applicare il Teorema 1.7 a ciascuna componente. Si osservi tuttavia che non è possibile scegliere il valore t nella formula (1.5) uguale per tutte le componenti (Esercizio 1.9).

Dimostrazione. - Dimostriamo prima la formula di Taylor all'ordine k con resto di Lagrange per funzioni C^{k+1}. Dati dunque x ed h tali che $[x, x+h] \subset A$ definiamo la funzione di una variabile $g(t) := f(x+th)$ per ogni $t \in [0,1]$. L'idea è di usare lo sviluppo di Taylor all'ordine k con resto di Lagrange della funzione g nel punto 0 per esprimere $f(x+h) = g(1)$:

$$f(x+h) = g(1) = \underbrace{\sum_{0 \le i \le k} \frac{1}{i!} D^i g(0)}_{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} g(t)}_{\text{resto di Lagrange}} \ . \tag{1.7}$$

Per procedere, abbiamo bisogno di esprimere le derivate di g in termini di quelle di f. La formula generale, che dimostreremo in seguito, è

$$D^i g(t) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} \big(D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(x+th)\big)\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \ . \tag{1.8}$$

Sostituendo la (1.8) nella (1.7), la sommatoria diventa il polinomio di Taylor in (1.3), mentre il pezzo restante diventa la formula (1.5) per il resto di Lagrange.

La formula (1.5) implica la (1.4). Infatti le derivate parziali di f, essendo continue, sono limitate in un intorno di x, ed ogni monomio della forma $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ con $i_1 + \cdots + i_n = k+1$ è $O(|h|^{k+1})$; dunque $R_{x,k}(h) = O(|h|^{k+1})$.

Supponiamo ora che la funzione f sia solo di classe C^k e dimostriamo che $R_{x,k}(h) = o(|h|^k)$. Per far ciò partiamo dalla formula di Taylor all'ordine $k-1$ con resto di Lagrange:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= P_{x,k-1}(h) + \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(x+th)}{i_1! \cdots i_n!}\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \\ &= P_{x,k}(h) + \sum_{i_1+\cdots+i_n=k} \frac{D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(x+th) - D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f(x)}{i_1! \cdots i_n!}\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \ . \end{aligned}$$

La sommatoria nell'ultima riga rappresenta dunque il resto di ordine k, e per verificare che è $o(|h|^k)$ basta osservare che ogni monomio $h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n}$ è $O(|h|^k)$ mentre il numeratore di ciascuna frazione è $o(1)$, ovvero infinitesimo per $h \to 0$, perché la derivata $D_1^{i_1} \cdots D_n^{i_n} f$ è una funzione continua. $\square$

Dimostrazione della formula (1.8). - Si dimostra facilmente per induzione su i che

$$D^i g(t) = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_i \le n} \big(D_{j_1} \dots D_{j_i} f(x+th)\big)\, h_{j_1} \dots h_{j_i} \tag{1.9}$$

dove la somma viene fatta su tutte le i-uple di indici $(j_1, \dots, j_i) \in \{1, \dots, n\}^i$. Osserviamo ora che ogni addendo $\big(D_{j_1} \dots D_{j_i} f\big)(x+th)\, h_{j_1} \dots h_{j_i}$ può essere riscritto come

$$\big(D_1^{i_1} \dots D_n^{i_n} f(x+th)\big)\, h_1^{i_1} \cdots h_n^{i_n} \tag{1.10}$$

dove i_1 è il numero di indici j_m che sono uguali a 1, i_2 è il numero di indici j_m che sono uguali a 2, e così via; in particolare $i_1 + \cdots + i_n = i$. Ora, fissati $i_1, \dots, i_n$ numeri naturali con somma i, ci chiediamo quanti sono gli addendi della somma (1.9) uguali a (1.10), cioè quante sono le i-uple $(j_1, \dots, j_i)$ tali che il numero di indici uguali a 1 è i_1, il numero di indici uguali a 2 è i_2, etc. Non è difficile verificare che tale numero è pari al numero di modi di ripartire i oggetti in n gruppi distinti contenenti i_1, i_2, …, i_n oggetti ciascuno. Questo numero è $i!/(i_1! \cdots i_n!)$ (Esercizio 1.11), e questo conclude la dimostrazione della formula (1.8).

Esercizi

1.9. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) := (\cos x, \sin x)$. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $h \neq 0$, l'identità (1.6) non vale per alcuna scelta di t. Quindi il Teorema di Lagrange non vale per funzioni vettoriali, anche di una sola variabile.

1.10. - Dato un intero $k \geq 2$, dimostrare che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} |x|^k \sin(|x|^{-k}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e soddisfa $f(h) = O(|h|^k) = o(|h|^{k-1})$, In particolare, f ammette uno sviluppo di Taylor all'ordine $k-1$ in 0 con P il polinomio nullo. Tuttavia tutte le derivate prime di f sono discontinue in 0, ed in particolare non esistono le derivate di ordine superiore.

1.11*. - Siano dati n numeri naturali $i_1, \dots, i_n$ con somma $i_1 + \cdots + i_n = i$. Dimostrare (per induzione su n) che il numero di modi di ripartire i oggetti distinti in n gruppi contenenti $i_1 \dots i_n$ oggetti ciascuno è

$$\frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} \,.$$

1.12*. - Dimostrare la seguente generalizzazione del binomio di Newton:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^i = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \,.$$

1.13*. - Dimostrare che

$$\sum_{i_1 + \cdots + i_n \leq i} \frac{i!}{i_1! \cdots i_n!} = \frac{n^{i+1} - 1}{n-1} \,.$$

Capitolo 2. Cambiamento di variabile per gli integrali multipli

[versione: ———]

Capitolo 3. Esistenza e unicità per il problema di Cauchy

[versione: 19 aprile 2006]

3.1. Definizione. - Sia $k \geq 1$ intero, sia A un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, e sia $f : A \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua. Si dice che $y : I = (a,b) \to \mathbb{R}^k$ risolve l'equazione differenziale

$$\dot{y} = f(x, y) \tag{3.1}$$

se y è di classe C^1 e per ogni $x \in I$ si ha $(x, y(x)) \in A$ e $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$. Dato $(x_0, y_0) \in A$, si dice che y risolve il problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

se y risolve la (3.1) e soddisfa la condizione $y(x_0) = y_0$. Il sistema (3.2) è noto come problema di Cauchy (o problema ai dati iniziali) per l'equazione (3.1).

Se y e $\tilde{y}$ sono soluzioni dell'equazione definite rispettivamente su I ed $\tilde{I}$, si dice che $\tilde{y}$ è un *prolungamento* (proprio) di y se $\tilde{I}$ include (strettamente) I e $\tilde{y}$ coincide con y su I, ovvero se il grafico di y è un sottoinsieme (proprio) del il grafico di $\tilde{y}$. Una soluzione y si dice non prolungabile, o *massimale*, se non ammette alcun prolungamento proprio.

3.2. Osservazioni. - (i) Per semplificare la notazione, si omette di menzionare per quanto possibile la variabile indipendente x, scrivendo quindi $\dot{y} = f(x, y)$ invece di $\dot{y}(x) = f(x, y(x))$; sempre per ragioni di semplicità si usa la lettera y per indicare sia la seconda variabile della funzione f, cioè un punto di $\mathbb{R}^k$, sia l'incognita dell'equazione differenziale, cioè una funzione di classe C^1 a valori in $\mathbb{R}^k$. Queste convenzioni, per quanto comode, possono talvolta generare confusione.

(ii) La funzione f può anche essere costante nella variabile x: ad esempio, la f corrispondente all'equazione $\dot{y} = -y^2$ è $f(x, y) = -y^2$, ed è definita sul dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si noti che in questo caso la funzione $y := 1/x$ risolve l'equazione, ma ad essere precisi si tratta di due soluzioni (massimali) distinte: una definita sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e l'altra definita in $(0, +\infty)$.

(iii) Se scriviamo y ed f come $y = (y_1, \dots, y_k)$ ed $f = (f_1, \dots, f_k)$, la (3.1) diventa

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_k) \\ \dot{y}_2 = f_2(x, y_1, \dots, y_k) \\ \quad \vdots \\ \dot{y}_k = f_k(x, y_1, \dots, y_k) \end{cases}$$

e dunque per $k > 1$ la (3.1) è più propriamente un *sistema* di equazioni differenziali.

(iv) Se y è una soluzione definita su I dell'equazione (3.1), e ne prendiamo la restrizione ad un sottointervallo proprio di I, otteniamo allora una funzione, a rigor di termini diversa da y, che pure risolve l'equazione (3.1) e di cui y costituisce un prolungamento. Ma è chiaro che questa nuova soluzione non è veramente diversa dalla precedente, e non andrebbe considerata affatto. La proposizione che segue mostra che ogni soluzione dell'equazione (3.1) o non è prolungabile, oppure ammette un prolungamento massimale, cioè non ulteriormente prolungabile; sulla base di questo fatto, da qui in poi considereremo tacitamente solo soluzioni massimali.

3.3. Proposizione. - *Ogni soluzione y dell'equazione* (3.1) *ammette un prolungamento massimale.*

Dimostrazione. - Sia $\mathscr{F}$ la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (3.1) che prolungano y (e quindi $\mathscr{F}$ contiene almeno y stessa). Definiamo il seguente ordinamento parziale: date $y_1, y_2 \in \mathscr{F}$, diciamo che $y_1 \preceq y_2$ se y_2 è un prolungamento di y_1. Non è difficile vedere che ogni catena in $\mathscr{F}$ ammette un maggiorante, e quindi esistono elementi massimali per via del Lemma di Zorn (attenzione, anche più di uno). $\square$

3.4. Terminologia. - Ricordo alcune definizioni standard per insiemi in $\mathbb{R}^k$. dato $x \in \mathbb{R}^k$ ed $r > 0$, $B(x,r)$ e $\overline{B}(x,r)$ denotano rispettivamente la palla aperta e la palla chiusa di centro x e raggio r. Il diametro di un insieme non vuoto D è

$$\operatorname{diam}(D) := \sup\big\{|x-y| : x, y \in D\big\} .$$

La distanza di un punto x da un insieme non vuoto D è $\operatorname{dist}(x,D) := \inf\big\{|x-y| : y \in D\big\}$. Più in generale, la distanza tra due insiemi non vuoti C e D è

$$\operatorname{dist}(C,D) := \inf\big\{|x-y| : x \in C,\, y \in D\big\} .$$

Si noti che la distanza tra insiemi, pur corrispondendo ad un concetto intuitivo, non soddisfa gli assiomi della distanza (cfr. Esercizio 3.26).

3.5. Terminologia. - Una funzione reale $f = f(x)$ definita su un insieme (aperto) A in $\mathbb{R}^k$ e a valori in $\mathbb{R}^h$ si dice *Lipschitziana* se esiste una costante finita L tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in A.$$

Tra tutte le costanti L per cui vale questa disuguaglianza ne esiste una minima, detta costante di Lipschitz di f ed indicata con $\operatorname{Lip}(f)$; convenzionalmente si pone $\operatorname{Lip}(f) = +\infty$ quando f non è Lipschitziana.

La funzione f si dice *localmente Lipschitziana* se per ogni punto di A ammette un intorno U ed una costante $L = L(U)$ che dipende da U, tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L(U)\;|x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in U \cap A.$$

Si noti che se A è aperto ed f è di classe C^1, allora f è localmente Lipschitziana su A (Esercizio 3.23).

Una funzione $f = f(x,y)$ definita su un insieme (aperto) A in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e a valori in $\mathbb{R}^h$ si dice *Lipschitziana nella variabile y* se esiste una costante L tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L\,|y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } (x,y_1), (x,y_2) \in A.$$

Infine, f si dice *localmente Lipschitziana nella variabile y* se per ogni punto di A esiste un intorno U ed una costante $L = L(U)$ che dipende da U, tale che

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L(U)\,|y_1 - y_2| \quad \text{per ogni } (x,y_1), (x,y_2) \in U \cap A.$$

Si noti che se A è aperto ed f è differenziabile nella variabile y con derivata $D_y f$ continua, allora f è localmente Lipschitziana nella variabile y (Esercizio 3.24).

Il risultato fondamentale sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie è il teorema di Cauchy sull'esistenza ed unicità delle soluzioni del problema di Cauchy (3.2) (Teorema 3.6). Enunciamo subito questo teorema ed alcuni altri risultati importanti, posponendo le dimostrazioni alla fine di questo capitolo.

3.6. Teorema (esistenza e unicità delle soluzioni massimali). - *Siano dati A ed f come nella Definizione 3.1, e supponiamo che f sia localmente Lipschitziana nella variabile y (cfr. §3.5). Valgono allora i seguenti enunciati:*

(i) Esistenza: *per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in A$ il problema di Cauchy* (3.2) *ammette una soluzione massimale;*

(ii) Unicità: *due soluzioni massimali dell'equazione* (3.1) *che coincidono in un punto sono uguali; in particolare il problema di Cauchy* (3.2) *ammette un'unica soluzione massimale.*

3.7. Osservazioni. - (i) L'enunciato (ii) può essere parafrasato dicendo che due soluzioni massimali dell'equazione (3.1) hanno grafici disgiunti oppure coincidono.

(ii) È possibile dimostrare il problema di Cauchy (3.2) ammette soluzione anche se f è solo continua (Teorema di Peano). L'ipotesi che f sia localmente Lipschitziana in y è però necessaria per dimostrare l'unicità della soluzione. Ad esempio, le soluzioni massimali dell'equazione $\dot{y} = 2|y|^{1/2}$ sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$y := \begin{cases} -(x-\alpha)^2 & \text{per } x < \alpha, \\ 0 & \text{per } \alpha \le x \le \beta, \\ (x-\beta)^2 & \text{per } \beta < x, \end{cases}$$

dove α e β sono una qualunque coppia di numeri tali che $-\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$; si verifica facilmente che in questo caso il problema di Cauchy ammette infinite soluzioni per ogni dato iniziale (x_0, y_0).

3.8. Teorema (comportamento delle soluzioni agli estremi del dominio). - *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 3.6, e che $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ sia una soluzione* massimale *dell'equazione* (3.2).

Allora per ogni insieme limitato $D \subset A$ con distanza strettamente positiva dalla frontiera di A (cfr. §3.4) esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y(x)) \notin D$ per $x \le a + \delta$ e $x \ge b - \delta$.

La proprietà delle soluzioni massimali y enunciata nel teorema precedente può essere approssimativamente riformulata dicendo che quando x tende agli estremi del dominio di definizione di y allora il corrispondente punto del grafico di y tende all'infinito oppure alla frontiera di A. Nel Lemma 3.16 vengono date altre caratterizzazioni di questa proprietà.

Nel caso particolare in cui A è una "striscia" cioè un insieme della forma $I_0 \times \mathbb{R}^k$, con I_0 intervallo aperto, in generale non è detto che l'intervallo di definizione I di una soluzione massimale dell'equazione coincida con I_0. Ad esempio, il dominio di definizione di f per l'equazione $\dot{y} = -y^2$ è $I_0 \times \mathbb{R}$ con $I_0 = \mathbb{R}$, ma una soluzione massimale è $y := 1/x$ definita su $I := (-\infty, 0)$ (oppure su $I := (0, +\infty)$); dunque I è un sottoinsieme proprio di I_0.

Quando il dominio di f è una striscia, l'enunciato del Teorema 3.8 può essere riformulato in modo più preciso:

3.9. Corollario. - *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 3.6 e che $A = I_0 \times \mathbb{R}^k$ con $I_0 = (a_0, b_0)$ intervallo aperto (anche illimitato), e sia $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale dell'equazione* (3.1).

Si hanno allora le seguenti alternative: $a = a_0$ oppure $|y(x)|$ tende a $+\infty$ per $x \to a^+$; $b = b_0$ oppure $|y(x)|$ tende a $+\infty$ per $x \to b^-$.

Si noti che per $k = 1$ la condizione $|y(x)| \to +\infty$ implica $y(x) \to +\infty$ oppure $y(x) \to -\infty$ (Esercizio 3.33).

Il prossimo enunciato mostra che sotto opportune ipotesi sulla crescita di f per y che tende all'infinito, il dominio di definizione delle soluzioni coincide con l'intervallo I_0.

3.10. Teorema (esistenza delle soluzioni per tutti i tempi). - *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 3.6 e che $A = I_0 \times \mathbb{R}^k$ con I_0 intervallo aperto (anche illimitato). Supponiamo inoltre f abbia crescita al più lineare per y che tende all'infinito, ovvero che esistano due funzioni continue $\alpha, \beta : I_0 \to \mathbb{R}$ tali che*

$$|f(x,y)| \le \alpha(x)|y| + \beta(x) \quad \textit{per ogni } x \in I_0,\ y \in \mathbb{R}^k.$$

Allora il dominio di definizione di ogni soluzione massimale dell'equazione (3.1) *è* I_0.

Prima di passare alle dimostrazioni, aggiungiamo alcune osservazioni sulle equazioni lineari e su quelle di ordine superiore.

3.11. Equazioni di ordine superiore. - Dato A aperto di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$, ed $f : A \to \mathbb{R}$ continua, consideriamo l'equazione differenziale di ordine k

$$D^k y = f(x, y, Dy, \dots, D^{k-1}y) \ . \tag{3.3}$$

Si vede subito che se $y : I \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^k che risolve la (3.3), allora la funzione vettoriale $u : I \to \mathbb{R}^k$ data da $u := (y, Dy, \dots, D^{k-1}y)$ risolve il sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot u_1 = u_2 \\ \dot u_2 = u_3 \\ \quad\vdots \\ \dot u_{k-1} = u_k \\ \dot u_k = f(x, u_1, \dots, u_{k-1} \end{cases} \tag{3.4}$$

e viceversa, se $u : I \to \mathbb{R}^k$ risolve la (3.4), allora la funzione $y := u_1$ risolve la (3.3). In altre parole, c'è una perfetta equivalenza tra l'equazione di ordine k (3.3) ed il sistema di k equazioni del primo ordine (3.4). La corrispondenza si estende ai rispettivi problemi ai Cauchy: imporre su y la condizione iniziale

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ Dy(x_0) = y_1 \\ \quad\vdots \\ D^{k-1}y(x_0) = y_{k-1} \end{cases}$$

equivale ad imporre su u la condizione

$$u(x_0) = u_0$$

con $u_0 := (y_0, \dots, y_{n-1})$. Utilizzando questa corrispondenza è possibile derivare il teorema di esistenza ed unicità per le equazioni di ordine k a partire dal Teorema 3.6.

Ovviamente vale un discorso analogo per i sistemi di h equazioni differenziali di ordine k, cioè quelli che si scrivono nella forma (3.3) con $f : A \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^h)^k \to \mathbb{R}^h$ ed $y : I \to \mathbb{R}^h$.

3.12. Sistemi lineari del primo ordine. - Sia A un'aperto della forma $I \times \mathbb{R}^k$ e sia $f : A \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua. L'equazione (3.1) si dice lineare se la funzione f è affine nella variabile y per ogni $x \in I$, ovvero se si può scrivere come $f(x,y) = A(x)\,y + b(x)$ con $A : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ e $b : I \to \mathbb{R}^k$ funzioni continue. In altre parole, si dicono lineari le equazioni (o meglio i sistemi di equazioni) della forma

$$\dot y = Ay + b \ .$$

Il Teorema 3.10 implica che le soluzioni massimali di tale sistema sono definite su tutto I.

3.13. Equazioni lineari di ordine k. - Analogamente a quanto fatto per i sistemi del primo ordine, diciamo che un'equazione di ordine k è lineare se si scrive nella forma

$$D^k y + a_{k-1} D^{k-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = b$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_k, b$ funzioni reali continue su un dato intervallo aperto I. Queste equazioni possono essere riscritte come sistemi del primo ordine lineari (cfr. §3.11) e quindi le soluzioni massimali sono definite su tutto I.

Dimostrazioni

La dimostrazione dei Teoremi 3.6 e 3.8 si basa sul seguente risultato fondamentale:

3.14. Teorema (esistenza e unicità locale delle soluzioni). - *Sia (x_0, y_0) un punto di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$, sia U un insieme chiuso della forma $[x_0-\rho, x_0+\rho]\times\overline{B}(y_0,r)$ dove $\rho>0$ e $\overline{B}(y_0,r)$ è la palla chiusa di $\mathbb{R}^k$ di centro y_0 e raggio $r>0$ (ammettiamo anche il caso $r=+\infty$, ovvero $\overline{B}(y_0,r)=\mathbb{R}^k$).*

Data $f: U\to\mathbb{R}^k$ una funzione continua e Lipschitziana in y, poniamo

$$\delta_0 := \min\big\{\rho, 1/L, r/M\big\} \tag{3.5}$$

dove dove L è la costante di Lipschitz di f rispetto alla variabile y ed M il massimo di $|f|$ su U (nel caso $r=+\infty$ poniamo invece $\delta_0 := \min\big\{\rho, 1/L\big\}$).

Allora per ogni $\delta<\delta_0$ il problema di Cauchy (3.2) *ammette una ed una sola soluzione $y: [x_0-\delta, x_0+\delta]\to\overline{B}(y_0,r)$.*

Dimostrazione. - *Passo 1.* Cominciamo con il caso $r=+\infty$. Il punto fondamentale è osservare che la funzione y risolve il problema di Cauchy (3.2) se e solo se soddisfa l'equazione integrale (nota come equazione di Volterra)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \text{per ogni } x. \tag{3.6}$$

Per la precisione, se $y: [x_0-\delta, x_0+\delta]\to\mathbb{R}^k$ è una funzione di classe C^1 che risolve l'equazione $\dot y = f(x,y)$ e $y(x_0)=y_0$, allora y soddisfa la (3.6) per ogni $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ Viceversa, se $y: [x_0-\delta, x_0+\delta]\to\mathbb{R}^k$ è una funzione *continua* soddisfa la (3.6) per ogni $x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$, allora y è anche una funzione di classe C^1 che vale y_0 in x_0 e risolve l'equazione $\dot y = f(x,y)$. (Entrambe le implicazioni seguono in modo quasi immediato dal Teorema Fondamentale del calcolo integrale.)

Passo 2. Per quanto osservato nel punto precedente, l'enunciato del lemma equivale a dire che esiste una ed una sola funzione *continua* $y: [x_0-\delta, x_0+\delta]\to\mathbb{R}^k$ che soddisfa la (3.6).

In altre parole, indicato con X lo spazio delle funzioni continue da $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ in $\mathbb{R}^k$ (dotato della solita norma del sup), si tratta di dimostrare che l'operatore $T: X\to X$ definito da

$$[Ty](x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \quad \text{per ogni } x\in[x_0-\delta, x_0+\delta], \tag{3.7}$$

ammette uno ed un solo punto fisso. E siccome lo spazio X dotato della norma del sup è completo, per via del Teorema delle Contrazioni ci basta dimostrare che T è una contrazione.

Date dunque y_1 ed y_2 appartenenti a X, dobbiamo stimare la distanza tra le funzioni Ty_1 e Ty_2: per ogni x si ha

$$[Ty_1](x) - [Ty_2](x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\, dt$$

e quindi, ricordando che L è la costante di Lipschitz di f rispetto alla variabile y,

$$\begin{aligned}\big|[Ty_1](x) - [Ty_2](x)\big| &\le \int_{x_0}^{x} \big|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\big|\, dt \\ &\le \int_{x_0}^{x} L\, |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \\ &\le (x - x_0)\, L \sup\big\{|y_1(t) - y_2(t)| :\ x_0 \le t \le x\big\} \\ &\le L\delta \|y_1 - y_2\|_\infty\ .\end{aligned} \tag{3.8}$$

Pertanto

$$\|Ty_1 - Ty_2\| \le L\delta_0 \|y_1 - y_2\|$$

e siccome l'assunto $\delta < \delta_0$ e la definizione di δ_0 implicano che $L\delta < L\delta_0 \le 1$, abbiamo dimostrato che T è una contrazione. Questo conclude la dimostrazione nel caso $r = +\infty$.

Passo 3. La dimostrazione nel caso $r < +\infty$ è la stessa, eccetto che lo spazio X che si considera è quello delle funzioni continue da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ in $\overline{B}(y_0, r)$ (la ragione è che f è definita solo su U, e quindi l'operatore T non è definito per le funzioni y che assumono valori al di fuori di $\overline{B}(y_0, r)$). T resta ovviamente una contrazione, ma adesso dobbiamo anche dimostrare che T mappa X in sé, ovvero che $|[Ty](x) - y_0| \le r$ per ogni x:

$$\begin{aligned}|[Ty](x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)\, dt \right| \\ &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)|\, dt \\ &\le (x - x_0) \sup\big\{|f(t, y(t))| :\ x_0 \le t \le x\big\} < M\delta_0 \le r\ ,\end{aligned} \tag{3.9}$$

dove le ultime due disuguaglianze seguono da $\delta < \delta_0$ e dalla definizione di δ_0. $\square$

3.15. Osservazioni. - (i) Nella dimostrazione precedente, caso $r < +\infty$, abbiamo utilizzato il fatto che lo spazio delle funzioni continue su un intervallo I a valori nella palla $\overline{B}(y_0, r)$ è un sottoinsieme chiuso di dello spazio delle funzioni continue su I a valori in $\mathbb{R}^k$, ed è quindi uno spazio metrico completo. Questo è vero perché $\overline{B}(y_0, r)$ è un insieme chiuso (Esercizio 3.32).

(ii) Le catene di disuguaglianze (3.8) e (3.9) nella dimostrazione precedente sono corrette solo per $x \ge x_0$, e vanno opportunamente modificate nel caso $x \le x_0$.

Dimostrazione del Teorema 3.6(i). - L'esistenza di una soluzione del problema (3.2) definita in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ segue dal Teorema 3.14. L'esistenza di una soluzione massimale segue dalla Proposizione 3.3.

Dimostrazione del Teorema 3.6(ii). - Date due soluzioni massimali $y : I \to \mathbb{R}^k$ e $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^k$ dell'equazione (3.1) che coincidono in almeno un punto, vogliamo dimostrare che coincidono ovunque.

Passo 1. Sia E l'insieme (aperto) dei punti $x \in I \cap \tilde{I}$ tali che $y(x) \neq \tilde{y}(x)$, e supponiamo per cominciare che E sia vuoto. Allora y ed $\tilde{y}$ coincidono su $I \cap \tilde{I}$, e ponendo

$$\bar{y}(x) := \begin{cases} y(x) & \text{per } x \in I \\ \tilde{y}(x) & \text{per } x \in \tilde{I} \setminus I \end{cases}$$

otteniamo una soluzione dell'equazione definita su $J := I \cup \tilde{I}$ che prolunga sia y che $\tilde{y}$. La massimalità di quest'ultime implica allora che $J = I$ e $J = \tilde{I}$, e dunque y e $\tilde{y}$ hanno lo stesso dominio di definizione e ivi coincidono.

Passo 2. Non ci resta che dimostrare che l'aperto E è vuoto. Supponiamo per assurdo che non lo sia, e consideriamone una componente connessa (x_0, x_1). Siccome le funzioni y e $\tilde{y}$ coincidono per ipotesi in almeno un punto, (x_0, x_1) è un sottointervallo proprio dell'intervallo $I \cap \tilde{I}$, e quindi almeno uno dei due estremi è un punto interno a $I \cap \tilde{I}$: supponiamo che sia x_0 (l'altro caso si tratta in modo analogo).

Poiché x_0 è un estremo di una componente connessa dell'aperto E, allora deve appartenere alla frontiera di E, ed in particolare non appartiene ad E (cfr. Esercizio 3.17). Quindi y e $\tilde{y}$ assumono in x_0 lo stesso valore, che indichiamo con y_0, mentre $y(x) \neq \tilde{y}(x)$ per ogni $x \in (x_0, x_1)$. Facciamo vedere che questo contraddice il Teorema 3.14.

Siccome (x_0, y_0) è interno ad A, ammette un'intorno chiuso U contenuto in A e che soddisfa le ipotesi del Teorema 3.14 (basta che ρ ed r siano sufficientemente piccoli); prendiamo ora un numero positivo δ piccolo abbastanza che valgano le seguenti condizioni:

(a) $\delta < \delta_0$ con δ_0 definito in (3.5);

(b) $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ è contenuto sia in I che in $\tilde{I}$;

(c) $|y(x) - y_0| \leq r$ e $|\tilde{y}(x) - y_0| \leq r$ per ogni x in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Allora le restrizioni di y e $\tilde{y}$ all'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ danno due diverse soluzioni del problema di Cauchy (3.2) con valori nella nella palla $\overline{B}(y_0, r)$, in contraddizione con il Teorema 3.14. □

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 3.8 il seguente lemma.

3.16. Lemma. - *Sia A un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, e sia $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua il cui grafico Γ è contenuto in A. I seguenti enunciati sono allora equivalenti:*

(i) *per ogni insieme limitato D contenuto in A con distanza positiva dalla frontiera di A esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y(x)) \notin D$ per $x \in (a, a + \delta)$ e $x \in (b - \delta, b)$;*

(ii) *per ogni insieme compatto D contenuto in A esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y(x)) \notin K$ per $x \in (a, a + \delta)$ e $x \in (b - \delta, b)$;*

(iii) *sia x_n una successione di punti di (a, b) che tende ad a (rispettivamente a b) e tale che $y(x_n)$ converge ad un qualche punto $\bar{y}$. Allora $(a, \bar{y})$ (rispettivamente $(b, \bar{y})$) non è un punto di A (e quindi appartiene alla frontiera di A).*

Dimostrazione. - L'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) segue dal fatto che ogni insieme compatto D contenuto in A è limitato ed ha distanza positiva dalla frontiera di A (applicare l'enunciato (b) dell'Esercizio 3.26 con C uguale alla frontiera di A).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia data una successione x_n che converge ad a e tale che $y(x_n)$ converge a $\bar{y}$ e supponiamo per assurdo che $(a, \bar{y})$ appartenga ad A (il caso $x_n \to b$ si tratta allo stesso modo). Allora $(a, \bar{y})$ ammette un intorno compatto D che è a sua volta contenuto in A (una qualunque palla chiusa di raggio sufficientemente piccolo) e siccome la successione $(x_n, y(x_n))$ appartiene definitivamente a D, la condizione (ii) implica che il limite di x_n non può essere a, e questo è assurdo.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Sia D un compatto contenuto in A, e supponiamo per assurdo che esista una successione x_n che tende ad a (oppure a b) tale che $(x_n, y(x_n)) \in D$ per ogni n. Essendo D compatto possiamo supporre che, a condizione di passare ad una sottosuccessione, $(x_n, y(x_n))$ converge ad un punto di D; tale punto appartiene quindi ad A e alla chiusura di Γ, ma non può appartenere a Γ perché la sua prima coordinata è a e non appartiene al dominio di y. □

Dimostrazione del Teorema 3.8. - Sia $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale della (3.1). Ci basta dimostrare che la condizione (iii) del Lemma 3.16 è verificata, ovvero che data una qualunque successione x_n che tende ad a e tale che $y(x_n)$ tende a $\bar{y}$, allora $(a, \bar{y})$ non appartiene ad A (il caso $x_n \to b$ si tratta allo stesso modo).

Supponiamo per assurdo che $(a, \bar{y})$ appartenga ad A. L'idea è di prendere n tale che x_n e molto vicino ad a ed usare il Teorema 3.14 per costruire una soluzione $\tilde{y}$ che coincide con y in x_n ed è definita in un intervallo $(x_n - \delta, x_n + \delta)$ con $x_n - \delta < a$, che quindi non è contenuto in (a, b).

Dopodiché la dimostrazione è presto conclusa: un qualunque prolungamento massimale di $\tilde{y}$ avrebbe un dominio di definizione diverso da quello di y, ma questo contraddirrebbe l'enunciato (ii) del Teorema 3.6.

Siccome $(a, \bar{y})$ appartiene ad A, esistono ρ, r positivi tali che $V := [a-2\rho, a+2\rho] \times \overline{B}(\bar{y}, 2r)$ è contenuto in A, e la restrizione di f a V è Lipschitziana rispetto alla variabile y. Poniamo allora

$$\delta_1 := \min\{\rho, 1/L, r/M\}$$

dove L è la costante di Lipschitz di f rispetto a y su V ed M il massimo di $|f|$ su V.

Siccome $(x_n, y(x_n))$ converge a $(a, \bar{y})$, esiste n tale che $x_n \le a + \delta_1/4$, $|x_n - a| \le \rho$ e $|y(x_n) - \bar{y})| \le r$.

Posto $y_n := y(x_n)$, abbiamo allora che l'intorno chiuso $U := [x_n - \rho, x_n + \rho] \times \overline{B}(y_n, r)$ è contenuto in V e quindi soddisfa le ipotesi del Teorema 3.14 (con x_n e y_n al posto di x_0 e y_0) ed il valore δ_0 dato in (3.5) risulta maggiore o uguale a δ_1. Pertanto, applicando questo teorema con $\delta := \delta_1/2$ (possiamo farlo perché $\delta_1/2 < \delta_1 \le \delta_0$) otteniamo una soluzione $\tilde{y}$ dell'equazione (3.1) che soddisfa le condizioni iniziali $\tilde{y}(x_n) = y_n = y(x_n)$ ed è definita su tutto l'intervallo $(x_n - \delta, x_n + \delta)$. Siccome $x_n \le a + \delta_1/4 = a + \delta/2$, l'intervallo $x_n - \delta < a$ e quindi il dominio di definizione di $\tilde{y}$ non è contenuto in quello di y. □

Dimostrazione del Corollario 3.9. - Supponiamo che sia $a < a_0$. Allora, fissato a' strettamente compreso tra a e b_0, si ha che per ogni $M > 0$ l'insieme $D := [a, a'] \times B(0, M)$ è limitato, contenuto in A, ed ha distanza positiva dalla frontiera di A. Allora per il Teorema 3.8 esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y(x)) \notin D$ per ogni $x \le a + \delta$, e questo implica che $y(x) \notin B(0, M)$, ovvero $|y(x)| \ge M$, per ogni $x \le a + \delta_0$ dove $\delta_0 := \min\{\delta, a - a'\}$. Dall'arbitrarietà di M segue che $|y(x)|$ tende a $+\infty$ per $x \to a^+$.

Il caso $b < b_0$ si tratta in modo analogo. □

Dimostrazione del Teorema 3.10. - Sia $I_0 = (a_0, b_0)$ e sia $y : (a, b) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale dell'equazione.

Per dimostrare che $b = b_0$ esibiremo una funzione continua $z : (a_0, b_0) \to \mathbb{R}$ che maggiora $|y|$ in un intorno sinistro di b: se per assurdo fosse $b < b_0$, tale maggiorazione implicherebbe che $|y|$ non può convergere all'infinito per $x \to b$, in contraddizione con il Corollario 3.9. In maniera analoga si dimostra che $a = a_0$.

Poniamo $v(x) := |y(x)|$ per ogni $x \in I$. Visto che v è data dalla composizione di $x \mapsto y(x)$ e $y \mapsto |y|$, e che quest'ultima funzione è differenziabile per $y \ne 0$ con gradiente $y/|y|$, il teorema di derivazione della funzione composta implica che v è derivabile in tutti i punti in cui $y(x) \ne 0$ e

$$\dot{v} = \frac{y}{|y|} \cdot \dot{y} \le \left|\frac{y}{|y|}\right| |\dot{y}| = |\dot{y}| = |f(x, y)| \le \alpha|y| + \beta \le \alpha v + \beta\ . \tag{3.10}$$

Sia ora x_0 un punto del dominio di y, e sia z la soluzione dell'equazione

$$\dot{z} = \alpha z + \beta + 1 \tag{3.11}$$

tale che $z(x_0) = v(x_0) + 1$. La funzione z è definita per ogni $x \in I_0$, e per la precisione è data da

$$z(x) := e^{A(x)} \left[v(x_0) + 1 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} (b(t) + 1)\, dt \right]$$

dove A è la primitiva di α che vale 0 in x_0.

Dimostriamo ora che $z(x) > v(x)$ per ogni $x \ge x_0$, concludendo così la dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'insieme chiuso C dei punti $x \ge x_0$ tali che $z(x) \le v(x)$ sia non vuoto. Allora C ammette un punto di minimo x_1, che non può essere x_0 stesso perché

$z(x_0) = v(x_0) + 1$ e quindi x_0 non appartiene a C. Dunque $z(x) > v(x)$ per ogni $x \in [x_0, x_1)$ e $z(x_1) = v(x_1)$, e quindi

$$\frac{z(x_1) - z(x)}{x_1 - x} > \frac{v(x_1) - v(x)}{x_1 - x} \quad \text{per ogni } x \in [x_0, x_1),$$

e passando al limite per $x \to x_1^-$ otteniamo $\dot z(x_1) \geq \dot v(x_1)$. D'altra parte le formule (3.10) e (3.11) e la condizione $z(x_1) = v(x_1)$ implicano l'esatto contrario:

$$\dot z(x_1) = \alpha(x_1) z(x_1) + \beta(x_1) + 1 > \alpha(x_1) v(x_1) + \beta(x_1) \geq \dot v(x_1) \; .$$

Abbiamo quindi ottenuto un assurdo. $\square$

Esercizi

3.17. - Sia E un sottoinsieme *aperto* di $\mathbb{R}$. Una componente connessa di E è per definizione un sottoinsieme connesso massimale (rispetto all'inclusione). Dimostrare che

(a) le componente connesse di E sono intervalli aperti a due a due disgiunti;

(b) le componenti connesse sono in quantità finita o numerabile;

(c) gli estremi di ogni componente connessa di E non appartengono ad E, e sono quindi contenuti nella frontiera di E;

(d) non è sempre vero che la frontiera di E coincide con l'insieme degli estremi delle sue componenti connesse;

(e) se $E := \{x : f(x) > 0\}$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua, allora f si annulla agli estremi delle componenti connesse di E.

3.18. - Dimostrare che f è localmente Lipschitziana in A se e solo se f è Lipschitziana su ogni insieme compatto K contenuto in A. (Quest'ultima proprietà viene talvolta data come definizione di Lipschitzianità locale.)

3.19. - Dimostrare che dato A aperto convesso e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1, allora

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \in A} |Df(x)| \; . \tag{3.12}$$

Suggerimento: per ottenere la disuguaglianza $\leq$ usare la (ben nota) identità

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \nabla f((1-t)x + ty) \cdot (x - y) \, dt \; .$$

Per ottenere la disuguaglianza opposta prendere come x il punto in cui $|\nabla f(x)|$ assume valore massimo (o quasi), e prendere come y punti del tipo $x + t\nabla f(x)$ con t piccolo.

3.20*. - Far vedere che se A è connesso ma non è convesso, allora la (3.12) non vale, ma si ha solo

$$\mathrm{Lip}(f) \geq \sup_{x \in A} |Df(x)| \; .$$

Dimostrare che se A è un aperto tale che la (3.12) vale per ogni f Lipschitziana di classe C^1, allora A è convesso.

3.21. - Esistono diverse norme sullo spazio $\mathbb{R}^{k \times n}$ delle matrici $k \times n$. Una scelta di uso comune è la norma euclidea, cioè

$$|M| := \Big(\sum_{ij} M_{ij}^2 \Big)^{1/2} \; ,$$

dove M_{ij} sono le coordinate della matrice M. Un'altra è la norma operatoriale

$$\|M\| := \sup\big\{|Mv| : \ v \in \mathbb{R}^n, \ |v| \le 1\big\} \ .$$

Verificare che sia $|\cdot|$ che $\|\cdot\|$ sono effettivamente delle norme.

3.22*. - Discutere l'estensione degli Esercizi 3.19 e 3.20 al caso di funzioni f a valori vettoriali. Nel definire la norma della matrice $Df(x)$ nella formula (3.12) considerare entrambe le opzioni descritte nell'Esercizio 3.21.

3.23. - Dimostrare che se A è un aperto in $\mathbb{R}^k$ ed $f : A \to \mathbb{R}^h$ una funzione di classe C^1, allora f è localmente Lipschitziana.

3.24. - Dimostrare che se A è un aperto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ ed $f : A \to \mathbb{R}^h$ una funzione differenziabile in tutti i punti rispetto alla variabile y con $D_{y_1} f, \dots D_{y_k} f$ funzioni continue, allora f è localmente Lipschitziana rispetto alla variabile y.

3.25*. - Dare un esempio di insieme aperto connesso A in $\mathbb{R}^2$ e di funzione $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 che abbia gradiente limitato ma non sia Lipschitziana.

3.26. - Siano C e D insiemi in $\mathbb{R}^k$. Tenendo presenti le definizioni date in §3.4, dimostrare che:
(a) se la chiusure di C e D si intersecano allora $\mathrm{dist}\,(C, D) = 0$;
(b) se C è chiuso e D è compatto, allora $\mathrm{dist}\,(C, D) = 0$ se e solo se $C \cap D \neq \varnothing$;
(c) l'enunciato precedente non vale se si assume solamente che C e D sono chiusi.

3.27. - Svolgere l'esercizio precedente assumendo che C e D siano sottoinsiemi di un generico spazio metrico (X, d).

3.28*. - Esiste una nozione di distanza tra insiemi, dovuta ad Hausdorff, che soddisfa gli assiomi della distanza: dati C, D sottoinsiemi non vuoti dello spazio metrico X, si ponga

$$\delta(C, D) := \sup_{x \in C} \mathrm{dist}\,(x, D) + \sup_{y \in D} \mathrm{dist}\,(y, C) \ .$$

Dimostrare che $\delta(C, D)$ è effettivamente una distanza sullo spazio $\mathscr{F}$ dei sottoinsiemi chiusi non vuoti di X (se si vuole una distanza che non assume il valore $+\infty$, basta sostituire $\delta(C, D)$ con la troncata $\delta'(C, D) := \min\{\delta(C, D), 1\}$). Dimostrare poi che se X è compatto allora $\mathscr{F}$ è compatto.

3.29*. - Dimostrare la Proposizione 3.3 senza utilizzare né il Lemma di Zorn né l'assioma della scelta.

3.30. - Dimostrare quanto affermato nell'Osservazione 3.7(iii).

3.31. - Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia Y un sottoinsieme di X visto come spazio metrico con la distanza indotta da X. Dimostrare che Y è completo se e solo se è un sottoinsieme chiuso di X.

3.32*. - Sia E un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che lo spazio X delle funzioni $f : E \to \mathbb{R}^k$ continue e *limitate*, dotato della norma del sup, è uno spazio di Banach. Dimostrare che il sottoinsieme Y delle funzioni a valori in un insieme assegnato $C \subset \mathbb{R}^k$ è chiuso in X se e solo se C è chiuso in $\mathbb{R}^k$.

3.33. - Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione continua tale che $|f(x)|$ tende a $+\infty$ per $x \to a^+$. Dimostrare allora che $f(x)$ tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Far vedere che questa conclusione può non valere se f non è continua, oppure se il dominio di f non è un connesso.

3.34. - Formulare e dimostrare l'equivalente del Corollario 3.9 nel caso in cui il dominio di f è un aperto della forma $A = I_0 \times A_0$ con $I_0 = (a_0, b_0)$ intervallo aperto e A_0 aperto (limitato) di $\mathbb{R}^k$.

3.35. - Completare la dimostrazione del Teorema 3.10 trovando una funzione continua e positiva z su (a_0, b_0) che maggiora $|y|$ in un intorno destro di a.

3.36. - Enunciare e dimostrare l'equivalente dei Teoremi 3.6, 3.8 e 3.10 per equazioni differenziali del secondo ordine, e più in generale per equazioni di ordine k.

Capitolo 4. Lemma di Gronwall e teoremi di confronto

[versione: 20 aprile 2006]

Il lemma di Gronwall è uno strumento fondamentale nello studio delle proprietà qualitative delle soluzioni delle equazioni differenziali, e dei sistemi di equazioni differenziali, del primo ordine. Da esso derivano il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali (Teorema 4.4) ed il principio di confronto (Teorema 4.6).

Di questo lemma diamo diverse varianti. Il Lemma 4.1 si applica alle funzioni reali, e implica solo una maggiorazione. Il Lemma 4.2 si applica alle funzioni vettoriali ed è di gran lunga il più importante. La dimostrazione è un corollario quasi immediato del Lemma 4.1.

In tutto questo capitolo, I è un intervallo di $\mathbb{R}$, non necessariamente limitato né aperto.

4.1. Lemma di Gronwall, I. - *Sia $v : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di classe C^1 e supponiamo che esistano $x_0 \in I$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\dot v \le av \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.1}$$

Allora

$$v \le v(x_0)e^{a(x-x_0)} \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. - Si procede come per la risoluzione dell'equazione lineare $\dot v = av$: scriviamo la (4.1) come $\dot v - av \le 0$ e moltiplichiamo per il fattore integrante e^{-ax}; otteniamo allora $e^{-ax}\dot v - ae^{-ax}v \le 0$, ovvero

$$\big(e^{-ax}v\big)' \le 0 \ .$$

Integrando entrambi i termini di questa disequazione tra x_0 ed x e ricaviamo

$$e^{-ax}v(x) - e^{-ax_0}v(x_0) \le 0 \ ,$$

che è proprio la (4.2). □

4.2. Lemma di Gronwall, II. - *Sia $u : I \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 e supponiamo che esistano $x_0 \in I$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|\dot u| \le a|u| \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.3}$$

Allora

$$|u| \le |u(x_0)|e^{a(x-x_0)} \quad \textit{per ogni } x \ge x_0. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. - L'idea è di applicare il Lemma 4.1 alla funzione reale $v := |u|$.

Vedendo v come la composizione della funzione $x \mapsto u(x)$ e della funzione $y \mapsto |y|$, e ricordando che il gradiente di quest'ultima è $y/|y|$, per la regola di derivazione delle funzioni composte abbiamo che

$$|\dot v| = \left|\frac{u}{|u|}\cdot \dot u\right| \le \left|\frac{u}{|u|}\right| \, |\dot u| = |\dot u| \ . \tag{4.5}$$

Le disuguaglianze (4.3) e (4.5) implicano allora che $\dot v \le av$ per ogni $x \ge x_0$; applicando il Lemma 4.1 alla funzione v otteniamo la (4.4). $\square$

4.3. Osservazioni. - (i) Nel caso che la disuguaglianza $|\dot u| \le a|u|$ valga per $x \le x_0$ si ha che

$$|u| \le |u(x_0)|e^{a(x_0-x)} \quad \text{per ogni } x \le x_0. \tag{4.6}$$

Per dimostrare la (4.6) basta osservare che, posto $w(x) := u(-x)$, si ha $|\dot w| \le a|w|$ per $x \ge -x_0$, ed applicare quindi Lemma 4.2 alla funzione w con $-x_0$ al posto di x_0.

(ii) Ad essere precisi la dimostrazione del Lemma 4.2 non è completa. Infatti la funzione $y \mapsto |y|$ non è differenziabile per $y = 0$, e quindi il teorema di derivazione delle funzioni composte non si applica nei punti in cui u si annulla. In altre parole, abbiamo dimostrato che v è derivabile con continuità e vale $\dot v \le av$ in tutti i punti $x \ge x_0$ in cui u non si annulla, mentre per poter applicare il Lemma 4.1 avremmo bisogno di sapere che v è derivabile con continuità e vale $\dot v \le av$ per tutti gli $x \ge x_0$. Due possibili modi di aggirare questo problema sono accennati negli Esercizi 4.8 e 4.9.

Il prossimo risultato mostra che date due soluzioni y_1 e y_2 della stessa equazione differenziale, la differenza dei valori $y_1(x)$ e $y_2(x)$ in un qualunque punto x può essere stimata a partire dalla differenza dei dati iniziali, cioè dei valori assegnati a y_1 ed y_2 in un prefissato x_0. Ne segue in particolare che il valore di una soluzione in un qualche punto x varia in modo continuo se si varia il dato iniziale dell'equazione, cioè il valore assegnato alla soluzione in x_0.

Tra le diverse varianti di questo teorema ho scelto di dimostrare la più semplice. Versioni più generali sono indicate in seguito.

4.4. Teorema (dipendenza continua dai dati iniziali). - *Sia I un intervallo aperto, e sia $f : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua e Lipschitziana nella seconda variabile con costante di Lipschitz L. Date y_1, y_2 soluzioni massimali dell'equazione $\dot y = f(x, y)$ e $x_0 \in I$, allora*

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le |y_1(x_0) - y_2(x_0)|\, e^{L|x-x_0|} \quad \textit{per ogni } x \in I. \tag{4.7}$$

Dimostrazione. - Poniamo $u := y_1 - y_2$. Allora $\dot u = \dot y_1 - \dot y_2 = f(x, y_1) - f(x, y_2)$ e quindi

$$|\dot u| = |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| = L|u| \ .$$

Il Lemma 4.2 implica allora che $|u(x)| \le |u(x_0)| \exp(L(x-x_0))$ per ogni $x \ge x_0$, ed analogamente $|u(x)| \le |u(x_0)| \exp(L(x_0 - x))$ per ogni $x \le x_0$ (cfr. Osservazione 4.3(i)). Queste due stime insieme danno la tesi. $\square$

4.5. Osservazioni. - (i) Siccome f è Lipschitziana di costante L nella seconda variabile, si ha che

$$|f(x, y)| \le L|y| + |f(x, 0)|$$

e quindi f soddisfa le ipotesi del Teorema di esistenza per tutti i tempi (Teorema 3.10) dimostrato nel capitolo precedente con $a(x) := L$ e $b(x) := |f(x, 0)|$. Pertanto le soluzioni massimali dell'equazione $\dot y = f(x, y)$ sono sempre definite su tutto I.

(ii) Dalla stima (4.6) otteniamo che se y_1 e y_2 coincidono in x_0, allora coincidono su tutto I. Abbiamo quindi una dimostrazione alternativa dell'enunciato di unicità (locale) per le equazioni differenziali (cfr. Teorema 3.6(ii) e Teorema 3.14).

(iii) Una versione più generale del Teorema di dipendenza continua dai dati è la seguente. Sia $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ un aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua e localmente Lipschitziana nella seconda variabile (cioè valgono le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità). Per ogni $z \in A$, sia y_z l'unica soluzione dell'equazione $\dot y = f(x, y)$ il cui grafico contiene il punto z (ovvero, detto

$z = (x_0, y_0)$, y è la soluzione che soddisfa il problema di Cauchy con dato iniziale $y(x_0) = y_0$) e sia I_z il suo dominio. Infine, sia Ω l'insieme delle coppie (x, z) con $z \in A$ e $x \in I_z$, e si definisca $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ come

$$\Phi(x, z) := y_z(x) \ .$$

Allora l'insieme Ω è aperto e la funzione Φ è continua, anzi localmente Lipschitziana su Ω.

4.6. Teorema (principio di confronto). - *Sia A un insieme aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ funzione continua e localmente Lipschitziana, e siano date y, z funzioni di classe C^1 su un intervallo I tali che*
(i) *y risolve l'equazione $\dot{y} = f(x, y)$;*
(ii) *z risolve la disequazione $\dot{z} \geq f(x, z)$;*
(iii) *$z(x_0) \geq y(x_0)$ per un qualche $x_0 \in I$.*
Allora $z(x) \geq y(x)$ per ogni $x > x_0$.

4.7. Osservazioni. - (i) Nelle ipotesi (i) ed (ii) si suppone che i grafici di y e z siano contenuti nel dominio di definizione di f, e dire che z risolve la disequazione $\dot{z} \geq f(x, z)$ significa che $\dot{z}(x) \geq f(x, z(x))$ per ogni x nel suo dominio.

(ii) Una funzione $z : I \to \mathbb{R}$ tale che $\dot{z} \geq f(x, z)$ su I viene chiamata *soprasoluzione* dell'equazione $\dot{y} = f(x, y)$. Viceversa, una funzione z che soddisfa $\dot{z} \leq f(x, z)$ viene chiamata *sottosoluzione*. In particolare ogni soluzione è sia sopra- che sottosoluzione.

(iii) Il Teorema 4.6 può essere enunciato in una forma leggermente più generale (la dimostrazione è esattamente la stessa, cfr. Esercizio 4.13): se y ed z sono rispettivamente una sotto- ed una soprasoluzione dell'equazione e $z(x_0) \geq y(x_0)$ per qualche x_0, allora $z(x) \geq y(x)$ per ogni $x \geq x_0$. Si dimostra inoltre (Esercizio 4.15) che se $z(x_0) > y(x_0)$ allora $z(x) > y(x)$ per ogni $x \geq x_0$.

(iv) La versione "per il passato" del principio di confronto è questa (cfr. Esercizio 4.14): se y ed z sono rispettivamente una sotto- ed una soprasoluzione dell'equazione, e $z(x_0) \leq y(x_0)$ allora $z(x) \leq y(x)$ per ogni $x \leq x_0$. Se invece $z(x_0) < y(x_0)$ allora $z(x) < y(x)$ per ogni $x \geq x_0$.

(v) Il Teorema 4.6 presuppone che f sia localmente Lipschitziana nella seconda variabile; questa ipotesi può essere rimossa ma solo a patto di rafforzare l'ipotesi (ii) richiedendo che $\dot{z} > f(x, z)$ per ogni z (cfr. Esercizi 4.16, 4.17, 4.18). In questo caso la dimostrazione non utilizza il Lemma di Gronwall.

Dimostrazione. - Supponiamo per assurdo che l'insieme E dei punti $x > x_0$ tali che $z(x) < y(x)$ non sia vuoto. Siccome tale insieme è aperto, possiamo prenderne una componente connessa (x_1, x_2). Dunque $z(x) < y(x)$ per $x \in (x_1, x_2)$, e siccome x_1 appartiene alla frontiera di E si ha anche che $z(x_1) = y(x_1)$ (cfr. Esercizio 3.17 nel capitolo precedente).

Dato U un intorno di $(x_1, y(x_1))$ su cui la funzione f è Lipschitziana nella seconda variabile (con costante L), prendiamo $\delta > 0$ tale che $(x, y(x))$ ed $(x, z(x))$ appartengono a U per $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ e questo intervallo è contenuto in (x_1, x_2). Poniamo $v := y - z$. Per ogni $x \in [x_1, x_1 + \delta)$ abbiamo quindi

$$\dot{v} = \dot{y} - \dot{z} \leq f(x, y) - f(x, z) \leq L|y - z| = L(y - z) = Lv \ ,$$

e siccome $v(x_1) = 0$, il Lemma 4.1 implica $v \leq 0$, ovvero $z \geq y$, in $[x_1, x_1 + \delta)$, in contraddizione col fatto che $(x_1, x_1 + \delta)$ è contenuto in E. □

Esercizi

4.8. - Completare la dimostrazione del Lemma 4.4 facendo vedere che la funzione v è derivabile con continuità e soddisfa $\dot{v} \leq av$ per ogni $x \geq x_0$.

Traccia: 1) Sappiamo già che v è derivabile con continuità nell'insieme (aperto) in cui u non si annulla. 2) Dato $x \geq x_0$ in cui u si annulla, usare l'ipotesi (4.3) per dimostrare che $u(x+h) = o(|h|)$ per $h \to 0$; dedurne che la derivata di v in x esiste ed è nulla. 3) Usare l'ipotesi (4.3) e la stima (4.5) per dimostrare che $|\dot{v}| \leq av$ per ogni $x \geq x_0$. 4) Usare la stima al punto precedente per dimostrare che $\dot{v}$ è continua anche nei punti in cui u si annulla.

4.9. - Completare la dimostrazione del Lemma 4.4 facendo vedere che se $v(x_1) = 0$ per qualche $x_1 \geq x_0$ allora $v(x) = 0$ per ogni $x \geq x_1$.

Traccia: 1.) Supporre per assurdo che l'insieme dei punti $x > x_1$ tali che $v(x) > 0$ sia non vuoto; si dimostri che questo insieme è aperto e se ne prenda una componente connessa (x_2, x_3). 2) Dimostrare che $v(x_2) = 0$. 3) Dimostrare che $v(x) \leq v(x')e^{a(x-x')}$ per ogni $x' < x$ nell'intervallo (x_2, x_3). 4) Passare al limite per $x' \to x_2$ nella precedente disuguaglianza e dedurne che $v(x) = 0$ per ogni x in (x_2, x_3), in contraddizione con la scelta di tale intervallo.

4.10. - Dimostrare la seguente versione generale del Lemma di Gronwall per funzioni scalari. Sia $v : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 che soddisfa

$$\dot{v} \leq av + b \quad \text{per } x \geq x_0,$$

dove x_0 è un punto di I e a, b sono funzioni continue su I. Allora

$$v(x) \leq e^{A(x)} \left[v(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\, dt \right] \quad \text{per } x \geq x_0 \tag{4.8}$$

dove A è una primitiva di a che vale 0 in x_0.

Traccia: si può adattare la dimostrazione del Lemma 4.1, oppure applicare il principio del confronto (Teorema 4.6) avendo osservato che v è una sottosoluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = ay + b$, mentre la funzione a destra dell'uguale in (4.8) è una soluzione.

4.11*. - Dimostrare la seguente versione generale del Lemma di Gronwall per funzioni vettoriali. Sia $u : I \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^1 che soddisfa

$$|\dot{u}| \leq a|u| + b \quad \text{per } x \geq x_0,$$

dove x_0 è un punto di I e a, b sono funzioni continue e positive su I. Allora

$$|u(x)| \leq e^{A(x)} \left[|u(x_0)| + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\, dt \right] \quad \text{per } x \geq x_0$$

dove A è una primitiva di a che vale 0 in x_0.

4.12. - Utilizzare il risultato dell'Esercizio 4.11 per dare una dimostrazione alternativa del punto chiave della dimostrazione del Teorema 3.10 (capitolo precedente), cioè la disuguaglianza $z \geq |y|$ per $x \geq x_0$.

4.13. - Adattare la dimostrazione del Teorema 4.6 al caso in cui che z ed y sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione (cfr. Osservazione 4.7(iii)).

4.14. - Dimostrare che se z ed y sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = f(x, y)$ e $z(x_0) \leq y(x_0)$ allora $z \leq y$ per $x < x_0$ (cfr. Osservazione 4.7(iv)).

Traccia: mostrare che le funzioni $\tilde{z}(x) := z(-x)$ e $\tilde{y}(x) := y(-x)$ sono rispettivamente sotto- e soprasoluzione della stessa equazione differenziale (quale?) e applicare il Teorema 4.6.

4.15. - Dimostrare che se z ed y sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = f(x, y)$ e $z(x_0) > y(x_0)$ allora $z > y$ per $x > x_0$ (cfr. Osservazione 4.7(iii)).

Traccia: si supponga per assurdo che valga il contrario, e si dimostri che esiste un punto $x_1 > x_0$ tale che $z(x_1) = y(x_1)$ e $z(x) > y(x)$ per ogni $x \in (x_0, x_1)$. Si usi quindi quanto dimostrato nell'Esercizio 4.14.

4.16. - Se la funzione f non è localmente Lipschitziana nella variabile y ma solo continua, allora il Teorema 4.6 può non valere. Per la precisione, far vedere con un esempio che esistono due soluzioni y e z della stessa equazione differenziale e due punti $x_0 < x_1$ tali che $y(x_0) < z(x_0)$ e $y(x_1) > z(x_1)$.

4.17. - Sia $f : A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e siano y, z funzioni di classe C^1 su un intervallo I tali che (i) $\dot{y} \le f(x, y)$ su I, (ii) $\dot{z} > f(x, z)$ su I, (iii) $z(x_0) > y(x_0)$. Dimostrare che $z > y$ per $x > x_0$.

Traccia. 1) Cominciare dal caso $z(x_0) > y(x_0)$. 2) Supporre per assurdo che l'enunciato non valga e dedurne che esiste $x_1 > x_0$ tale che $z(x_1) = y(x_1)$ e $z(x) > y(x)$ per ogni $x \in (x_0, x_1)$. 3) Dimostrare che $\dot{z}(x_1) \le \dot{y}(x_1)$ prendendo il limite dei rapporti incrementali in x_1 e $x < x_1$. 4) Utilizzare le ipotesi (i) e (ii) per ottenere che invece $\dot{z}(x_1) > \dot{y}(x_1)$.

4.18. - Far vedere che il risultato dell'Esercizio 4.17 vale anche se $z(x_0) = y(x_0)$.

Traccia. Dimostrare che $\dot{z}(x_0) > \dot{y}(x_0)$ e dedurne che $z(x) \ge y(x)$ in un intorno destro di x_0. Ricondursi quindi al caso precedente.

4.19. - Completare la seguente dimostrazione alternativa del Teorema 4.6, valida per il caso in cui f è Lipschitziana nella variabile y con costante L.

Traccia. 1) Per ogni $\varepsilon > 0$ porre $z_\varepsilon(x) := z(x) + \varepsilon e^{2Lx}$, e dimostrare che $\dot{z}_\varepsilon > f(x, z_\varepsilon)$. 2) Applicare gli Esercizi 4.17 e 4.18 per far vedere che $z_\varepsilon \ge y$ per $x > x_0$. 3) Passare al limite per $\varepsilon \to 0$ ed ottenere che $z \ge y$ per $x > x_0$.

4.20*. - Siano A, f, Ω e Φ definite come nell'Osservazione 4.5(iii). Scriviamo $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ come $z = (z', z'')$. Dimostrare che
(a) l'insieme Ω è aperto;
(b) la funzione Φ è localmente Lipschitziana su Ω;
(c) la funzione Φ è derivabile nella variabile x e soddisfa

$$\begin{cases} \partial_x \Phi(x, z) = f(x, \Phi(x, z)) & \text{per ogni } (x, z) \in \Omega, \\ \partial_x \Phi(z', z) = z'' & \text{per ogni } z \in A. \end{cases}$$

4.21**. - Siano A, f, Ω e Φ definite come nell'Osservazione 4.5(iii). Dimostrare che se f è di classe C^1 allora Φ è pure di classe C^1.

Capitolo 5. Esponenziale di matrici

[versione: 21 aprile 2006]

Definiamo l'esponenziale e^A per tutte le matrici quadrate A come somma dell'usuale serie esponenziale. Usando questa funzione è possibile estendere la nota formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine ai sistemi di equazioni lineari del primo ordine.

5.1. Definizione. - Sia k un intero positivo. Per ogni matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ poniamo

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \ . \tag{5.1}$$

In questa definizione si segue la convenzione $A^0 = I$ per ogni A, con I la matrice identità.

Prima di determinare le proprietà dell'esponenziale di matrici, dobbiamo chiederci se la precedente definizione è ben posta. Per far questo, dobbiamo prima specificare alcuni dettagli riguardo alla norma nello spazio delle matrici.

5.2. Lo spazio delle matrici. - Indichiamo con $\mathbb{R}^{k\times k}$ lo spazio vettoriale delle matrici $k \times k$. Data $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$, la coordinata A_{ij} di indici i, j, compresi tra 1 ed k, corrisponde come al solito al coefficiente nella riga i e colonna j. Su $\mathbb{R}^{k\times k}$ consideriamo la solita norma euclidea

$$|A| := \Big(\sum_{ij} |A_{ij}|^2 \Big)^{1/2} \ .$$

Oltre alle solite proprietà della norma, abbiamo che

$$|AB| \le |A|\,|B| \tag{5.2}$$

per ogni coppia di matrici A, B (Esercizio 5.19).

5.3. L'esponenziale è ben definito. - Come in tutti gli spazi normati completi, una serie di matrici $\sum A_n$ converge se converge *assolutamente*, cioè se la serie dei moduli $\sum |A_n|$ è finita (Esercizio 5.1). In tal caso si ha anche $|\sum A_n| \le \sum |A_n|$. Nel caso specifico della serie (5.1) abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{A^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A^n|}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^n}{n!} = e^{|A|} < +\infty \ .$$

Quindi la serie converge e si ha

$$|e^A| \le e^{|A|} \ .$$

Infine e^A ed A commutano, cioè $e^A A = A e^A$.

5.4. Continuità dell'esponenziale. - Le funzioni $A \mapsto A^n/n!$ sono tutte continue (Esercizio 5.20), e la loro serie converge *totalmente* su ogni palla B_r di centro l'origine e raggio r nello spazio delle matrici. Infatti la stessa stima di prima dà anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|A|\le r} \left| \frac{A^n}{n!} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} = e^r < +\infty \ .$$

Ne consegue che la funzione $A \mapsto e^A$ è continua su B_r per ogni $r > 0$, ed quindi è continua su tutto $\mathbb{R}^{k\times k}$.

La serie che definisce l'esponenziale di matrici è una serie di potenze con raggio di convergenza $+\infty$. In analogia con la teoria delle serie di potenze di numeri reali (o complessi), uno si aspetterebbe che la mappa $A \mapsto e^A$ fosse di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^{k\times k}$. In effetti le cose stanno così, tuttavia per dimostrarlo bisognerebbe sviluppare la teoria delle serie di potenze sullo spazio delle matrici (o più in generale su un algebra normata).

Elenchiamo ora le proprietà fondamentali dell'esponenziale.

5.5. Proposizione. - *Se A e B sono matrici $k \times k$ che commutano, allora*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \ . \tag{5.3}$$

Dimostrazione. - Si vede subito che

$$e^A\, e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^n B^m}{n!m!} \ . \tag{5.4}$$

Inoltre, usando il binomio di Newton (Esercizio 5.22) e l'identità $\binom{h}{n} = \dfrac{h!}{n!(h-n)!}$,

$$e^{A+B} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(A+B)^h}{h!} = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{h} \frac{A^n B^{h-n}}{n!(h-n)!} \ . \tag{5.5}$$

Ora è facile convincersi che le somme in (5.4) e (5.5) hanno gli stessi addendi, e quindi coincidono. $\square$

Ad essere precisi, il fatto che le serie in (5.4) e (5.5) coincidono dipende dal fatto che convergono assolutamente e pertanto l'ordine di sommazione non conta. L'ipotesi che A e B commutano è necessaria per utilizzare il binomio di Newton. Senza questa ipotesi, l'identità (5.3) potrebbe non valere (Esercizio 5.4).

5.6. Proposizione. - *Sia A una matrice $k\times k$. Allora la funzione che ad ogni $x \in \mathbb{R}$ associa la matrice e^{Ax} è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e*

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = A\, e^{Ax} \ . \tag{5.6}$$

Dimostrazione. - Calcoliamo il rapporto incrementale della funzione in x:

$$\frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = \frac{e^{Ah}e^{Ax} - e^{Ax}}{h} = \frac{e^{Ah} - I}{h} e^{Ax} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} h^{n-1}\right)}_{\Phi(h)} e^{Ax} \ ,$$

e quando $h \to 0$, la funzione $\Phi(h)$ converge a $\Phi(0) = A$ per continuità. La continuità di $\Phi(h)$ segue dal fatto che è la somma di una serie di funzioni continue di h che convergono *totalmente* su ogni intervallo $[-r, r]$ con $r > 0$. $\square$

5.7. Teorema. - *Consideriamo il problema di Cauchy associato ad un sistema di k equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti, vale a dire*

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con A matrice $k \times k$, $b : I \to \mathbb{R}^k$ funzione continua, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^k$. La soluzione di tale problema è

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t-x_0)} b(t)\, dt \right] \quad \textit{per ogni } x \in I. \tag{5.7}$$

Dimostrazione. - Siccome l'esponenziale della matrice nulla è la matrice identità, si vede subito che $y(x_0) = y_0$. Calcoliamo ora la derivata di $y(x)$: applicando la regola di derivazione del prodotto (Esercizio 5.24) si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{y}(x) &= \frac{d}{dx}(e^{A(x-x_0)}) \Big[y_0 + \cdots \Big] + e^{A(x-x_0)} \frac{d}{dx} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t-x_0)} b(t)\, dt \right] \\ &= A\, e^{A(x-x_0)} \Big[y_0 + \cdots \Big] + e^{A(x-x_0)} \Big[e^{-A(x-x_0)} b(x) \Big] \\ &= Ay(x) + b(x) \ . \end{aligned}$$

La derivata di $e^{A(x-x_0)}$ è stata calcolata utilizzando la formula (5.6); la derivata dell'integrale segue dal teorema fondamentale del calcolo; nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'identità $e^B e^{-B} = e^0 = I$. $\square$

Calcolo dell'esponenziale

Calcolare l'esponenziale e^A direttamente a partire dalla definizione può essere molto complicato. Si cerca quindi di ricondursi tramite alcune riduzioni al calcolo dell'esponenziale di matrici più semplici. Per alcune matrici elementari, tuttavia, il calcolo viene fatto (una volta per tutte) a partire dalla definizione.

Nel seguito si dà una formula esplicita per l'esponenziale di alcune classi di matrici elementari, e poi alcune semplici regole che permettono di ridurre il calcolo dell'esponenziale ai casi già noti, o perlomeno al calcolo dell'esponenziale di matrici più semplici.

5.8. Matrici diagonali. - L'esponenziale è dato da

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k} \end{pmatrix} .$$

La dimostrazione di questa formula è immediata.

5.9. Matrici nilpotenti. - Se $A^n = 0$ per qualche n, allora la serie nella definizione di e^A (ed anche di e^{Ax}) si riduce ad una somma finita. Un caso particolarmente interessante sono le matrici sopradiagonali che appaiono nella forma canonica di Jordan. Ad esempio

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t & & & \\ & 0 & t & & \\ & & 0 & t & \\ & & & 0 & t \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! & t^4/4! \\ & 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ & & 1 & t & t^2/2 \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

5.10. Matrici 2×2 antisimmetriche. - L'esponenziale è dato da

$$\exp\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

Questa formula è già nota nel caso $y = 0$ (punto (i)) e la si dimostra a partire dalla definizione nel caso $x = 0$. Per il caso generale basta osservare che la Proposizione 5.5 implica

$$\exp\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} .$$

5.11. Decomposizione in somma di matrici che commutano. - Supponiamo che A si possa decomporre come somma di matrici $A - i$ che commutano a due a due. Allora l'esponenziale di A può essere calcolato a partire da quello delle matrici A_i (supponendo che questo sia noto) grazie alla Proposizione 5.5:

$$\exp(A) = \exp(A_1 + \cdots + A_n) = \exp(A_1) \cdots \exp(A_n) .$$

5.12. Calcolo per coniugio. - Supponiamo che A si scriva nella forma $A = RBR^{-1}$. Allora $A^n = RB^nR^{-1}$ per ogni intero positivo n, e quindi

$$e^A = Re^BR^{-1} ,$$

e analogamente $e^{Ax} = Re^{Bx}R^{-1}$. Questa formula permette di calcolare e^A ed anche di e^{Ax} a partire da e^M e da R dove M è la forma canonica di Jordan di A ed R la relativa matrice di cambio di base (cfr. Esempio 5.17).

5.13. Matrici diagonali a blocchi. - Supponiamo che A sia una matrice $\mathbb{R}^{k\times k}$ della forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

con A_1 matrice $k_1 \times k_1$ ed A_2 matrice $k_2 \times k_2$, con $k_1 + k_2 = k$. Allora

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix} .$$

(Si può quindi dimostrare una formula analoga nel caso che A sia in diagonale a blocchi con più di due blocchi.) La dimostrazione segue immediatamente dalla definizione di esponenziale e dal fatto che per ogni intero positivo n si ha

$$A^n = \begin{pmatrix} A_1^n & 0 \\ 0 & A_2^n \end{pmatrix} .$$

Utilizziamo quanto visto nei paragrafi precedenti per svolgere alcuni calcoli.

5.14. Esempio. - calcolare l'esponenziale di

$$A := \begin{pmatrix} 3x & 2x & x^2 \\ & 3x & 2x \\ & & 3x \end{pmatrix}$$

La matrice A si scrive come somma di $3xI$ e di una matrice nilpotente: queste due matrici commutano e quindi possiamo applicare la formula in 5.11. L'esponenziale della matrice nilpotente viene calcolato direttamente a partire dalla definizione (cfr. 5.9):

$$\exp(A) = \exp(3xI)\exp\begin{pmatrix} 0 & 2x & x^2 \\ & 0 & 2x \\ & & 0 \end{pmatrix} = e^{3x}\begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ & 1 & 2x \\ & & 1 \end{pmatrix} .$$

5.15. Esempio. - Allo stesso modo si calcola l'esponenziale di qualunque blocco di Jordan. Ad esempio

$$\exp\begin{pmatrix} a & t & & \\ & a & t & \\ & & a & t \\ & & & a \end{pmatrix} = e^a\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3 \\ & 1 & t & t^2/2 \\ & & 1 & t \\ & & & 1 \end{pmatrix} .$$

5.16. Esempio. - Utilizzando quanto osservato in 5.13 sulle matrici diagonali a blocchi si può quindi calcolare l'esponenziale di ogni matrice che sia nella forma canonica di Jordan. Ad esempio

$$\exp\begin{pmatrix} a & t & & & \\ & a & t & & \\ & & a & & \\ & & & b & s \\ & & & & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & te^a & t^2e^a/2 & & \\ & e^a & te^a & & \\ & & e^a & & \\ & & & e^b & se^b \\ & & & & e^b \end{pmatrix} .$$

5.17. Esempio. - Utilizzando quanto osservato in 5.12 si può infine calcolare l'esponenziale di e^{Ax} una volta nota la forma canonica di Jordan M di A e la corrispondente matrice di cambio di base R. Si ricordi che se A è diagonalizzabile la matrice R è formata da una base autovettori di A. Questo si applica in particolare alle matrici A il cui polinomio caratteristico ha soluzioni (reali) distinte, oppure a quelle simmetriche (in quest'ultimo caso, prendendo una base ortonormale di autovettori l'inversa di R coincide con la sua trasposta). Ad esempio, la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $1, 6, -4$, per cui

$$e^{Mx} = \begin{pmatrix} e^x & & \\ & e^{6x} & \\ & & e^{-4x} \end{pmatrix} .$$

Una possibile scelta per i corrispondenti autovettori è $(4, 0, -3)$, $(-3, 5, -4)$, e $(3, 5, 4)$. Rinormalizzandoli a vettori unitari otteniamo le matrici di cambio di base

$$R = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ -3\sqrt{2} & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad R^{-1} = R^t = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} \\ -3 & 5 & -4 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$e^{Ax} = Re^{Mx}R^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 32e^x + 9(e^{4x} + e^{6x}) & 15(e^{4x} - e^{6x}) & -24e^x + 12(e^{4x} + e^{6x}) \\ 15(e^{4x} - e^{6x}) & 25(e^{4x} + e^{6x}) & 20(e^{4x} - e^{6x}) \\ -24e^x + 12(e^{4x} + e^{6x}) & 20(e^{4x} - e^{6x}) & 18e^x + 16(e^{4x} + e^{6x}) \end{pmatrix} .$$

Esercizi

5.18. - Sia X uno spazio di Banach, cioè uno spazio normato completo, con norma $|\cdot|_X$. Data una successione di vettori x_n tale che $\sum |x_n|_X < +\infty$, dimostrare che la serie $\sum x_n$ converge, ovvero che la successione delle somme parziali $s_n := x_1 + \cdots + x_n$ ammette limite per $n \to +\infty$; tale limite viene indicato con $\sum x_n$. Dimostrare la disuguaglianza

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Big|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|_X \ . \tag{5.8}$$

Traccia. 1) Dimostrare che per ogni n, m interi positivi con $n < m$ si ha

$$|s_m - s_n|_X = |x_{n+1} + \cdots + x_m|_X \leq |x_{n+1}|_X + \cdots + |x_m|_X \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|_X$$

2) Dimostrare che il valore dell'ultima serie tende a 0 per $n \to +\infty$. 3) Dedurne che la successione s_n è di Cauchy. 4) Dimostrare che $|s_n|_X \leq |x_1|_X + \cdots + |x_n|_X$ e passare al limite per $n \to +\infty$ per ottenere la (5.8).

5.19. - Dimostrare la disuguaglianza (5.2).

Traccia. 1) Osservare che per ogni i, j, il coefficiente $(AB)_{ij}$ è dato dal prodotto scalare del vettore riga A_i e del vettore colonna B^j, e quindi $|A_{ij}| \leq |A_i||B^j|$ per via della disuguaglianza di Schwarz. 2) Elevare al quadrato questa disuguaglianza a prenderne la somma su tutte le coppie di indici i, j.

5.20. - Dimostrare che il prodotto di matrici, visto come funzione da $\mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k}$ (dotato della topologia di spazio prodotto) in $\mathbb{R}^{k\times k}$, è continuo.

5.21. - Dimostrare che se A e B commutano, allora vale la solita formula del binomio di Newton:

$$(A+B)^h = \sum_{n=0}^{h} \binom{h}{n} A^n B^{h-n} \ .$$

5.22. - Dimostrare che la serie di funzioni $\Phi(h)$ nella dimostrazione della Proposizione 5.6 converge totalmente su $[-r, r]$ per ogni $r > 0$.

5.23. - Siano A e B le matrici nilpotenti

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(a) Calcolare A^n, B^n e $(A+B)^n$ per ogni intero n;
(b) calcolare esplicitamente e^A, e^B e e^{A+B};
(c) verificare che le matrici $e^A e^B$, $e^B e^A$, e^{A+B} sono tutte distinte.

5.24. - Siano $F : I \to \mathbb{R}^{n\times m}$ e $G : I \to \mathbb{R}^{m\times k}$ funzioni di classe C^1. Verificare che vale la solita regola di derivazione del prodotto per la funzione $FG : I \to \mathbb{R}^{n\times k}$:

$$(FG)' = F'G + FG' \ .$$

5.25*. - Sia $F : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ una funzione di classe C^1 tale che le matrici $F(x)$ e $F'(x)$ commutano per ogni $x \in I$.

(a) Dimostrare che $(F^n)' = nF'F^{n-1}$ per ogni n intero positivo;
(b) dimostrare che $\big(e^F\big)' = F'\,e^F$;
(c) calcolare e^F per $F(x) := \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e far vedere $\big(e^F\big)' \neq F'\,e^F$.

5.26. - Si consideri il problema di Cauchy associato ad un generico sistema di k equazioni lineari del primo ordine a coefficienti *non costanti*, vale a dire

$$\begin{cases} \dot y = Ay + b \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $A : I \to \mathbb{R}^{k\times k}$ e $b : I \to \mathbb{R}^k$ funzioni continue, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Sia F una primitiva di A che vale 0 in x_0. Verificare che se $F(x)$ e $A(x)$ commutano per ogni $x \in I$ allora la soluzione del problema precedente è data dalla formula

$$y(x) = e^{F(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-F(t)} b(t)\,dt\right] \quad \text{per ogni } x \in I.$$

5.27. - Sia A una matrice $k \times k$ invertibile. Dimostrare che per ogni $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^k$ la soluzione del sistema lineare del secondo ordine

$$\ddot y = A^2 y$$

che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ e $\dot y(x_0) = y_1$ è

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[e^{A(x-x_0)}(y_0 + A^{-1}y_1) + e^{A(x_0-x)}(y_0 - A^{-1}y_1)\right] \ .$$

(Si osservi l'analogia con la formula risolutiva per l'equazione scalare $\ddot y = a^2 y$.)

5.28. - Calcolare e^{Ax} per $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

5.29. - Sia Φ l'applicazione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ che ad ogni numero complesso $z = x + iy$ associa la matrice

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \ .$$

Dimostrare che:
(a) Φ è un applicazione lineare che preserva il prodotto, ovvero $\Phi(z_1 z_2) = \Phi(z_1)\Phi(z_2)$;
(b) $e^{\Phi(z)} = \Phi(e^z)$ per ogni z.

5.30*. - Dimostrare che la classe $\mathscr{F}$ delle matrici reali $k \times k$ diagonalizzabili in senso complesso è densa in $\mathbb{R}^{k\times k}$. Far vedere che questo non vale per la classe $\mathscr{G}$ delle matrici diagonalizzabili in senso reale. Qual è la chiusura di $\mathscr{G}$?

5.31*. - Dimostrare che per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ si ha $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Traccia. 1) Verificare che l'identità vale per le matrici diagonali, reali o complesse. 2) Estendere l'identità alle matrici diagonalizzabili per coniugio. 3) Estendere l'identità a tutte le matrici per densità.

5.32. - Dimostrare che per ogni numero reale a

$$e^a = \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{t}\right)^t \ .$$

Traccia. Scrivere $(1 + a/t)^t$ come $\exp(t\log(1 + a/t))$ e ricordare che $\log(1 + x) \sim x$.

5.33*. - Dimostrare che per ogni matrice quadrata A

$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n \ .$$

Capitolo 6. Esempi ed esercizi sulle equazioni differenziali

[versione: 22 aprile 2006]

Questo capitolo contiene diversi esercizi (per lo più non standard) sulle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Alcuni sono applicazioni significative della teoria sviluppata nei capitoli precedenti, e per questi viene data anche una traccia delle soluzioni.

Trattandosi in molti casi di esempi tratti dalla meccanica, dove l'incognita è la posizione di una o più masse puntiformi in funzione del tempo, in tutto questo capitolo la variabile indipendente nelle equazioni differenziali è indicata dalla lettera t e non da x; quest'ultima indicherà invece la funzione incognita.

6.1. - Sia P un punto materiale nello spazio con massa m, velocità $\mathbf{v}$ e accelerazione $\mathbf{a}$. Supponiamo che P si muova secondo il campo di forza associato ad un energia potenziale U, vale a dire secondo l'equazione della dinamica $m\mathbf{a} = F$ con $F := -\nabla U$. Dimostrare che l'energia meccanica

$$E := \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2 + U$$

si conserva nel tempo.

Soluzione. - Indichiamo con $x = x(t)$ la posizione di P al variare del tempo t. L'equazione della dinamica diventa allora

$$m\ddot{x} + \nabla U(x) = 0$$

e prendendone il prodotto scalare per il vettore $\dot{x}$ si ottiene

$$0 = m\dot{x}\cdot\ddot{x} + \nabla U(x)\cdot\dot{x} = \frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2 + U(x)\Big] = \frac{d}{dt}E\ . \qquad \square$$

6.2. - Nelle stesse ipotesi dell'Esercizio 6.1, supponiamo che P sia anche sottoposto ad una forza di attrito lineare cioè una forza della forma $-\alpha\mathbf{v}$, con α costante positiva. Dimostrare che in tal caso l'energia meccanica E decresce col tempo.

Soluzione. - L'equazione della dinamica è

$$m\ddot{x} + \nabla U(x) = -\alpha\dot{x}\ .$$

Procedendo come nell'Esercizio 6.1, si ottiene

$$\frac{d}{dt}E = -\alpha|\dot{x}|^2 = -\alpha|\mathbf{v}|^2\ . \qquad \square$$

6.3. - Sia $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ una funzione localmente Lipschitziana nella ultime due variabili, e sia $x : (a,b) \to \mathbb{R}^k$ una soluzione massimale del sistema di k equazioni del secondo ordine $\ddot{x} = f(t,x,\dot{x})$. Dimostrare che

(a) se $a > -\infty$ allora $|x|^2 + |\dot{x}|^2$ tende a $+\infty$ per $t \to a^+$;

(b) se $b < +\infty$ allora $|x|^2 + |\dot{x}|^2$ tende a $+\infty$ per $t \to b^-$.

Soluzione. - Introdurre la variabile $y = \dot{x}$, scrivere il sistema $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ come un sistema di $2k$ equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(t, x, y) \end{cases}$$

ed applicare il Corollario 3.9 a questo sistema. $\square$

6.4. - Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dimostrare ogni soluzione x dell'equazione

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \tag{6.1}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ (cioè la soluzione esiste per tutti i tempi).

Soluzione. - Una possibile dimostrazione consiste nello scrivere l'equazione come un sistema del primo ordine e poi applicare il teorema di esistenza per tutti i tempi (Teorema 3.10). Questo però richiederebbe l'ipotesi aggiuntiva che V' sia una funzione a crescita lineare per $x \to \pm\infty$.

Per quanto visto nell'Esercizio 6.3, ci basta dimostrare che la grandezza $|x|^2 + |\dot{x}|^2$ non tende all'infinito in tempo finito, ovvero non può avere asintoti verticali. Per quanto visto nell'Esercizio 6.1 la quantità

$$E := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) \tag{6.2}$$

risulta costante su tutto l'intervallo di definizione della soluzione. Ne consegue che sia $|\dot{x}|^2/2$ che $V(x)$ sono limitate superiormente dalla costante E. Siccome poi $V(x)$ tende a $+\infty$ quando $|x| \to +\infty$, deve esistere R tale che $V(x) > E$ per $|x| > R$, e dunque se $V(x) \leq E$, $|x|$ è limitata superiormente da R. Quindi la grandezza $|x|^2 + |\dot{x}|^2$ è maggiorata da $R^2 + 2E$, e pertanto non può avere asintoti verticali. $\square$

6.5. - Sia V come nell'Esercizio 6.4, ed α numero reale. Dimostrare ogni soluzione x dell'equazione

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + V'(x) = 0 \tag{6.3}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione. - Procedendo come per l'Esercizio 6.4, ci basta dimostrare che la funzione E in (6.2) non può tendere all'infinito in tempo finito, ovvero non può avere asintoti verticali.

Ci limitiamo al caso $\alpha \leq 0$; il caso opposto è analogo. Possiamo supporre inoltre che V sia positiva: infatti V tende all'infinito a $\pm\infty$ e quindi ammette un valore minimo m, e sostituire V con la funzione positiva $V - m$ non altera l'equazione (6.3).

Come abbiamo visto nella soluzione dell'Esercizio 6.2,

$$\frac{d}{dt}E = -\alpha\dot{x}^2 \ . \tag{6.4}$$

Quindi E è una funzione crescente, e preso t_0 nell'insieme di definizione di x,

$$E(t) \leq E(t_0) \quad \text{per } t \leq t_0. \tag{6.5}$$

Inoltre, tenuto conto della positività di V, la (6.4) implica

$$\frac{d}{dt}E = -\alpha\dot{x}^2 \leq -2\alpha\Big[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)\Big] = -2\alpha E \ ,$$

e per il lemma di Gronwall

$$E(t) \leq e^{-2\alpha(t-t_0)}E(t_0) \quad \text{per } t \geq t_0. \tag{6.6}$$

Le stime (6.5) e (6.6) implicano che E non può avere asintoti verticali. $\square$

6.6. - Generalizzare il risultato dell'Esercizio 6.5 alle soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \nabla V(x) = 0 \ ,$$

dove α è un numero reale e $V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che tende a $+\infty$ per $|x| \to +\infty$.

6.7*. - Dato a numero reale positivo, si consideri l'equazione del secondo ordine

$$\ddot{x} = -4a^2 x^3 \ . \tag{6.7}$$

Dimostrare che per ogni soluzione x non identicamente nulla della (6.7) vale quanto segue:

(a) x è definita su tutto $\mathbb{R}$;

(b) x è periodica di periodo $T := \dfrac{C}{aL}$, dove L è l'ampiezza di oscillazione di x e

$$C := 2\sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}} \ ;$$

(c) x è simmetrica, ovvero $x(t + T/2) = -x(t)$ per ogni t.

Soluzione. - (a) L'equazione (6.7) corrisponde alla (6.1) per $V(x) = a^2 x^4$, e per quanto visto nell'Esercizio 6.4, le soluzioni di questa equazione esistono per tutti i tempi e soddisfano la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + a^2 x^4 = c \text{ costante.} \tag{6.8}$$

(b) La funzione x non è costante, altrimenti dovrebbe essere identicamente nulla (verificare!). Pertanto l'insieme aperto $\{t : \dot{x}(t) \neq 0\}$ non è vuoto; prendiamone quindi una componente connessa $I = (t_0, t_1)$. Dunque $\dot{x}(t_0) = \dot{x}(t_1) = 0$ e la (6.8) implica

$$a^2 x^4(t_0) = a^2 x^4(t_1) = c \ . \tag{6.9}$$

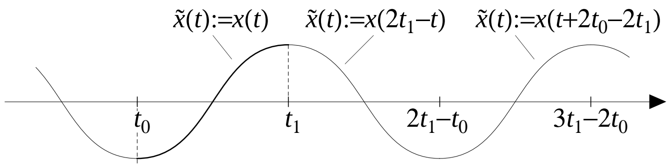
Inoltre $\dot{x}$ ha segno costante in I, supponiamo positivo (il caso opposto si tratta in modo analogo). Quindi in I, $x(t)$ cresce tra un valore minimo $x(t_0)$ ed un valore massimo $x(t_1)$, e per la (6.9) questi due valori sono uno l'opposto dell'altro, ovvero $x(t_0) = -M$ e $x(t_1) = M$ dove $M = L/2$ è la semi-oscillazione di x (nell'intervallo I), e la (6.9) implica $c = a^2 M^4$. La (6.8) diventa allora

$$\dot{x} = a\sqrt{2(M^4 - x^4)} \ ,$$

da cui si ottiene

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{-M}^{M} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{-M}^{M} \frac{dx}{a\sqrt{2(M^4 - x^4)}} = \frac{1}{aM\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}} = \frac{C}{4aM} \ .$$

Costruiamo ora una funzione $\tilde{x}$ come segue: per cominciare, $\tilde{x}$ è posta uguale a x nell'intervallo $[t_0, t_1]$. Poi la estendiamo all'intervallo $[t_1, 2t_1 - t_0]$ per riflessione rispetto all'asse $t = t_1$, ponendo cioè $\tilde{x}(t) := x(2t_1 - t)$. Per successive riflessioni estendiamo $\tilde{x}$ a tutto $\mathbb{R}$.



Usando il fatto che $\dot{x} = 0$ agli estremi dell'intervallo (t_0, t_1), è facile verificare che $\tilde{x}$ è una funzione di classe C^2 con periodo

$$T = 2(t_1 - t_0) = \frac{C}{2aM} = \frac{C}{aL} ,$$

e soddisfa l'equazione (6.7). Poiché inoltre i valori di $\tilde{x}$ e x e delle loro derivate coincidono in un qualunque punto di $[t_0, t_1]$, il teorema di unicità implica che che $\tilde{x}$ ed x coincidono.

c) Si verifica facilmente che la funzione $\hat{x}(t) := -x(t + T/2)$ soddisfa l'equazione (6.7), e che i valori di $\hat{x}$ e x e delle loro derivate coincidono nel punto t_0. Pertanto $\hat{x}$ e x coincidono ovunque, ovvero $x(t + T/2) = -x(t)$. □

6.8*. - Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 tale che $V(x)$ tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dimostrare che ogni soluzione non costante x dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + V'(x) = 0$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica di periodo

$$T = \sqrt{2} \int_m^M \frac{dx}{\sqrt{V(M) - V(x)}} ,$$

dove M ed m sono rispettivamente il valore massimo e minimo di x. Inoltre $V(M) = V(m)$.

6.9*. - Sia f una funzione positiva di classe C^1 su $[0, +\infty)$ tale che f' è limitata e

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt < +\infty.$$

Dimostrare che f tende a 0 per $t \to +\infty$.

6.10*. - Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa di classe C^2 che tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$, e sia α un numero reale positivo. Dimostrare che ogni soluzione x dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + V'(x) = 0 \tag{6.10}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ e converge al punto di minimo di V per $t \to +\infty$, mentre $\dot{x}$ converge a 0.

Soluzione. - Abbiamo già visto nell'Esercizio 6.5 che ogni soluzione x è definita su tutto $\mathbb{R}$. Sappiamo inoltre che la funzione E definita in (6.2) soddisfa l'equazione (6.4), ed è quindi una funzione decrescente in t che ammette limite finito L a $+\infty$. Inoltre, fissato $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \dot{x}^2\, dt = \frac{E(t_0) - L}{\alpha} < +\infty . \tag{6.11}$$

Siccome E è limitata sulla semiretta $[t_0, +\infty)$, sia $\dot{x}$ che x sono limitate (cfr. Esercizio 6.4), e dall'equazione (6.10) si deduce che anche $\ddot{x}$ è limitata; ricordando la (6.11) possiamo allora applicare l'Esercizio 6.8 alla funzione $f := \dot{x}^2$, ottenendo che $\dot{x}$ converge a 0 per $t \to +\infty$.

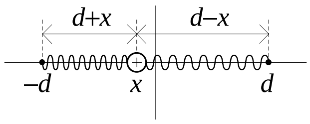
Poiché $\dot{x}$ converge a 0, la convergenza di E a L implica la convergenza di $V(x)$ a L. Siccome V è strettamente convessa, $V^{-1}(L)$ consiste di al più due punti; se ne deduce che x deve convergere a uno di questi due punti (questa asserzione andrebbe dimostrata), che indichiamo con x_0. Passando ora al limite nell'equazione (6.10) si ottiene che $\ddot{x}$ converge a $-V'(x_0)$. Ma l'unico limite per $\ddot{x}$ che sia compatibile con il fatto che $\dot{x}$ tende a 0 è 0, e quindi $V'(x_0) = 0$, ovvero x_0 è il punto di minimo di V. □

6.11**. - Sia $V : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che tende a $+\infty$ per $|x| \to +\infty$ e sia α un numero reale positivo. Dimostrare che ogni soluzione x del sistema

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \nabla V(x) = 0 \tag{6.12}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ e, per $t \to +\infty$, converge a un punto x_0 tale che $\nabla V(x_0) = 0$, mentre $\dot{x}$ converge a 0.

6.12. - Si consideri una massa puntiforme m agganciata a due molle lineari identiche lunghezza a riposo d_0 e costante di richiamo K, fissate nei punti $(\pm d, 0)$ con $d > d_0$. (vedi figura).



(a) Scrivere l'equazione differenziale che descrive il movimento di questa massa, assumendo che sia vincolata a muoversi sull'asse delle x e che non ci sia attrito.

(b) Determinare la frequenza delle oscillazioni di tale massa.

Soluzione. - Per scrivere l'equazione della dinamica, si ricordi che la forza esercitata da ciascuna molla è uguale in modulo a $K\Delta$ dove Δ è il la differenza tra la lunghezza della molla e la lunghezza a riposo d_0. La forza esercitata dalla molla di sinistra è quindi $-K(d - d_0 + x)$, mentre quella esercitata dalla molla di destra è $K(d - d_0 - x)$. Pertanto

$$m\ddot{x} = -2Kx \ . \tag{6.13}$$

Ovviamente $x = 0$ è l'unico punto di equilibrio, cioè $x = 0$ è l'unica soluzione costante dell'equazione della dinamica (6.13), e le altre soluzioni sono sinusoidi con frequenza

$$\omega := \sqrt{2K/m} \ . \qquad \square$$

Osservazione. - L'equazione (6.13) può essere ottenuta a partire dalla legge di conservazione dell'energia meccanica: siccome l'energia potenziale accumulata in ciascuna molla è pari a $K\Delta^2/2$, abbiamo che

$$E = \frac{K}{2}\left[(d - d_0 + x)^2 + (d - d_0 - x)^2\right] + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \text{costante.}$$

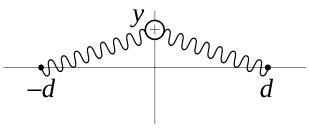
Derivando rispetto al tempo e dividendo per $\dot{x}$ si ottiene nuovamente la (6.13).

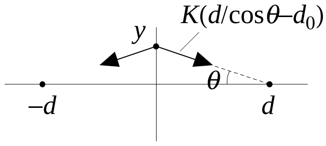
Osservazione. - Consideriamo un'equazione differenziale del secondo ordine autonoma (cioè in cui t non appare esplicitamente) in forma generale: $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$. Le soluzioni costanti nel tempo di questa equazione corrispondono ai valori di x tali che $f(x, 0) = 0$, detti quindi punti di *equilibrio*. Senza stare a dare definizione precise, diciamo che un punto di equilibrio x_0 è *stabile* se le soluzioni x dell'equazione con dati iniziali $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ sufficientemente vicini a $(x_0, 0)$ restano vicine a x_0 nel futuro, ed altrimenti diciamo che x_0 è un punto di equilibrio instabile.

Linearizzare l'equazione in x_0 significa sostituire ad f il suo sviluppo di Taylor all'ordine 1 nel punto $(x_0, 0)$, sostituzione che dà luogo ad un'equazione lineare omogenea del secondo ordine, detta *equazione linearizzata*. Il presupposto di questa operazione è che, in generale, la stabilità o instabilità di un punto di equilibrio x_0 si traduca in stabilità o instabilità di 0 per l'equazione linearizzata. Inoltre, ci si aspetta che se x_0 è stabile, le soluzioni dell'equazione originale con dati iniziali $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ molto vicini a $(x_0, 0)$ siano approssimate bene da quelle dell'equazione linearizzata. Tipico esempio di questa procedura è la sostituzione dell'equazione del pendolo $\ddot{\theta} = -(g/\ell)\sin\theta$ con l'equazione linearizzata $\ddot{\theta} = -(g/\ell)\theta$ che si trova in tutti i libri di fisica.

Ci guarderemo bene dal dimostrare alcun risultato rigoroso in questa direzione.

6.13. - Si consideri il sistema meccanico descritto nell'Esercizio 6.12, supponendo stavolta che la massa si muova senza attrito lungo l'asse delle y. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio.





Soluzione. - Introducendo l'angolo θ come in figura, si vede subito che la somma delle componenti delle forze lungo l'asse y è

$$-2K\Big(\frac{d}{\cos\theta} - d_0\Big)\sin\theta \ .$$

Siccome $\tan\theta = \dfrac{y}{d}$ e $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{d^2+y^2}}$, l'equazione della dinamica diventa

$$m\ddot{y} = -2K\left(1 - \frac{d_0}{\sqrt{d^2+y^2}}\right)y \ . \tag{6.14}$$

Chiaramente $y = 0$ è l'unico punto di equilibrio. Sostituendo alla funzione che costituisce il termine di destra della (6.14) il suo sviluppo di Taylor in 0 al primo ordine rispetto alla variabile y otteniamo *l'equazione linearizzata* attorno al punto di equilibrio 0:

$$m\ddot{y} = -2K\Big(1 - \frac{d_0}{d}\Big)y \ .$$

Pertanto la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}\Big(1 - \frac{d_0}{d}\Big)} \ . \qquad \square$$

Osservazione. - L'equazione (6.14) può essere ottenuta più facilmente a partire dalla legge di conservazione dell'energia, vale a dire

$$K\big(\sqrt{d^2+y^2} - d_0\big)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \text{costante},$$

derivando rispetto al tempo e poi dividendo per $\dot{y}$.

6.14. - Risolvere l'Esercizio 6.13 facendo l'ipotesi che la massa sia *anche* soggetta ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse y. Dimostrare che esiste un'unico punto di equilibrio y_0 e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a y_0.

6.15. - Dato il sistema meccanico descritto nell'Esercizio 6.12, supponiamo ora che la massa sia libera di muoversi senza attrito su nel piano xy.

(a) Determinare l'equazione della dinamica.

(b) Determinare i punti di equilibrio e la linearizzazione del'equazione in questi punti.

Soluzione. - Siano (x, y) le coordinate della massa. La forza esercitata dalla molla di destra ha modulo uguale a K per la distanza del punto (x, y) dal punto $(d, 0)$ meno d_0, ed è diretta dal primo punto verso il secondo, cioè

$$-K\Big(1 - \frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}}\Big)(x - d, y) .$$

Analogamente, la forza esercitata dalla molla di sinistra è

$$-K\Big(1 - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2 + y^2}}\Big)(x + d, y) .$$

Pertanto l'equazione della dinamica diventa

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -Kx\Big(2 - \frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\Big) - Kd\Big(\frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\Big) , \\ m\ddot{y} = -Ky\Big(2 - \frac{d_0}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{d_0}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}}\Big) . \end{cases}$$

Ricordando che $d > d_0$ si dimostra che $(0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio. La linearizzazione del sistema precedente in $(0, 0)$ è

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2Kx , \\ m\ddot{y} = -2K\Big(1 - \frac{d_0}{d}\Big)y . \end{cases}$$ □

6.16. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, e sia P una massa puntiforme vincolata a muoversi senza attrito sulla curva di equazione $y = f(x)$ essendo soggetta ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse y.

(a) Trovare l'equazione che descrive il moto di P.

(b) Dimostrare che i punti di equilibrio corrispondono ai punti in cui si annulla f'.

(c) Discutere il comportamento delle soluzioni in prossimità dei punti di equilibrio.

Soluzione. - Indichiamo con $(x, f(x))$ le coordinate del punto P. La velocità di P è allora $(1, f(x))\dot{x}$, e la legge di conservazione dell'energia diventa

$$g\, f(x) + \frac{1}{2}\big[1 + (f'(x))^2\big]\dot{x}^2 = \text{costante.}$$

Derivando rispetto al tempo e dividendo quindi per $\dot{x}$ otteniamo

$$\ddot{x} = -\frac{f'(x)}{1 + (f'(x))^2}(g + f''(x)\dot{x}^2) . \tag{6.15}$$

Chiaramente, le uniche soluzioni costanti di questa equazione corrispondono ai valori di x per cui $f'(x) = 0$. Detto x_0 uno di questi, possiamo linearizzare l'equazione (6.15) in x_0 ottenendo

$$\ddot{x} = -g\, f''(x_0)x . \tag{6.16}$$

Ne deduciamo che, per $f''(x_0) > 0$, x_0 è un punto di equilibrio stabile, e la frequenza delle piccole oscillazioni vicino ad x_0 è $\omega = \sqrt{g\, f''(x_0)}$, mentre per $f''(x_0) < 0$, x_0 è un punto di equilibrio instabile. □

Osservazione. - Ottenere la (6.15) direttamente dall'equazione della dinamica è più complicato. La ragione è che P è soggetto, oltre che alla forza di gravità $(0,-mg)$, anche ad una forza di reazione vincolare, cioè quella che fa sì che P rimanga sul grafico di f. Siccome la forza di reazione vincolare annulla la forza centripeta (si ricordi che P non si sta muovendo lungo una traiettoria retta!) la sua componente nella direzione tangente al vincolo è nulla. Pertanto la componente tangente al vincolo dell'accelerazione deve essere uguale alla componente tangente al vincolo della accelerazione di gravità, ovvero

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) \cdot (1, f'(x)) = (0, -g) \cdot (1, f'(x)) \ .$$

Tenendo conto del fatto che la condizione $y = f(x)$ implica $\ddot{y} = f'(x)\,\ddot{x} + f''(x)\,\dot{x}^2$, l'equazione precedente diventa

$$(\ddot{x}, f'(x)\,\ddot{x} + f''(x)\,\dot{x}^2) \cdot (1, f'(x)) = -g\,f'(x) \ ,$$

e semplificando riotteniamo la (6.15).

6.17. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^2. Ripetere l'Esercizio 6.16 nell'ipotesi che P sia vincolato a muoversi sulla curva di equazione $(x, y) = f(z)$ e sia soggetto ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse z.

6.18*. - Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Ripetere l'Esercizio 6.16 nell'ipotesi che P sia vincolato a muoversi sulla superficie di equazione $z = f(x, y)$ e sia soggetto ad un'accelerazione di gravità g con direzione opposta all'asse z.

6.19 - Oscillatore armonico k-dimensionale. - Sia A una matrice $k \times k$ simmetrica e definita positiva. Scrivere le soluzioni del sistema del secondo ordine

$$\ddot{x} + Ax = 0 \tag{6.17}$$

Soluzione. - Sia $(e_1, \ldots, e_k)$ una base di autovettori di A corrispondenti agli autovalori $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$; siccome A è simmetrica e definita positiva, gli autovalori λ_i sono tutti reali e positivi e tale base esiste. Scriviamo quindi x in termini di questa base, consideriamo cioè il cambio di variabile

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \ .$$

Si vede allora che in queste nuove variabili il sistema (6.17) si diagonalizza, ovvero si riduce ad un sistema di n equazioni *indipendenti* nelle incognite y_i:

$$\ddot{y}_i = -\lambda_i y_i \quad \text{per ogni } i.$$

Calcolando le soluzioni di ognuna di queste equazioni si ottiene allora che le soluzioni di (6.17) sono tutte e sole le funzioni

$$x = \sum_{1}^{k} \left[a_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) + b_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i}\, t\right) \right] e_i \tag{6.18}$$

con $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$. $\square$

6.20. - Nelle ipotesi dell'Esercizio 6.19, dire quali condizioni sulla matrice A garantiscono che le soluzioni del sistema (6.17) sono tutte periodiche.

6.21*. - Determinare l'insieme delle matrici matrici diagonalizzabili A che soddisfano ciascuna delle seguenti condizioni:

a) ogni soluzione di (6.17) è limitata su tutto $\mathbb{R}$;
b) ogni soluzione di (6.17) è periodica su tutto $\mathbb{R}$;
c) ogni soluzione di (6.17) è infinitesima per $t \to +\infty$.

6.22*. - Risolvere l'esercizio precedente rimuovendo l'ipotesi che A sia diagonalizzabile.

6.23 - Oscillatore armonico smorzato k-dimensionale. - Sia A una matrice $k \times k$ simmetrica e definita positiva, ed a un numero reale positivo. Scrivere la soluzione generale dell'equazione

$$\ddot{x} + a\dot{x} + Ax = 0 \ .$$

6.24. - Risolvere il sistema $\begin{cases} \ddot{x} = -2x + y \\ \ddot{y} = x - 2y \end{cases}$ con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \dot{x}(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$.

6.25. - Trovare, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, la soluzione generale del sistema $\begin{cases} \ddot{x} = -3x + y + \sin(\omega t) \\ \ddot{y} = x - 3y + \sin(\omega t) \end{cases}$.

6.26*. - Sia A una matrice simmetrica $k \times k$, ω un numero reale ed e un vettore assegnato. Dire in quali casi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + Ax = \sin(\omega t)e \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

è limitata su $[0, +\infty)$.

6.27. - Dati n punti materiali nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ che si muovono secondo la legge di gravitazione universale, indichiamo con $m_1, \ldots, m_n$ le loro masse e con $x_1, \ldots, x_n$ le loro posizioni al variare del tempo (quindi ogni x_i è una funzione di t a valori in $\mathbb{R}^3$).
(a) Scrivere le equazioni del moto in funzione di x_i.
(b) Dimostrare la conservazione dell'energia e della quantità di moto.
(c) Dire se le soluzioni esistono per tutti i tempi.

Soluzione. - Sia G la costante di gravitazione universale. Allora

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -\sum_{j\neq 1} Gm_1m_j \dfrac{x_1 - x_j}{|x_1 - x_j|^3} \ , \\ m_2\ddot{x}_2 = -\sum_{j\neq 2} Gm_2m_j \dfrac{x_2 - x_j}{|x_2 - x_j|^3} \ , \\ \vdots \\ m_n\ddot{x}_n = -\sum_{j\neq n} Gm_nm_j \dfrac{x_n - x_j}{|x_n - x_j|^3} \ . \end{cases} \tag{6.19}$$

Sommando le equazioni in (6.19) otteniamo

$$\sum_i m_i\ddot{x}_i = 0$$

da cui si deriva la conservazione della quantità di moto

$$Q = \sum_i m_i\dot{x}_i = \text{costante.}$$

Per ottenere la conservazione dell'energia, moltiplichiamo scalarmente la i-esima equazione in (6.19) per $\dot{x}_i$ e poi sommiamo su tutti gli i:

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \ddot{x}_i \cdot \dot{x}_i &= -\sum_i \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} \cdot \dot{x}_i \\ &= -\sum_{i<j} G m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3} \cdot (\dot{x}_i - \dot{x}_j)\end{aligned}$$

e poiché $-x/|x|^3$ è il gradiente di $1/|x|$, quest'ultima identità può essere riscritta come segue:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{|x_i - x_j|} \,.$$

Dunque

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{x}_i|^2 + \sum_{i<j} -\frac{G m_i m_j}{|x_i - x_j|} = \text{costante}. \qquad \square$$

Per quanto riguarda l'esistenza delle soluzioni, è ben noto che due masse che in un certo istante hanno velocità relativa nulla finiscono per collidere in tempo finito: ed infatti, per $n = 2$, il problema di Cauchy con dati iniziali

$$\begin{cases} x_1(0) = (r, 0, 0) \\ x_2(0) = (-r, 0, 0) \\ \dot{x}_1(0) = (0, 0, 0) \\ \dot{x}_2(0) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

è risolubile esplicitamente e la soluzione esiste solo per un tempo finito. $\square$

Capitolo 7. Compattezza e Teorema di Ascoli-Arzelà

[versione: 4 giugno 2006]

All'inizio di questo capitolo si richiamano le diverse nozioni di compattezza, e se ne dimostra l'equivalenza per gli spazi metrici. Si caratterizzano quindi gli spazi metrici compatti in termini di completezza e totale limitatezza. Nella seconda parte di questo capitolo si dà un criterio di compattezza per lo spazio delle funzioni continue (Teorema di Ascoli-Arzelà), e si usa questo risultato per dimostrare il Teorema di Peano sull'esistenza di soluzioni dell'equazione $\dot{y} = f(x, y)$ senza ipotesi di Lipschitzianità sulla funzione f.

Compattezza e compattezza sequenziale

A meno che non si specifichi altrimenti, in questo capitolo X è uno spazio metrico. Tuttavia conviene dare la definizione di compattezza e di compattezza per successioni nel contesto più generale degli spazi topologici (di Hausdorff); per fare ciò bisogna prima richiamare alcune definizioni elementari.

7.1. Definizione. - Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Data una successione (x_n) di punti di X, si dice che $x \in X$ è il *limite* di (x_n) se per ogni aperto U che contiene x esiste $\bar{n}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq \bar{n}$ (il limite è unico se lo spazio X è T_0, cioè se dati due punti esiste sempre un aperto che contiene uno ma non l'altro). Si dice invece che x è un *punto di accumulazione* di x_n se per ogni aperto U che contiene x si ha che $x_n \in U$ per infiniti n.

Si dice che X ammette una *base numerabile di aperti* se esiste una famiglia numerabile $\mathscr{F}$ di aperti tale che ogni altro aperto in X può essere scritto come unione di elementi di $\mathscr{F}$.

Un *ricoprimento aperto* di un insieme E contenuto in X è una qualunque famiglia di aperti $\mathscr{F}$ la cui unione contiene E.

7.2. Definizione. - Un sottoinsieme E di uno spazio topologico X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto $\mathscr{F}$ di E ammette un sottoricoprimento finito, cioè esiste una sottofamiglia finita di $\mathscr{F}$ che ricopre E.

L'insieme E si dice *compatto per successioni* se da ogni successione di punti in E si può estrarre (almeno) una sottosuccessione che converge ad un punto di E.

7.3. Osservazioni. - (i) Per il Teorema 7.8 un sottoinsieme di uno spazio metrico è compatto se e solo se è compatto per successioni. Per questa ragione negli spazi metrici si parla solo di compattezza, senza mai specificare "per successioni". Si noti che per gli spazi topologici le nozioni di compattezza e compattezza per successioni non sono in generale equivalenti.

(ii) Le nozioni di compattezza date sopra dipendono esclusivamente dalla topologia indotta su E in quanto sottoinsieme di X, e non dallo spazio ambiente X (questo non vale per tutte le nozioni topologiche: ad esempio, E può essere aperto o meno in X, mentre sarà sempre aperto come sottoinsieme di se stesso). In particolare si sarebbe potuta limitare la definizione di compattezza al solo spazio topologico X, come in effetti viene fatto in molti testi.

Prima di dimostrare l'equivalenza di compattezza e compattezza per successioni, diamo una caratterizzazione di quest'ultima. Per far questo ci serve un'altra definizione.

7.4. Definizione. - Dato X spazio metrico, indichiamo come al solito con $B(x, r)$ la palla aperta di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$, e con $\overline{B}(x, r)$ la corrispondente palla chiusa.

Si dice che un insieme E contenuto in X è *limitato* se il suo diametro è finito, ovvero se è contenuto in una palla di raggio finito. Si dice che E è *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esiste un numero finito di palle di raggio minore o uguale a r che ricopre E.

Si noti che ogni insieme totalmente limitato di uno spazio metrico è anche limitato. In $\mathbb{R}^n$ è vero anche il viceversa, ma non è così per tutti gli spazi metrici (un esempio è lo spazio $C(I)$ delle funzioni continue su un intervallo chiuso I, vedi Esercizio 7.20).

7.5. Teorema. - *Se X è uno spazio metrico, i seguenti enunciati sono equivalenti:*
(i) *X è compatto per successioni;*
(ii) *X è completo e totalmente limitato.*

7.6. Osservazioni. - (i) L'implicazione più rilevante è (ii) $\Rightarrow$ (i), perché dà un criterio effettivo per verificare se uno spazio metrico è compatto.

(ii) Se X è uno spazio metrico completo, la distanza indotta su un sottoinsieme E risulta a sua volta completa se e solo se E è chiuso in X. Pertanto il Teorema 7.5 ha il seguente corollario: un sottoinsieme E di uno spazio metrico completo X è compatto per successioni se e solo se è chiuso e totalmente limitato.

(iii) Per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ la limitatezza equivale alla totale limitatezza, e quindi quanto detto al punto (i) può essere ulteriormente precisato: un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ è compatto per successioni se e solo se è chiuso e limitato. Questo risultato è stato dimostrato in precedenza a partire dal Teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente) e non a caso il punto chiave della dimostrazione del Teorema 7.5 (il passo 1) assomiglia molto alla dimostrazione del Teorema di B.-W.

Il prossimo risultato non è che una parafrasi del Teorema 7.5; la dimostrazione è lasciata per esercizio.

7.7. Corollario. - *Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico completo X. Allora i seguenti enunciati sono equivalenti:*
(i) *ogni successione di punti di E ammette una sottosuccessione che converge in X;*
(ii) *E è totalmente limitato.*

Dimostrazione del Teorema 7.5. - La dimostrazione è suddivisa in più passi. L'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) è dimostrata nei passi 1 e 2, l'implicazione opposta è dimostrata in quelli rimanenti.

Passo 1: se X è totalmente limitato allora ogni successione (x_n) in X ammette una sottosuccessione (x_{n_k}) di Cauchy.

Sia $\mathscr{F}_0$ una famiglia finita di palle di raggio 1 che ricopre X. Allora deve esistere almeno una palla in $\mathscr{F}_0$, che chiamiamo B_0, che contiene x_n per infiniti indici n. Sia n_0 uno qualunque di questi indici.

Sia $\mathscr{F}_1$ una famiglia finita di palle di raggio $1/2$ che ricopre X. Allora deve esistere almeno una palla in $\mathscr{F}_1$, che chiamiamo B_1, tale che $B_0 \cap B_1$ contiene x_n per infiniti indici n. Sia n_1 uno qualunque di questi indici maggiore di n_0.

Sia $\mathscr{F}_2$ una famiglia finita di palle di raggio $1/4$ che ricopre X. Allora deve esistere almeno una palla in $\mathscr{F}_2$, che chiamiamo B_2, tale che $B_0 \cap B_1 \cap B_2$ contiene x_n per infiniti indici n. Sia n_2 uno qualunque di questi indici maggiore di n_1.

Eccetera.

Procedendo a questo modo, per ogni k troviamo una palla B_k di raggio $1/2^k$ tale che $B_0 \cap \ldots \cap B_k$ contiene x_n per infiniti indici n. Indichiamo quindi con n_k uno qualunque di questi indici che sia maggiore di n_{k-1}.

Verifichiamo che (x_{n_k}) è di Cauchy. Dato $\varepsilon > 0$, si prenda $\bar{k}$ tale che $1/2^{\bar{k}} \le \varepsilon$: per ogni $k, h > \bar{k}$, x_{n_k} ed x_{n_h} appartengono a $B_{\bar{k}+1}$ e quindi $d(x_{n_k}, x_{n_h}) \le 1/2^{\bar{k}} \le \varepsilon$.

Passo 2: se X è completo e totalmente limitato allora è compatto per successioni.

Data una successione in X, per il passo 1 possiamo estrarne una sottosuccessione che è di Cauchy, che quindi converge perché X è completo.

Passo 3: se X è compatto per successioni allora è completo.

Sia (x_n) una successione di Cauchy in X. Per la compattezza esiste una sottosuccessione convergente, e poiché (x_n) è di Cauchy deve convergere allo stesso limite (cfr. Esercizio 7.18).

Passo 4: se X è compatto per successioni allora è totalmente limitato.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e indichiamo con $\mathscr{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi D di X con la seguente proprietà: dati due punti distinti $x, y \in D$, allora $d(x, y) \geq \varepsilon$. Non è difficile vedere usando il lemma di Zorn che $\mathscr{F}$ ammette un elemento D massimale rispetto all'inclusione.

Tale insieme D deve essere finito. Se infatti così non fosse, potremmo trovare una successione di punti $x_n \in D$ a due a due distinti, e poiché $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per ogni n, m, questa successione non ammetterebbe alcuna sottosuccessione convergente.

Siccome D è finito, la famiglia $\{B(x, \varepsilon) : x \in D\}$ è finita. Inoltre questa famiglia ricopre X. Infatti, se per assurdo esistesse $y \in X$ che non appartiene ad alcuna di queste palle, avremmo che $d(y, x) \geq \varepsilon$ per ogni $x \in D$, e dunque l'insieme $D \cup \{y\}$ apparterrebbe ad $\mathscr{F}$, in contraddizione con la massimalità di D. $\square$

7.8. Teorema. - *Se X è uno spazio metrico, allora i seguenti enunciati sono equivalenti:*
(i) *X è compatto;*
(ii) *X è compatto per successioni.*

7.9. Osservazioni. - (i) L'enunciato vale ovviamente anche per un sottoinsieme E di uno spazio metrico: E è compatto se e solo se è compatto per successioni.

(ii) Se X non è uno spazio metrico, in generale non vale nessuna implicazione tra gli enunciati (i) ed (ii), vedi Esercizi 7.22 e 7.23.

Dimostrazione. - La dimostrazione è suddivisa in più passi. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) è dimostrata nei passi 1 e 2, l'implicazione opposta è dimostrata in quelli rimanenti.

Passo 1: se X è compatto, ogni successione (x_n) in X ammette un punto di accumulazione.

Supponiamo per assurdo che così non sia. Allora per ogni $x \in X$ esiste un aperto $U(x)$ che contiene x e tale che $x_n \in U(x)$ solo per un insieme finito di indici n. La famiglia $\{U(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, e dunque ammette un sottoricoprimento finito $\{U(x_1), \ldots, U(x_m)\}$, ma l'insieme degli indici n per cui x_n appartiene ad uno qualunque degli $U(x_i)$ è finito, e dunque l'unione di questi aperti non può ricoprire tutto X.

Passo 2: se X è compatto, ogni successione (x_n) in X ammette una sottosuccessione convergente, e dunque X è compatto per successioni.

Sia x un punto di accumulazione di (x_n) (vedi passo 1). Allora dato k intero, x_n appartiene a $B(x, 1/k)$ per infiniti indici. Indichiamo con n_k uno qualunque di questi indici (per la precisione si sceglie n_k per induzione su k, richiedendo che sia maggiore di n_{k-1} per ogni k). Allora la sottosuccessione (x_{n_k}) converge a x.

Passo 3: se X è compatto per successioni, ogni ricoprimento aperto numerabile di X ammette un sottoricoprimento finito.

Sia $\{A_n\}$ un ricoprimento di X, e supponiamo per assurdo che per ogni intero n l'insieme $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ non ricopra X, ovvero che esista un punto x_n che non gli appartiene. Sia allora x il limite di una sottosuccessione convergente di (x_n). Siccome gli aperti A_n ricoprono X, deve esistere $\bar{n}$ tale che x appartiene all'aperto $A_{\bar{n}}$. Ma questo implica che x_n appartiene ed A_n frequentemente, in contraddizione col fatto che, per costruzione, x_n non appartiene ad $A_{\bar{n}}$ quando $n \geq \bar{n}$.

Passo 4: se X è compatto per successioni ed ammette una base numerabile di aperti allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

Sia $\mathscr{F}$ un ricoprimento aperto di X e sia $\mathscr{G}$ una base numerabile di aperti. Sia ora $\mathscr{G}'$ la sottofamiglia degli aperti $B \in \mathscr{G}$ che sono contenuti in qualche $A \in \mathscr{F}$. Siccome ogni $A \in \mathscr{F}$ si scrive come unione di elementi di $\mathscr{G}$, la famiglia $\mathscr{G}'$ ricopre ogni elemento di $\mathscr{F}$, e quindi ricopre X; inoltre, essendo numerabile ammette un sottoricoprimento finito $\{B_1, \dots, B_n\}$ (passo 3). Per definizione, per ogni B_i è contenuto in qualche $A_i \in \mathscr{F}$, e dunque $\{A_1, \dots, A_n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathscr{F}$.

Passo 5: se X è compatto per successioni allora ammette una base numerabile di aperti.

Siccome X è totalmente limitato (Teorema 7.5), per ogni intero n esiste una famiglia finita $\mathscr{F}_n$ di palle aperte di raggio minore o uguale a $1/2^n$ che ricopre X. Dimostriamo che l'unione $\mathscr{F}$ delle famiglie $\mathscr{F}_n$ è la base numerabile cercata; dobbiamo quindi verificare che ogni aperto A in X è uguale all'unione di tutti gli elementi di $\mathscr{F}$ contenuti in A, ovvero che per ogni $x \in A$ esiste B in $\mathscr{F}$ tale che $x \in B$ e $B \subset A$.

Ma questo è ovvio: siccome x è interno ad A, esiste n tale che $B(x, 1/2^n) \subset A$, e per costruzione esiste $B = B(\bar{x}, r)$ appartenente a $\mathscr{F}_{n+1}$ che contiene x. Essendo $r \leq 1/2^{n+1}$, si ha $|x - \bar{x}| < 1/2^{n+1}$ e dunque

$$B = B(\bar{x}, r) \subset B(x, |x - \bar{x}| + r) \subset B(x, 1/2^n) \subset A \,.$$

Passo 6: se X è compatto per successioni allora X è compatto.

Segue immediatamente dai passi 4 e 5. □

Teorema di Ascoli-Arzelà

Come già osservato, la nozione di totale limitatezza non equivale a quella di limitatezza in tutti gli spazi metrici, ed un esempio è lo spazio di Banach $C(I)$ delle funzioni reali continue su un intervallo I chiuso e limitato. Pertanto in tale spazio i compatti sono caratterizzati come gli insiemi chiusi e totalmente limitati, e non semplicemente limitati.

Il problema di questa caratterizzazione è che non è facile verificare se un dato insieme di funzioni è totalmente limitato. Nel Teorema 7.11 si caratterizza la totale limitatezza di un insieme di funzioni in termini di una proprietà più facilmente verificabile, quella di equicontinuità.

7.10. Definizione. - Sia E un insieme in $\mathbb{R}^k$ ed $\mathscr{F}$ una famiglia di funzioni da E in $\mathbb{R}^m$. Le funzioni in $\mathscr{F}$ si dicono *equilimitate* se l'insieme dei valori $\{f(x) : \, f \in \mathscr{F}, \, x \in E\}$ è limitato. Le funzioni in $\mathscr{F}$ si dicono *equicontinue nel punto* $\bar{x} \in E$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ (dipendente da ε e da $\bar{x}$) tale che

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon \text{ per ogni } x \text{ tale che } |x - \bar{x}| \leq \delta \text{ e per ogni } f \in \mathscr{F}.$$

Infine, le funzioni in $\mathscr{F}$ si dicono *equicontinue* se sono equicontinue in ogni punto di E.

7.11. Teorema. - *Sia K un insieme compatto in $\mathbb{R}^k$, e sia $\mathscr{F}$ una famiglia di funzioni equilimitate ed equicontinue da K in $\mathbb{R}^m$. Allora $\mathscr{F}$ è un sottoinsieme totalmente limitato dello spazio di Banach $C(K; \mathbb{R}^m)$.*

Dimostrazione. - Fissato $r > 0$, vogliamo far vedere che è possibile ricoprire $\mathscr{F}$ con un numero finito di insiemi di diametro inferiore a r (cfr. Esercizio 7.17(d)).

Prendiamo dunque $\varepsilon > 0$. Siccome le funzioni in $\mathscr{F}$ sono equicontinue, per ogni $\bar{x} \in K$ esiste $\delta_{\bar{x}} > 0$ tale che

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon \text{ per ogni } x \text{ tale che } |x - \bar{x}| \leq \delta_{\bar{x}} \text{ e per ogni } f \in \mathscr{F}. \tag{7.1}$$

Siccome le palle aperte $\big\{B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) : \, x \in K\big\}$ ricoprono K, è possibile estrarne un sottoricoprimento finito $\big\{B(\bar{x}_i, \delta_{\bar{x}_i}) : \, i = 1, \dots, h\big\}$.

Poiché l'insieme V dei valori assunti dalle funzioni in $\mathscr{F}$ è limitato e contenuto in $\mathbb{R}^m$, V è totalmente limitato e quindi esiste un numero finito di insiemi $\{V_j : j = 1, \dots, \bar{h}\}$ con diametro minore di ε che ricoprono V.

Per ogni $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_h) \in \{1, \dots, \bar{h}\}^h$ poniamo

$$\mathscr{F}_{\mathbf{j}} := \{f \in \mathscr{F} : f(\bar{x}_i) \in V_{j_i} \text{ per } i = 1, \dots, h.\}$$

Chiaramente le famiglie $\mathscr{F}_{\mathbf{j}}$ sono in numero finito e la loro unione è $\mathscr{F}$. Resta da dimostrare che il diametro di ciascuna $\mathscr{F}_{\mathbf{j}}$ è inferiore a 3ε (per concludere la dimostrazione basterà scegliere ε minore di $r/3$).

Date dunque $f, \hat{f} \in \mathscr{F}_{\mathbf{j}}$ ed $x \in K$, prendiamo i tale che $x \in B(\bar{x}_i, \delta_{\bar{x}_i})$. Allora

$$|f(x) - \hat{f}(x)| \le |f(x) - f(\bar{x}_i)| + |f(\bar{x}_i) - \hat{f}(\bar{x}_i)| + |\hat{f}(\bar{x}_i) - \hat{f}(x)| \le 3\varepsilon \tag{7.2}$$

(il primo ed il terzo addendo a destra della disuguaglianza sono minori di ε per via della (7.1) e del fatto che x appartiene a $B(\bar{x}_i, \delta_{\bar{x}_i})$, il secondo è minore di ε perché sia f che $\hat{f}$ appartengono a $\mathscr{F}_{\mathbf{j}}$ e dunque $f(\bar{x}_i)$ e $\hat{f}(\bar{x}_i)$ appartengono allo stesso insieme V_{j_i}). Siccome la (7.2) vale per ogni x in K, $\|f - \hat{f}\| \le 3\varepsilon$. Siccome f e $\hat{f}$ sono due funzioni qualunque in $\mathscr{F}_{\mathbf{j}}$, $\operatorname{diam}(\mathscr{F}_{\mathbf{j}}) \le 3\varepsilon$. $\square$

7.12. Corollario (Teorema di Ascoli-Arzelà). - *Sia K un compatto in $\mathbb{R}^k$ ed $f_n : K \to \mathbb{R}^m$ una successione di funzioni equilimitate ed equicontinue. Allora esiste una sottosuccessione di (f_n) che converge uniformemente.*

Dimostrazione. - Siccome lo spazio $C(K, \mathbb{R}^m)$ è completo, per via del Corollario 7.7 basta dimostrare che l'insieme $\{f_n\}$ è totalmente limitato, e questo segue dal Teorema 7.11. $\square$

7.13. Osservazione. - Verificare se una famiglia $\mathscr{F}$ di funzioni $f : E \to \mathbb{R}^m$ sono equicontinue non è immediato, e quindi viene naturale chiedersi se esistono condizioni, magari più restrittive ma di verifica più diretta, che implichino l'equicontinuità.

(i) È immediato vedere che se le funzioni in $\mathscr{F}$ soddisfano la condizione di Lipschitz rispetto ad una stessa costante L allora sono equicontinue.

(ii) Se E è un intervallo ed $f : E \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1, allora la costante di Lipschitz di f coincide con l'estremo superiore di $|f'|$. Pertanto, se E è un intervallo e le funzioni in $\mathscr{F}$ sono di classe C^1 ed hanno derivate equilimitate, allora sono equicontinue.

(iii) Quanto detto in (ii) si applica anche per le funzioni C^1 a tratti. Una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ si dice *C^1 a tratti* se esiste una partizione $\mathscr{P} := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ del dominio tale che la restrizione di f all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ è di classe C^1 per ogni i. Tale funzione è derivabile (con derivata continua) in tutti i punti diversi da x_i; nei punti x_i esistono sia la derivata destra che la derivata sinistra, ma possono essere diverse. Se E è un intervallo chiuso e limitato e le funzioni in $\mathscr{F}$ sono di classe C^1 a tratti ed hanno derivate equilimitate, allora sono equicontinue.

Teorema di Peano per le equazioni differenziali ordinarie

Concludiamo questo capitolo con il Teorema di Peano per l'esistenza di soluzioni di sistema del primo ordine.

7.14. Teorema. - *Sia A un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ e sia $f : A \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua. Allora, per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in A$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{7.3}$$

ammette almeno una soluzione definita in un intervallo aperto che contiene x_0.

Questo teorema è conseguenza quasi immediata del seguente lemma:

7.15. Lemma. - *Dati un punto* (x_0, y_0) *in* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ *e* ρ, r *numeri reali positivi, sia* U *l'insieme compatto* $[x_0, x_0+\rho]\times\overline{B}(y_0, r)$. *Data una funzione continua* $f : U \to \mathbb{R}^k$, *indichiamo con* M *il massimo di* $|f|$ *su* U *e poniamo*

$$\delta := \min\{\rho, r/M\} .$$

Allora esiste una funzione $y : [x_0, x_0+\delta] \to \overline{B}(y_0, r)$ *di classe* C^1 *tale che* $y(x_0) = y_0$ *e* $\dot{y} = f(x, y)$ *per ogni* x.

Dimostrazione. - Costruiamo y come limite di una successione di soluzioni approssimate y_n. Fissato n intero, poniamo $x_{n,i} = x_0 + i\delta/n$ per ogni $i = 0, \dots, n$ e indichiamo con y_n la funzione continua su $[x_0, x_0+\delta]$ determinata dalle seguenti condizioni:

1) y_n vale y_0 in $x_{n,0} = x_0$;
2) y_n è affine su $[x_{n,0}, x_{n,1}]$ con derivata costantemente uguale a $f(x_{n,0}, y_n(x_{n,0}))$;
3) y_n è affine su $[x_{n,1}, x_{n,2}]$ con derivata costantemente uguale a $f(x_{n,1}, y_n(x_{n,1}))$;
4) eccetera…

Una formula più precisa è la seguente: si prendono i punti $y_{n,i}$ definiti dalla procedura induttiva

$$y_{n,0} := y_0 \quad , \quad y_{n,i+1} := y_{n,i} + f(x_{n,i}, y_{n,i})\frac{\delta}{n} \quad \text{per } i = 0, \dots, n-1,$$

e si pone

$$y_n(x) := y_{n,i} + f(x_{n,i}, y_{n,i})(x - x_i)$$

per ogni $x \in [x_{n,i}, x_{n,i+1}]$ e per ogni $i = 0, \dots, n-1$.

Ricordando che $\delta \le r/M$ e $|f| \le M$ si verifica facilmente che i punti $y_{n,i}$ sono ben definiti per ogni i ed appartengono alla palla chiusa $\overline{B}(y_0, r)$. Pertanto la funzione y_n è ben definita ed assume valori in $\overline{B}(y_0, r)$. Inoltre y_n è continua e di classe C^1 a tratti (anzi, affine a tratti), e $|\dot{y}_n| \le M$.

Quindi le funzioni $y_n : [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}^k$ sono equicontinue (Osservazione 7.13(iii)) ed equilimitate (assumono valori nella stessa palla $\overline{B}(y_0, r)$). Per il Teorema di Ascoli-Arzelà (Lemma 7.12) possiamo estrarne una sottosuccessione (y_{n_m}) che converge uniformemente ad una funzione continua $y : [x_0, x_0+\delta] \to \mathbb{R}^k$. Inoltre $y(x_0) = y_0$ e $y(x) \in \overline{B}(y_0, r)$ per ogni x perché lo stesso vale per tutte le y_n.

Non ci resta che dimostrare che y è di classe C^1 e risolve l'equazione $\dot{y} = f(x, y)$. Com'è noto, basta far vedere che per ogni $x \in [x_0, x_0+\delta]$ la funzione y soddisfa l'equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt . \tag{7.4}$$

Fissiamo $x \in [x_0, x_0+\delta]$. La costruzione di $y_n(x)$ e della successione $y_{n,i}$ implica che, preso j tale che $x_{n,j} \le x \le x_{n,j+1}$,

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= y_{n,j} + f(x_{n,j}, y_{n,j})(x - x_{n,j}) \\
&= y_{n,j-1} + f(x_{n,j-1}, y_{n,j-1})\frac{\delta}{n} + f(x_{n,j}, y_{n,j})(x - x_{n,j}) \\
&= y_{n,j-2} + f(x_{n,j-2}, y_{n,j-2})\frac{\delta}{n} + f(x_{n,j-1}, y_{n,j-1})\frac{\delta}{n} + f(x_{n,j}, y_{n,j})(x - x_{n,j}) \\
&\ \ \vdots \\
&= y_{n,0} + \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{j-1} f(x_{n,i}, y_{n,i})\frac{\delta}{n} + f(x_{n,j}, y_{n,j})(x - x_{n,j})\right]}_{S_n}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Non è difficile riconoscere nell'espressione tra parentesi quadre S_n una somma di Riemann per la funzione $f(t, y_n(t))$ relativa alla partizione $\mathscr{P} := \{x_0 = x_{n,0} < x_{n,1} < \cdots < x_{n,j} < x\}$ dell'intervallo $[x_0, x]$. Dunque tale espressione approssima l'integrale di $f(t, y_n(t))$ su $[x_0, x]$, e per la precisione si ha che

$$S_n = \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt + e_n \tag{7.6}$$

dove l'errore e_n tende a 0 per $n \to +\infty$ (posponiamo la dimostrazione di questo punto essenziale).

Mettendo insieme le equazioni (7.5) e (7.6) e ricordando che $y_{n,0} = y_0$ otteniamo

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt + e_n \ ;$$

prendiamo ora questa identità per la sottosuccessione di indici n_m, e passiamo al limite per $m \to +\infty$: otteniamo così la (7.4).

Per concludere la dimostrazione dobbiamo far vedere che e_n tende a 0. In effetti si ha che

$$|e_n| \le (x - x_0)\, \omega_n(\delta/n) \tag{7.7}$$

dove ω_n è un modulo di continuità per la mappa $t \mapsto f(t, y_n(t))$ (Esercizio 7.31). Siccome y_n soddisfa la condizione di Lipschitz con costante M, la mappa $t \mapsto (t, y_n(t)$ soddisfa la condizione di Lipschitz con costante $1 + M$, e quindi $t \mapsto f(t, y_n(t))$ ha modulo di continuità $\omega_n(t) := \omega((1 + M)t)$ dove ω è un modulo di continuità per f (Esercizio 7.29(e)). Quindi la (7.7) diventa

$$|e_n| \le (x - x_0)\, \omega((1 + M)\delta/n) \tag{7.8}$$

e dunque e_n tende a 0 per $n \to +\infty$. $\square$

7.16. Osservazione. - Nel caso in cui f sia anche Lipschitziana nella variabile y, si può dimostrare che le soluzioni approssimate y_n convergono ad una soluzione y del problema di Cauchy (7.3) senza passare a sottosuccessioni, inoltre e si può dare una stima effettiva di tale convergenza in termini della costante di Lipschitz e del modulo di continuità di f (formula (7.10) nell'Esercizio 7.33). Questa stima implica tra l'altro l'unicità della soluzione (cosa comunque già nota dal Teorema di esistenza ed unicità dimostrato nei capitoli precedenti).

Esercizi

7.17. - Sia E un sottoinsieme dello spazio metrico X. Dimostrare i seguenti enunciati:

(a) E è limitato se e solo se il diametro $\mathrm{diam}(X) := \sup\{d(x, y) : \ x, y \in X\}$ è finito;

(b) se E è totalmente limitato allora è limitato;

(c) se X è $\mathbb{R}^n$ ed E è limitato, allora E è totalmente limitato.

(d) E è totalmente limitato se e solo se per ogni $r > 0$ può essere ricoperto con una famiglia finita di insiemi di diametro minore o uguale a r.

7.18. - Sia (x_n) una successione di Cauchy nello spazio metrico X. Dimostrare che se (x_n) ammette una sottosuccessione convergente allora (x_n) converge allo stesso limite.

7.19. - Sia r un numero reale positivo, e sia (x_n) una successione nello spazio metrico X tale che $d(x_n, x_m) \ge r$ per ogni $n \ne m$. Dimostrare che né (x_n) né alcuna sua sottosuccesione convergono.

7.20. - Sia X lo spazio delle funzioni continue su $I = [0, 1]$, dotato della norma del sup $\|\cdot\|$.

(a) Dare un esempio di successione di funzioni $f_n \in X$ con $\|f_n\| \leq 1$ che converge puntualmente ad una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ non continua.

(b) Dimostrare che la successione (f_n) non ammette sottosuccessioni convergenti in X.

(c) Dimostrare che la palla $\overline{B}(0,1)$ in X non è compatta (per successioni).

(d) Dimostrare che nessuna palla in X con raggio positivo è totalmente limitata.

7.21. - Dato X spazio topologico, si considerino le seguenti proprietà: (i) X è compatto; (ii) X è compatto per successioni. Modificando opportunamente la dimostrazione del Teorema 7.8, dimostrare che l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) vale se X ammette una base numerabile di aperti. Dimostrare poi che l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) vale se ogni punto $x \in X$ ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile (cioè una famiglia numerabile $\mathscr{F}_x$ di aperti che contengono x tale che ogni altro aperto che contiene x contiene anche un elemento di $\mathscr{F}_x$).

7.22*. - Sia X il primo ordinale non numerabile (in altre parole, si tratta di un insieme più che numerabile dotato di un buon ordinamento $\preceq$ con la seguente proprietà: per ogni $x \in X$ l'insieme dei predecessori $\{y : y \preceq x\}$ è finito o numerabile – l'esistenza di un tale insieme è un fatto tutt'altro che banale).

Su X si consideri la topologia indotta dall'ordinamento, cioè quella generata dalla famiglia di tutti gli 'intervalli aperti' $\{x : a \prec x \prec b\}$ con $a, b \in X$. Dimostrare i seguenti enunciati:

(a) ogni insieme numerabile in X ammette un maggiorante;

(b) ogni insieme numerabile in X ammette un estremo superiore;

(c) ogni successione crescente in X ammette limite;

(d) X è sequenzialmente compatto;

(e) X non è compatto.

7.23*. - Dato un insieme I con la cardinalità del continuo, si consideri il prodotto infinito $X := \{0,1\}^I$, ovvero l'insieme delle funzioni $f : I \to \{0,1\}$. Avendo dotato $\{0,1\}$ della topologia discreta, si consideri su X la topologia prodotto, cioè la minima topologia che rende continue tutte le proiezioni $\pi_i : X \to \{0,1\}$ (definite da $\pi_i(f) := f(i)$ per ogni $i \in I$ ed ogni $f \in X$). Per il Teorema di Tychonov, X è uno spazio topologico compatto.

Dimostrare i seguenti enunciati:

(a) una successione (f_n) di funzioni in X converge ad f se e solo se converge puntualmente;

(b) X non è sequenzialmente compatto.

Traccia per (b). Data Φ bigezione da I nell'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, si dimostri che la successione di funzioni

$$f_n(i) := \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \Phi(i) \\ 0 & \text{se } n \notin \Phi(i) \end{cases} .$$

non ammette alcuna sottosuccessione convergente in X.

7.24*. - Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di funzioni equicontinue da uno spazio metrico compatto X nello spazio metrico Y. Dimostrare che le funzioni in $\mathscr{F}$ sono equi-uniformemente continue, ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X \text{ tali che } d_X(x_1, x_2) \leq \delta.$$

7.25. - Verificare che apportando minime modifiche le dimostrazioni del Teorema 7.11 e del Corollario 7.12 valgono anche quando K è un qualunque spazio metrico compatto.

7.26*. - Far vedere con un esempio che il Teorema 7.11 è falso se il codominio $\mathbb{R}^m$ viene sostituito con un generico spazio metrico.

7.27*. - Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di funzioni equicontinue da uno spazio metrico compatto X nello spazio metrico Y. Dimostrare che se esiste $\bar{x} \in X$ tale che l'insieme dei valori $\{f(\bar{x}) : f \in \mathscr{F}\}$ è limitato, allora le funzioni in $\mathscr{F}$ sono equilimitate.

7.28. - Dimostrare il viceversa del Teorema 7.11: se K è un insieme compatto in $\mathbb{R}^k$ ed $\mathscr{F}$ un sottoinsieme totalmente limitato di $C(K, \mathbb{R}^m)$, allora le funzioni in $\mathscr{F}$ sono equilimitate ed equi-uniformemente continue.

7.29. - Siano X, Y spazi metrici, ed f una mappa da X in Y. Si chiama *modulo di continuità* per f ogni funzione crescente $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tale che $\omega(t) \to 0$ per $t \to 0$ e

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega(d_X(x_1, x_2)) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X.$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

(a) esiste un modulo di continuità per f se e solo se f è uniformemente continua;

(b) un insieme di funzioni sono equi-uniformemente continue (cfr. Esercizio 7.24) se e solo se ammettono uno stesso modulo di continuità;

(c) f soddisfa la condizione di Lipschitz con costante L se e solo se ammette un modulo di continuità ω tale che $\omega(t) \leq Lt$;

(d) se f_1 ha modulo di continuità ω_1 ed f_2 ha modulo di continuità ω_2, allora la funzione composta $f_2 \circ f_1$ (supponendo che sia definita in qualche punto) ha modulo di continuità $\omega_2 \circ \omega_1$;

(e) se f_1 soddisfa la condizione di Lipschitz con costante L ed f_2 ha modulo di continuità ω, allora la funzione composta $f_2 \circ f_1$ ha modulo di continuità $\omega(Lt)$,

7.30. - Dimostrare quanto asserito nell'Osservazione 7.13(iii).

7.31. - Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso limitato, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua con modulo di continuità ω (cfr. Esercizio (7.29)). Data $\mathscr{P} := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ partizione di $[a, b]$ con parametro di finezza δ, e presi $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, dimostrare la seguente stima per la differenza tra la somma di Riemann associata alla partizione $\mathscr{P}$ e l'integrale di f:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq (b - a)\, \omega(\delta) \ .$$

7.32. - Completare la seguente traccia di dimostrazione del Teorema 7.14.

1) Usare il Lemma 7.15 per costruire una soluzione del problema di Cauchy (7.3) definita su $[x_0, x_0 + \delta]$ per un opportuno δ positivo. 2) Tramite un opportuno cambio di variabile, costruire una soluzione di (7.3) definita su $[x_0 - \delta', x_0]$ con δ' positivo. 3) Verificare che così facendo si è ottenuta una soluzione di (7.3) definita su $[x_0 - \delta', x_0 + \delta]$.

7.33*. - Nelle ipotesi del Lemma 7.15, sia $y : [x_0, x_0 + \delta] \to \overline{B}(y_0, r)$ una soluzione del problema di Cauchy (7.3), e siano y_n le soluzioni approssimate costruite nella dimostrazione del lemma stesso. Supponendo in aggiunta che f sia Lipschitziana di costante L nella seconda variabile, dimostrare che per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ si ha

$$|y(x) - y_n(x)| \leq L \int_{x_0}^{x} |y(t) - y_n(t)|\, dt + \omega_n(x - x_0) \tag{7.9}$$

dove $\omega_n := \omega((1 + M)\delta/n)$ ed ω è il modulo di continuità di f, vedi formula (7.8). Utilizzare quindi la (7.9) per dimostrare che per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ si ha

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \omega_n \frac{e^{L(x - x_0)} - 1}{L} \ . \tag{7.10}$$

7.34*. - Verificare con opportuni esempi che la stima (7.10) è sostanzialmente ottimale.

Capitolo 8. Il Teorema di Baire

[versione: 1 aprile 2009]

In diverse dimostrazione capita di voler trovare oggetti (funzioni o altro) che soddisfano un certo insieme di condizioni, e che sono naturalmente caratterizzati come gli elementi dell'intersezione di una successione di insiemi. A questo punto sorge un problema: in generale non è detto che l'intersezione di una successione anche decrescente di insiemi non vuoti sia non vuota. Capita quindi di chiedersi quali ipotesi possono garantire che tale intersezione sia non vuota.

Di risultati astratti di questo tipo ce ne sono essenzialmente due. Il primo (Proposizione 8.1) si basa sul concetto di compattezza, mentre il secondo, noto come Teorema di Baire (Teorema 8.2), si basa invece sul concetto di completezza. Dei due, il secondo è il risultato di gran lunga meno intuitivo e meno facile da usare, ma anche quello dalle conseguenza più profonde. Qui ci limitiamo a qualche applicazione elementare; applicazioni più rilevanti si trovano (ad esempio) nell'ambito dell'Analisi Funzionale.

8.1. Proposizione. - *Sia $\mathscr{F}$ una famiglia infinita di sottoinsiemi compatti in uno spazio topologico di Hausdorff X. Se ogni sottofamiglia finita di $\mathscr{F}$ ha intersezione non vuota allora anche $\mathscr{F}$ ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione. - Supponiamo per assurdo che l'intersezione degli insiemi in $\mathscr{F}$ sia vuota. Allora per ogni $x \in X$ esiste un compatto in $\mathscr{F}$, che indichiamo con $K(x)$, tale che $x \notin K(x)$; essendo $K(x)$ un insieme chiuso, esiste un intorno aperto $U(x)$ di x tale che $U(x)$ non interseca $K(x)$. Fissato $K_0 \in \mathscr{F}$, osserviamo che $\big\{U(x) : x \in X\big\}$ è un ricoprimento aperto di K_0 e quindi ammette un sottoricoprimento finito $\big\{U(x_1), \dots, U(x_n)\big\}$. Siccome l'unione degli aperti $U(x_i)$ contiene K_0, l'intersezione dei complementari non interseca K_0, ovvero

$$\varnothing = K_0 \cap (X \setminus U(x_1)) \cap \cdots \cap (X \setminus U(x_n)) \supset K_0 \cap K(x_1) \cap \cdots \cap K(x_n) \ ,$$

ma questo contraddice l'ipotesi che ogni sottofamiglia finita di $\mathscr{F}$ abbia intersezione non vuota. □

8.2. Teorema (di Baire). - *Sia X uno spazio metrico completo, sia $\{A_n\}$ una famiglia numerabile di insiemi aperti densi in X e sia A la loro intersezione. Allora A è denso in X.*

Dimostrazione. - Si deve dimostrare che per ogni $x_0 \in X$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che $d(x_0, x) \le \varepsilon$.

Il punto di partenza della dimostrazione è costruire una successione *decrescente* di palle B_n di raggio inferiore a $\varepsilon/2^{n+2}$ tali che $x_0 \in B_0$ e $\overline{B}_n \subset A_n$ per $n \ge 1$.

Supponiamo di averlo fatto e prendiamo $x_n \in B_n$ per ogni $n > 1$. La successione (x_n) soddisfa $x_n \in B_m$ per $n \ge m$ (perché $B_n \subset B_m$). In particolare, dato $n \ge 0$, sia x_n che x_{n+1} appartengono a B_n e siccome questa palla ha raggio inferiore a $\varepsilon/2^{n+2}$ si ha

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \varepsilon/2^{n+1} \ .$$

Ne consegue che (x_n) è di Cauchy e per la completezza di di X converge ad un qualche limite x tale che $d(x_0, x) \le \varepsilon$ (Lemma 8.3). Siccome x_n appartiene a B_m per $n \ge m$, il limite

x appartiene alla chiusura $\overline{B}_m$ per ogni m. Quindi x appartiene ad A_m per ogni m, e di conseguenza appartiene anche ad A.

Non resta che costruire le palle B_n. Prendiamo $B_0 := B(x_0, \varepsilon/2^2)$. Siccome l'aperto A_1 è denso in X, $A_1 \cap B_0$ è un aperto non vuoto e quindi contiene una palla B_1 di raggio inferiore a $\varepsilon/2^3$. Siccome l'aperto A_2 è denso in X, $A_2 \cap B_1$ è un aperto non vuoto e quindi contiene una palla B_2 di raggio inferiore a $\varepsilon/2^4$. Eccetera. □

8.3. Lemma. - *Sia X uno spazio metrico e sia (x_n) successione di punti di X tale che*

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty \ . \tag{8.1}$$

Allora la successione (x_n) è di Cauchy. Inoltre, se X è completo la successione (x_n) converge ed un limite x e $d(x_0, x) \le S$.

Dimostrazione. - Presi m, n con $m < n$, per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \le \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})}_{S_m} \ . \tag{8.2}$$

Siccome la serie S in (8.1) è finita, la somma S_m in (8.2) tende a 0 per $m \to +\infty$. In particolare, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{m}$ tale che $S_m \le \varepsilon$ per ogni $m \ge \bar{m}$. Dunque per ogni n, m tali che $\bar{m} \le m < n$ si ha $d(x_m, x_{m+1}) \le \varepsilon$. Questo dimostra che (x_n) è una successione di Cauchy.

Se X è completo la successione (x_n) deve allora convergere ad un qualche limite x. Per $m = 0$ la (8.2) implica $d(x_0, x_n) \le S$ e passando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene $d(x_0, x) \le S$ (si ricordi che la funzione distanza è continua). □

Come applicazione del Teorema di Baire dimostriamo un fatto più volte menzionato in precedenza:

8.4. Proposizione. - *Esiste una funzione continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ che non è derivabile in alcun punto.*

Dimostrazione. - Sia $C(I)$ lo spazio di Banach delle funzioni reali e continue sull'intervallo chiuso $I := [0,1]$, e per ogni m, δ numeri reali positivi indichiamo con $\mathscr{F}_{m,\delta}$ l'insieme delle funzioni $f \in C(I)$ che soddisfano la seguente proprietà: esiste un numero finito di intervalli J_i che ricoprono I e soddisfano $\operatorname{diam}(J_i) \le \delta$ e

$$\operatorname{osc}(f, J_i) > m \operatorname{diam}(J_i) \tag{8.3}$$

per ogni i. Poniamo infine

$$\mathscr{F} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{n,1/n} \ .$$

Il resto della dimostrazione è divisa in quattro passi.

Passo 1: $\mathscr{F}_{m,\delta}$ è aperto in $C(I)$ per ogni $m, \delta > 0$. La dimostrazione è immediata: data $f \in \mathscr{F}_{m,\delta}$, prendiamo gli intervalli J_i corrispondenti ed indichiamo con ε il minimo dei numeri $\operatorname{osc}(f, J_i) - m \operatorname{diam}(J_i)$. Allora ogni $g \in C(I)$ tale che $\|f - g\| < \varepsilon/2$ soddisfa la (8.3) per gli stessi intervalli J_i di f, e dunque appartiene a $\mathscr{F}_{m,\delta}$.

Passo 2: $\mathscr{F}_{m,\delta}$ è aperto in $C(I)$ per ogni $m, \delta > 0$. Fissiamo una funzione $g \in C(I)$ ed un numero $\varepsilon > 0$, e per ogni $\rho > 0$ poniamo

$$f_\rho(x) := g(x) + \varepsilon \sin(x/(2\pi\rho)) \ .$$

Chiaramente si ha che $\|g - f_\rho\| \le \varepsilon$ per ogni ρ. Non resta quindi che dimostrare che per ρ sufficientemente piccolo la funzione f_ρ appartiene a $\mathscr{F}_{m,\delta}$.

Sia $\omega(t)$ il modulo di continuità di g – vale a dire l'estremo superiore di $|g(x) - g(y)|$ tra tutti gli $x, y \in I$ con $|x - y| \le t$ per ogni $t > 0$ – e sia $\{J_i\}$ una qualunque famiglia finita di intervalli di lunghezza ρ che ricopre I. Supponiamo per cominciare che $\rho \le \delta$. Per ogni indice i si ha allora che

$$\operatorname{osc}(f_\rho, J_i) \ge 2\varepsilon - 2\omega(\rho) \ ,$$

pertanto f_ρ soddisfa la condizione (8.3) se

$$2\varepsilon \ge 2\omega(\rho) + m\rho \ , \tag{8.4}$$

e siccome il termine di destra tende a 0 quando $\rho \to 0$, la (8.4) è soddisfatta per ρ sufficientemente piccolo.

Passo 3: $\mathscr{F}$ non è vuoto. Per i passi 1 e 2, $\mathscr{F}$ è intersezione numerabile di aperti densi nello spazio di Banach $C(I)$, è quindi è denso in $C(I)$ per via del teorema di Baire.

Passo 4: ogni funzione $f \in \mathscr{F}$ non è differenziabile in alcun punto di I. Sia x un punto in I ed n un intero positivo. Siccome f appartiene a $\mathscr{F}_{n,1/n}$, possiamo trovare un intervallo aperto J di diametro $d \le 1/n$ tale che $x \in J$ e $\operatorname{osc}(f, J) > nd$. Quindi esistono $x_0, x_1 \in J$ tali che $|f(x_0) - f(x_1)| > nd$; supponendo $|f(x_1) - f(x)| \ge |f(x_0) - f(x)|$ otteniamo allora

$$\frac{2|f(x_1) - f(x)|}{|x_1 - x|} \ge \frac{|f(x_1) - f(x)| + |f(x_0) - f(x)|}{d} \ge \frac{|f(x_1) - f(x_0)|}{d} \ge n \ ,$$

e per l'arbitrarietà di n

$$\limsup_{y \to x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = +\infty \ . \qquad \square$$

8.5. Definizione. - Un sottoinsieme E di uno spazio metrico X si dice *residuale* se contiene un'intersezione numerabile di aperti densi.

8.6. Osservazioni. - (i) L'interesse di questa definizione segue dal Teorema di Baire, che può essere riformulato dicendo che ogni insieme residuale in uno spazio metrico completo X è denso.

(ii) Dalla definizione di residuale seguono immediatamente le seguenti proprietà: a) ogni insieme che contiene un residuale è a sua volta residuale; b) ogni intersezione numerabile di insiemi residuali è residuale, ed in particolare è densa.

(iii) La dimostrazione del Teorema 8.3 prova in realtà un risultato molto più forte di quello enunciato: *l'insieme delle funzioni continue $f : I \to \mathbb{R}$ che non sono derivabili in alcun punto è residuale in $C(I)$, ed in particolare è denso.*

Esercizi

8.7. - Dimostrare il seguente corollario della Proposizione 8.1: dato X spazio topologico, l'intersezione di una successione decrescente di sottoinsiemi compatti e non vuoti di X non è vuota.

8.8. - Sia X uno spazio metrico ed E un sottoinsieme di X. Dimostrare che

(a) E è denso se e solo se il complementare $X \setminus E$ ha parte interna vuota;

(b) E è residuale in X se e solo se il complementare $X \setminus E$ è *di prima categoria*, vale a dire che è contenuto in un'unione numerabile di insiemi chiusi con parte interna vuota.

8.9. - Sia X uno spazio metrico completo. Dimostrare i seguenti enunciati (si tratta in effetti di formulazioni alternative del Teorema di Baire):

(a) un insieme di prima categoria in X ha parte interna vuota;

(b) X non è di prima categoria;

(c) un insieme residuale in X non è di prima categoria;

(d) data una famiglia numerabile di chiusi $\{C_n\}$ che ricopre X, almeno uno deve avere parte interna non vuota.

8.10. - Sia N un insieme numerabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che N non è residuale.

8.11. - Sia X uno spazio metrico completo senza punti isolati, ed E un sottoinsieme residuale di X. Dimostrare che:

(a) E è più che numerabile;

(b) $E \cap A$ è più che numerabile per ogni aperto A.

8.12*. - Sia X spazio metrico completo ed f una funzione reale su X. Dimostrare i seguenti enunciati:

(a) L'insieme $D(f)$ dei punti di discontinuità di f è unione numerabile di chiusi;

(b) se l'insieme $C(f)$ dei punti di continuità di f è denso, allora è residuale.

Traccia della dimostrazione di (a). 1) Dato $a \in \mathbb{R}$, si ponga

$$A_a^+ := \Big\{x \in X : \limsup_{y\to x} f(y) \geq a\Big\}\ , \quad A_a^- := \Big\{x \in X : \liminf_{y\to x} f(y) \leq a\Big\}\ ; \tag{8.5}$$

allora A_a^+ e A_a^- sono chiusi. 2) L'insieme $D(f)$ coincide con l'unione degli insiemi $A_p^+ \cap A_q^-$ fatta su tutte le coppie di numeri razionali (p,q) tali che $p > q$.

8.13*. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale,} \\ 1/q & \text{se } x = p/q \text{ con } p,q \text{ interi primi tra loro e } q > 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f è continua sugli irrazionali e discontinua sui razionali.

8.14. - Dimostrare che non esiste alcuna funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua sui razionali e discontinua sugli irrazionali.

Traccia: usare l'enunciato (b) dell'Esercizio 8.12 e l'Esercizio 8.10.

8.15*. - Sia X spazio metrico completo, ed $f_n : X \to \mathbb{R}$ una successioni di funzioni continue che convergono puntualmente ad una funzione $f : X \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f è continua in un insieme residuale di punti.

Traccia. 1) Per quanto visto nell'esercizio 8.12, l'insieme dei punti di discontinuità $D(f)$ si scrive come unione numerabile di chiusi della forma $A_p^+ \cap A_q^-$ con $p > q$, con A_p^+ e A_q^- dati dalla formula (8.5). Basta dunque dimostrare che tale il chiuso $A_p^+ \cap A_q^-$ deve sempre avere parte interna vuota. 2) Supponiamo invece per assurdo che $A_p^+ \cap A_q^-$ contenga un aperto non vuoto A. Presi allora p', q' tali che $p > p' > q' > q$, sia B^+ l'insieme dei punti x tali che $f_n(x) > p'$ frequentemente in n, e B^- l'insieme dei punti x tali che $f_n(x) < q'$ frequentemente in n; far vedere che B^+ e B^- sono intersezioni numerabili di aperti densi in A ma con intersezione vuota.

8.16. - Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, per ogni $\varepsilon > 0$ si consideri la funzione f_ε definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ da

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}(x - k\varepsilon)\, f(k\varepsilon + \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(k\varepsilon + \varepsilon - x)\, f(k\varepsilon)$$

dove k è preso in modo tale che $k\varepsilon \leq x < (k+1)\varepsilon$. Dimostrare che:

(a) se f è continua allora $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ per ogni x;
(b) se f è uniformemente continua allora $f_\varepsilon \to f$ uniformemente.

8.17. - Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice *separatamente continua* se $x \mapsto f(x,y)$ è continua per ogni $y \in \mathbb{R}$, e $y \mapsto f(x,y)$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dare un esempio di funzione f separatamente continua e discontinua in almeno un punto.

8.18*. - Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ separatamente continua e discontinua in un insieme numerabile denso di punti.

8.19*. - Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione separatamente continua. Dimostrare che f è continua in un insieme residuale di punti.

Traccia. 1) Usare l'Esercizio 8.16 per costruire una famiglia di funzioni continue $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che convergono puntualmente ad f. 2) Usare l'enunciato (b) dell'Esercizio 8.15.

8.20. - Modificando opportunamente la dimostrazione del Proposizione 8.4, dimostrare che l'insieme delle funzioni $f \in C(I)$ tali che

$$\limsup_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = +\infty \quad \text{e} \quad \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = -\infty$$

per ogni $x \in I$, è residuale in $C(I)$.

8.21*. - Sia I un intervallo chiuso e limitato. Dimostrare che esiste una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ che non è monotona in alcun sottointervallo di I.

Traccia. 1) Dato J intervallo chiuso contenuto in I, sia $\mathscr{F}_J$ l'insieme delle $g \in C(I)$ che non sono monotone su J; dimostrare che $\mathscr{F}_J$ è aperto e denso in $C(I)$. 2) Prendere $f \in \mathscr{F}$ dove $\mathscr{F}$ è l'intersezione di tutti gli insiemi $\mathscr{F}_J$ con J della forma $J = [a,b]$ ed a, b numeri razionali.

8.22*. - Sia I un intervallo chiuso e limitato. Dimostrare che esiste una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ tale che l'insieme dei punti di minimo locale *in senso stretto* è denso in I.

8.23*. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Dimostrare che la derivata f' è continua in un insieme residuale di punti.

Traccia: usare l'enunciato (b) dell'Esercizio 8.15.

8.24**. - Sia N un qualunque insieme numerabile in $\mathbb{R}$. Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in ogni punto e la cui derivata è discontinua in ogni punto di N.

8.25. - Sia I l'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$ e per ogni $x, y \in I$ sia $d(x,y) := |\tan x - \tan y|$. Dimostrare che
(a) d è una distanza su I che induce la stessa topologia della distanza Euclidea;
(b) l'insieme I dotato della distanza d è uno spazio metrico completo.

8.26*. - Sia I un intervallo chiuso. Dimostrare che I non può essere decomposto come unione di una famiglia finita o numerabile $\mathscr{F}$ di insiemi chiusi non vuoti a due a due disgiunti, se non nel caso in cui $\mathscr{F}$ consiste solo dell'insieme I.

Capitolo 9. Curve e superfici in forma parametrica

[versione: ——]

Capitolo 10. Il teorema di invertibilità locale

[versione: 9 maggio 2006]

Il teorema di invertibilità locale risponde alla seguente domanda: data una mappa f da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ di classe C^1, sotto quali ipotesi f è invertibile con inversa di classe C^1, almeno in un intorno di un dato punto x_0?

In dimensione $n = 1$ la risposta è semplice: se $f'(x_0) \neq 0$ allora esiste un intervallo centrato in x_0 in cui f' ha segno costante, e quindi f è strettamente monotona. Pertanto la restrizione di f a tale intervallo è invertibile, l'inversa è di classe C^1 e la derivata della funzione inversa è data dalla nota formula $\big(f^{-1}\big)'(y) = 1/f'(x)$ dove $x := f^{-1}(y)$.

La risposta è nota per n qualunque nel caso in cui f sia lineare, cioè $f(x) = Mx$ con M matrice $n \times n$: f è invertibile se e solo se M è invertibile, ovvero $\det M \neq 0$. Ricordando che in questo caso M coincide (in ogni punto) con la derivata di f, viene naturale congetturare che per una qualunque mappa f di classe C^1 l'invertibilità in un intorno di x_0 sia garantita dalla condizione $\det(Df(x_0)) \neq 0$. Si ha in effetti il seguente risultato:

10.1. Teorema (di invertibilità locale). - *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una mappa di classe C^1, ed x_0 un punto di A tale che la matrice $Df(x_0)$ è invertibile, cioè* $\det(Df(x_0)) \neq 0$. *Esiste allora U intorno aperto di x_0 tale che:*

(i) *$V := f(U)$ è aperto e la restrizione di f ad U è una mappa aperta, cioè $f(W)$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ per ogni aperto W contenuto in U;*

(ii) *la restrizione di f ad U è iniettiva, e la funzione inversa $f^{-1} : V \to U$ è di classe C^1;*

(iii) *per ogni $y \in V$, $Df^{-1}(y)$ è l'inversa della matrice $Df(x)$ con $x := f^{-1}(y)$.*

10.2. Osservazioni. - (i) L'iniettività di f in un intorno di x_0 (enunciato (ii)) si può dimostrare abbastanza facilmente a partire dall'invertibilità della matrice $Df(x_0)$ (vedi Esercizio 10.10). Anche la formula per la derivata della funzione inversa (enunciato (iii)) si dimostra facilmente a partire dalla formula per la derivata della funzione composta, una volta che si sappia che f^{-1} è differenziabile. In effetti, le parti del Teorema 10.1 di dimostrazione meno facile sono il fatto che f sia aperta e che f^{-1} sia differenziabile.

(ii) Se la funzione f nell'enunciato del Teorema 10.1 è di classe C^k con $1 < k \leq \infty$, allora anche la funzione inversa f^{-1} è di classe C^k (cfr. Esercizio 10.8).

(iii) In dimensione $n = 1$ vale anche un teorema di invertibilità globale: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa $f'(x) \neq 0$ per ogni x, allora f' ha segno costante e quindi f è strettamente monotona; ne segue che f è invertibile come funzione da $\mathbb{R}$ nell'immagine $f(\mathbb{R})$. Tale risultato non vale in dimensione $n > 1$; si consideri ad esempio la mappa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y) \;;$$

si vede che f è surgettiva, $\det(Df(x, y)) = e^x$ è sempre diverso da 0, ma f non è iniettiva (anzi è 2π-periodica nella variabile y) e quindi non è invertibile. Il Teorema 10.1 implica solo che per ogni punto di $\mathbb{R}^2$ esiste un intorno in cui f è iniettiva (cioè f è *localmente* iniettiva), ma questo non basta a dimostrare che f è iniettiva su tutto $\mathbb{R}^2$ (cioè *globalmente* iniettiva).

(iv) Dato $y \in \mathbb{R}^n$, supponiamo di voler trovare i punti $x \in A$ tali che $f(x) = y$. Questo significa risolvere il sistema di n equazioni in n incognite dato da

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n) = y_1 \\ f_2(x_1,\dots,x_n) = y_2 \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n) = y_n \end{cases} \tag{10.1}$$

dove naturalmente f_i, y_i e x_j indicano le componenti dei vettori f, y e x. In questo contesto, il Teorema 10.1 implica quanto segue: se $\bar{x}$ risolve il sistema (10.1) per un certo dato $\bar{y}$ e $\det(Df(\bar{x})) \neq 0$, allora esiste un intorno aperto U di $\bar{x}$ ed un intorno aperto V di $\bar{y}$ tale che per ogni $y \in V$ il sistema (10.1) ammette una ed una sola soluzione $x \in U$ (chiaramente tale soluzione è proprio $x = f^{-1}(y)$). Si osservi che questo enunciato non esclude la possibilità che il sistema abbia altre soluzioni al di fuori di U.

La dimostrazione del Teorema 10.1 si basa sul seguente lemma. Ricordo che $B(x_0, r)$ e $\overline{B}(x_0, r)$ denotano rispettivamente la palla aperta e la palla chiusa di centro x_0 e raggio r.

10.3. Lemma. - *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una mappa di classe C^1, ed x_0 un punto di A tale che $\det(Df(x_0)) \neq 0$; infine sia $y_0 := f(x_0)$. Allora esiste $\bar{r} > 0$ tale che per ogni r con $\bar{r} \geq r > 0$ è possibile trovare $\rho > 0$ per cui vale la seguente proprietà: per ogni $y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ l'equazione*

$$f(x) = y$$

ammette una ed una sola soluzione x contenuta in $\overline{B}(x_0, r)$.

Dimostrazione. - Indichiamo con L l'inversa della matrice $Df(x_0)$. L'equazione $f(x) = y$ può essere quindi riscritta come segue: $0 = y - f(x)$, ovvero $0 = Ly - Lf(x)$, ovvero

$$x = \underbrace{x + Ly - Lf(x)}_{\phi_y(x)} \ .$$

In altre parole, x risolve l'equazione $f(x) = y$ se e solo se è un punto fisso della mappa ϕ_y. A questo punto l'idea è di utilizzare il Teorema delle contrazioni. Come prima cosa mostreremo che esiste $\bar{r} > 0$ tale che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, \bar{r}). \tag{10.2}$$

Dimostreremo poi che dato r con $\bar{r} \geq r > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che per ogni $y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ si ha

$$\phi_y(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r) \ . \tag{10.3}$$

Insieme, le condizioni (10.2) e (10.3) implicano che ϕ_y è una contrazione della palla $\overline{B}(x_0, r)$ in sé e quindi ammette uno ed un solo punto fisso x contenuto in tale palla, che è proprio la tesi del Lemma 10.3.

Dimostriamo la (10.2). Come osservato in nel Capitolo (Esercizi 3.19 e 3.22), una mappa f definita su un convesso soddisfa la condizione di Lipschitz con costante $1/2$ – cioè la (10.2) – se la norma della derivata è sempre minore o uguale a $1/2$. Osserviamo allora che

$$D\phi_y(x) = I - L\,Df(x)$$

dove I è la matrice identità. Siccome L è l'inversa di $Df(x_0)$, si ha $D\phi_y(x_0) = 0$, e per continuità esiste $\bar{r} > 0$ tale che $|D\phi_y(x)| \leq 1/2$ per ogni $x \in \overline{B}(x_0, \bar{r})$. La condizione (10.2) è soddisfatta per tale $\bar{r}$.

Dimostriamo la (10.3). Siccome $x_0 = \phi_y(x_0) - L(y - y_0)$, per ogni $x \in \overline{B}(x_0, r)$ e per ogni $y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ si ha

$$\begin{aligned}|\phi_y(x) - x_0| &= |\phi_y(x) - \phi_y(x_0) + L(y - y_0)| \\ &\leq |\phi_y(x) - \phi_y(x_0)| + |L(y - y_0)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |L|\,|y - y_0| \leq \frac{r}{2} + |L|\rho\end{aligned}$$

($|L|$ è la norma euclidea di L; nel penultima passaggio abbiamo usato la (10.2)). Pertanto la (10.3) è soddisfatta se $\frac{r}{2} + |L|\rho \leq r$, cioè prendendo $\rho \leq \frac{r}{2|L|}$. □

10.4. Corollario. - *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ una mappa di classe C^1 tale che* $\det(Df(x)) \neq 0$ *per ogni $x \in A$. Allora f è una mappa aperta.*

Dimostrazione. - Dobbiamo dimostrare che l'immagine $f(U)$ di un qualunque aperto U contenuto in A è aperta, ovvero che per ogni $y_0 \in f(U)$ esiste $\rho > 0$ tale che la palla $B(y_0, \rho)$ è contenuta in $f(U)$.

Prendiamo dunque $x_0 \in U$ tale che $y_0 = f(x_0)$, e $\bar{r}$ come nel Lemma 10.3; siccome U è aperto, esiste r con $\bar{r} \geq r > 0$ tale che $\overline{B}(y_0, r)$ è contenuto in U. Per il Lemma 10.3, possiamo allora trovare $\rho > 0$ tale che per ogni $y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ esiste $x \in \overline{B}(x_0, r)$ che risolve l'equazione $y = f(x)$. Ma questo significa che $\overline{B}(y_0, \rho) \subset f(\overline{B}(x_0, r)) \subset f(U)$. □

Dimostrazione del Teorema 10.1. - Poniamo $y_0 := f(x_0)$ e prendiamo $\bar{r}$ come nel Lemma 10.3.

Siccome $\det(Df(x_0)) \neq 0$ e la funzione $x \mapsto \det(Df(x))$ è continua, possiamo trovare r positivo e minore di $\bar{r}$ tale che $\det(Df(x)) \neq 0$ per ogni $x \in B(x_0, r)$. Il Corollario 10.4 implica allora che la restrizione di f alla palla $B(x_0, r)$ è una mappa aperta.

Per via del Lemma (10.3) possiamo inoltre trovare $\rho > 0$ tale che per ogni $y \in \overline{B}(y_0, \rho)$ esiste un solo $x \in \overline{B}(x_0, r)$ che risolve l'equazione $y = f(x)$. In particolare, dati $x_1, x_2 \in \overline{B}(x_0, r)$, se $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ sono uguali ed appartengono a $\overline{B}(y_0, r)$, si ha che x_1 e x_2 sono pure uguali, ovvero la restrizione di f a $\overline{B}(x_0, r) \cap f^{-1}(\overline{B}(y_0, \rho))$ è iniettiva.

Prendiamo allora

$$U := B(x_0, r) \cap f^{-1}(B(y_0, \rho) \ .$$

L'insieme U è aperto in quanto intersezione di due aperti, e per quanto già detto la restrizione di f ad U è una mappa sia iniettiva che aperta (in particolare $V := f(U)$ è aperto).

Essendo f iniettiva, la funzione inversa $f^{-1} : V \to U$ è ben definita, ed essendo f aperta, f^{-1} è anche continua (dire che le immagini di aperti secondo f sono aperte equivale a dire che la le controimmagini di aperti secondo f^{-1} sono aperte).

Non ci resta che dimostrare che f^{-1} è differenziabile in ogni punto $y \in V$ e che la derivata di f^{-1} è data dalla formula $Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$ con $x := f^{-1}(y)$. Fatto questo, Df^{-1} risulterà essere composizione di mappe continue (vale a dire $y \mapsto f^{-1}(y)$ e $x \mapsto [Df(x)]^{-1}$); quindi Df^{-1} sarà continua e f^{-1} sarà di classe C^1, concludendo così la dimostrazione del Teorema 10.1.

Dato $y \in V$, poniamo $x := f^{-1}(y)$ e $M := Df(x)$. Dire che f^{-1} è differenziabile in y con derivata $[Df(x)]^{-1}$ equivale a dire che per ogni h tale che $y + h \in V$, $f^{-1}(y + h)$ si decompone come

$$f^{-1}(y + h) = x + M^{-1}h + o(|h|) \ . \tag{10.4}$$

Per dimostrare la (10.4), partiamo dall'identità $y + h = f(f^{-1}(y + h))$. Scrivendo $f^{-1}(y + h)$ come $x + k(h)$ si ha

$$y + h = f(f^{-1}(y + h)) = f(x + k(h)) = y + Mk(h) + o(|k(h)|)$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la differenziabilità di f in x: per far questo serve sapere che $k(h)$ tende a 0 per $h \to 0$, cosa che segue dalla definizione di k e dalla continuità di f^{-1} nel punto y). Sottraendo y a ciascun termine della precedente equazione otteniamo

$$h = Mk(h) + o(|k(h)|) \ . \tag{10.5}$$

Da questo segue che $k(h) = M^{-1}(h - o(|k(h)|)) = M^{-1}h + o(|k(h)|)$, e quindi

$$f^{-1}(y+h) = x + k(h) = x + M^{-1}h + o(|k(h)|) \ .$$

Per ottenere la (10.4) ci basta dimostrare che il resto $o(|k(h)|)$ che appare nella formula precedente è $o(|h|)$, ovvero che $k(h) = O(|h|)$. Ma la (10.5) implica un risultato più forte, e cioè che $k(h)$ è asintoticamente equivalente a $M^{-1}h$ per $h \to 0$ (cfr. Esercizio 10.8). □

Esercizi

10.5. - Sia $\mathbb{R}^{n\times n}$ lo spazio delle matrici $n \times n$. Dimostrare che:
(a) la funzione $M \mapsto \det M$ è continua su $\mathbb{R}^{n\times n}$;
(b) l'insieme A delle matrici invertibili è aperto in $\mathbb{R}^{n\times n}$;
(c) la mappa $M \mapsto M^{-1}$ è continua su A.
(d*) la mappa $M \mapsto M^{-1}$ è di classe C^∞ su A.

Traccia per il punto (d): usare la formula $A^{-1} = (\det A)^{-1}\mathrm{cof}(A)$ dove $\mathrm{cof}(A)$ è la matrice dei cofattori di A (cioè $(\mathrm{cof}(A))_{ij} := (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ dove M_{ij} è la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta eliminando dalla matrice A la riga i e la colonna j).

10.6. - Sia F una mappa continua definita sull'aperto A in $\mathbb{R}^m$ a valori nello spazio $\mathbb{R}^{m\times m}$ delle matrici $n \times n$. Dimostrare che:
(a) l'insieme U dei punti x in cui $F(x)$ è invertibile è aperto;
(b) la mappa $x \mapsto [F(x)]^{-1}$ è continua su U.
(c) se F è di classe C^k con $1 \le k \le \infty$, allora la mappa $x \mapsto [F(x)]^{-1}$ è pure di classe C^k.
(d) se F è di classe C^1 ed $m = 1$, trovare una formula per la derivata $(F^{-1})'$.

Traccia per il punto (c): usare l'Esercizio 10.5(d).

10.7*. - Siano U e V aperti di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : U \to V$ una funzione di classe C^1 con inversa f^{-1} di classe C^1. Dimostrare che se f è di classe C^k con $1 \le k \le \infty$, lo stesso vale per f^{-1}.

Traccia: usare l'Esercizio 10.6(c) per dimostrare che $x \mapsto [Df(x)]^{-1}$ è di classe C^{k-1}.

10.8. - Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione infinitesima per $x \to 0$ e L una matrice $n \times n$ tale che

$$f(x) + R(f(x)) = Lx$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, dove $R(y) = o(|y|)$ per $y \to 0$. Dimostrare che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a Lx per $x \to 0$.

10.9*. - Sia U un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$ ed $f : U \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1, e supponiamo che esista una matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che per ogni $x \in U$

$$|M \cdot Df(x) - I| < 1 \ ,$$

dove I è la matrice identità e $|\cdot|$ la norma euclidea delle matrici. Dimostrare che f è iniettiva.

Traccia. Dati $x_1, x_2 \in U$, partire dalla formula

$$f(x_1) - f(x_2) = \int_0^1 Df\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \cdot (x_1 - x_2)\, dt$$

per ottenere una minorazione di $\left|M \cdot (f(x_1) - f(x_2))\right|$ strettamente positiva.

10.10. - Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1, ed x_0 un punto di A tale che tale che $\det(Df(x_0)) \neq 0$. Applicare l'Esercizio 10.9 per dimostrare che f è iniettiva in un intorno di x_0.

10.11. - Siano X, Y spazi metrici, con X compatto, e sia $f : X \to Y$ una funzione continua.
(a) Dimostrare che l'insieme $V := f(X)$ è compatto.
(b) Dimostrare che se f è iniettiva, la funzione inversa $f^{-1} : V \to X$ è continua.

Capitolo 11. Il teorema della funzione implicita

[versione: 25 maggio 2006]

Data una mappa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n \geq m$, cosa si può dire sul luogo di zeri di f, cioè l'insieme C dei punti $x \in A$ tali che $f(x) = 0$?

Siccome C è l'insieme delle soluzioni del sistema di m equazioni ed n variabili

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

(dove f_i ed x_j sono le componenti della funzione vettoriale f e del vettore x), è ragionevole aspettarsi di poter esplicitare m di queste variabili in funzione delle rimanenti $n - m$, cioè di parametrizzare i punti di C usando $n - m$ variabili indipendenti. In altre parole, ci si aspetta che C sia una curva quando $n - m$ è uguale a 1, una superficie quando $n - m = 2$, e così via.

11.1. Esempi. - I seguenti esempi, ben noti e familiari, confermano l'ipotesi data sopra:
(i) l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (quindi $n = 2$, $m = 1$) descrive una curva (circonferenza);
(ii) l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ($n = 3$, $m = 1$) descrive una superficie sferica;
(iii) il sistema $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ e $x - y + 2z = 0$ ($n = 3$, $m = 2$) descrive l'intersezione di una superficie sferica con un piano passante per il centro, cioè una circonferenza;
(iv) data M una matrice $m \times n$ di rango massimo e v un vettore in $\mathbb{R}^m$, l'insieme delle soluzioni $x \in \mathbb{R}^n$ del sistema $Mx - v = 0$ è un sottospazio affine di dimensione $n - m$ parallelo a $\ker(M)$.

Tuttavia è possibile anche trovare esempi che mostrano che l'ipotesi enunciata sopra non è universalmente valida:
(v) l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ($n = 3$, $m = 1$) descrive un punto e non una superficie;
(vi) il sistema $(x + z)^2 - (x - y)^2 = 0$ e $y + z = 0$ ($n = 3$, $m = 2$) descrive un piano, e non una curva (ogni soluzione della seconda equazione è anche soluzione della prima);
(vii) se la matrice M nell'esempio (iv) ha rango r inferiore a m, a seconda della scelta di y l'insieme delle soluzioni del sistema $Mx - y = 0$ può essere vuoto oppure un sottospazio affine di dimensione $n - r$ (quindi maggiore di $n - m$).

Ci si chiede quindi sotto quali ipotesi è vero che C ha la dimensione 'giusta', cioè $d := n - m$, ovvero è possibile usare il sistema $f(x) = 0$ per esplicitare m variabili in funzione delle rimanenti d. Dagli esempi (iv) e (vii) in §11.1 si deduce che quando f è una mappa affine, cioè della forma $f(x) := Mx - v$, la dimensione di C è effettivamente d se M ha rango massimo. Siccome M coincide in questo caso con la derivata di f (in ogni punto), si può ipotizzare che la condizione cercata in generale sia proprio che il rango della matrice $Df(x)$ sia m.

Prima di dare un qualunque enunciato, precisiamo la notazione: per tutto questo capitolo, n, m sono numeri interi positivi con $m < n$, e si pone

$$d := n - m \ .$$

Il grafico di una funzione $g : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ è l'insieme

$$\Gamma g := \big\{ (x, g(x)) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m : \ x \in D \big\} \ .$$

Identificando $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}^n$, il grafico di g può essere visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e per la precisione come l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $x_{d+i} = g_i(x_1, \dots, x_d)$ per $i = 1, \dots, m$.

Dato un insieme C contenuto in $\mathbb{R}^n$, l'espressione "per i punti di C è possibile esplicitare le ultime m variabili in funzione delle prime d" significa proprio che esiste $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ tale che per ogni $x \in C$ si ha $x_{d+i} = g_i(x_1, \dots, x_d)$ per $i = 1, \dots, m$, cioè che C è contenuto nel grafico di g. Più in generale, diremo che "per i punti di C è possibile esplicitare m variabili in funzione delle altre d" quando è possibile rinumerare (riordinare) le variabili in $\mathbb{R}^n$ in modo tale che C sia contenuto nel grafico di una funzione g.

11.2. Teorema (della funzione implicita). - *Dati A aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^m$ funzione di classe C^1, si ponga $C := \{x : \ f(x) = 0\}$. Sia x_0 un punto di C tale che la matrice $Df(x_0)$ ha rango m. Allora esistono U intorno aperto di x_0 e $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ funzione di classe C^1 tali che C coincide dentro di U con il grafico di g, cioè*

$$C \cap U = \Gamma g \cap U \ ,$$

a patto di rinumerare opportunamente le variabili in $\mathbb{R}^n$.

Esempio. - Applichiamo il Teorema 11.2 all'equazione della circonferenza $x_1^2 + x_2^2 = 1$; si ha dunque $n = 2$, $m = d = 1$ e $f(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1$. In questo caso $Df(x) = (2x_1, 2x_2)$ è una matrice 1×2 (un vettore riga) che ha rango 1, cioè non è nulla, per ogni x tranne l'origine; In particolare le ipotesi del Teorema 11.2 sono verificate per ogni $x \in C$ e dunque esiste un'intorno di x in cui in cui si può esplicitare la variabile x_1 in funzione di x_2 o viceversa.

Da un disegno si vede in effetti che è possibile esplicitare x_2 in funzione di x_1 in un intorno di ogni $x \in C$ tranne $(\pm 1, 0)$, mentre è possibile esplicitare x_1 in funzione di x_2 in un intorno di ogni $x \in C$ tranne $(0, \pm 1)$. Si noti che, anche se le ipotesi del Teorema 11.2 sono verificate in ogni punto, la circonferenza coincide solo localmente con un grafico, ma complessivamente non è un grafico.

Nell'enunciato del Teorema 11.2 non si specifica quali sono le m variabili che possono essere esplicitate in funzioni delle rimanenti d. Ora, la condizione che il rango di $Df(x_0)$ sia uguale a m implica che è possibile trovare m colonne linearmente indipendenti tra le n che formano la matrice $Df(x_0)$, e risulta che le m variabili che possono essere esplicitate sono proprio quelle che corrispondono a queste colonne. Questo viene chiarito nel prossimo enunciato (che è sostanzialmente una riformulazione del Teorema 11.2).

Per ragioni di chiarezza espositiva, conviene utilizzare una notazione diversa da quella del Teorema 11.2: f è una funzione definita su un aperto A in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ (invece che in $\mathbb{R}^n$), ed indichiamo i punti in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ come (x, y) invece che semplicemente come x. Indichiamo inoltre con $D_x f$ la matrice $m \times d$ delle derivate parziali di f rispetto alle variabili x_j, e con $D_y f$ la matrice $m \times m$ delle derivate parziali di f rispetto alle variabili y_j.

11.3. Teorema. - *Dati A aperto di $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ ed $f : A \to \mathbb{R}^m$ funzione di classe C^1, si ponga $C := \{(x, y) : \ f(x, y) = 0\}$. Sia (x_0, y_0) un punto di C tale che la matrice $D_y f(x_0, y_0)$ ha rango m. Allora esistono $r, \rho > 0$ e $g : B(x_0, \rho) \to B(y_0, r)$ funzione di classe C^1 tali che C coincide dentro l'aperto $U := B(x_0, \rho) \times B(y_0, r)$ con il grafico di g, cioè*

$$C \cap U = \Gamma g \ . \tag{11.1}$$

Inoltre per ogni $x \in B(x_0, \rho)$ la derivata di g è data dalla formula

$$Dg(x) = -[D_y f(x, y)]^{-1} [D_x f(x, y)] \tag{11.2}$$

dove si è posto $y := g(x)$.

11.4. Osservazioni. - (i) Sia nel Teorema 11.2 che nel Teorema 11.3 si può prendere $C := f^{-1}(v)$ dove v è un qualunque vettore assegnato in $\mathbb{R}^m$ (ci si riconduce la caso $C := f^{-1}(0)$ sostituendo la funzione $f(x)$ con $f(x) - v$).

(ii) Nell'enunciato del Teorema 11.3, $D_y f(x_0, y_0)$ è una matrice quadrata $m \times m$, e quindi dire che ha rango m equivale a dire che $\det(D_y f(x_0, y_0)) \neq 0$.

(iii) Una volta dimostrato che g esiste ed è di classe C^1, è facile ottenere la formula (11.2): siccome il grafico di g è contenuto in C si ha che $f(x, g(x)) = 0$ per ogni x, e derivando questa identità rispetto alla variabile x si ottiene

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x))\, Dg(x) = 0$$

da cui segue immediatamente la (11.2).

(iv) Nel caso $m = 1$, Df è un vettore (riga) e $D_y f$ è un numero; quindi dire che Df e $D_y f$ hanno rango 1 significa semplicemente che non sono nulli. In tal caso la formula (11.2) diventa

$$Dg(x) := -\frac{D_x f(x, g(x))}{D_y f(x, g(x))} \ . \tag{11.3}$$

(v) Se la funzione f negli enunciati dei Teoremi 11.2 e 11.3 è di classe C^k con $1 < k \leq \infty$, allora la funzione g è pure di classe C^k (cfr. Esercizi 11.6 e 11.7).

(vi) Nel teorema 11.2, la condizione che $Df(x_0)$ abbia rango massimo è sufficiente a garantire che $f^{-1}(0)$ coincide con il grafico di una funzione in un intorno di 0, ma non affatto è necessaria. Data infatti una funzione f tale che $f^{-1}(0)$ è localmente grafico, si consideri $\hat{f} := |f|^2$: chiaramente $\hat{f}^{-1}(0)$ è uguale a $f^{-1}(0)$ e quindi è localmente grafico, ma $D\hat{f} = 0$ in tutti i punti di $\hat{f}^{-1}(0)$, e quindi le ipotesi del Teorema 11.2 non sono mai verificate.

Il Teorema 11.2 segue facilmente dal Teorema 11.3. Per quest'ultimo diamo due differenti dimostrazioni. La prima si applica solo al caso $m = 1$ ma è particolarmente istruttiva; in particolare, la costruzione della funzione g (descritta nel passo 1) è basata su un'idea relativamente semplice. La seconda dimostrazione è più generale e complessivamente più breve, ma si basa in modo essenziale sul teorema di inversione locale, e quindi l'idea risulta un po' nascosta.

Prima dimostrazione del Teorema 11.3. - (Solo per il caso $m = 1$.)

Passo 1. Costruzione della funzione g. Per ipotesi $D_y f(x_0, y_0)$ è un numero diverso da 0; supponiamo che sia positivo (il caso opposto si tratta in modo analogo). Per la continuità di Df esiste allora un intorno U di (x_0, y_0) contenuto in A in cui $D_y f$ è positiva.

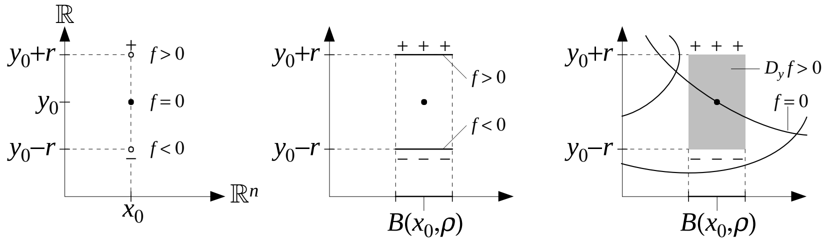
Prendiamo ora $r > 0$ tale che il segmento 'verticale' $\{x_0\} \times [y_0 - r, y_0 + r]$ è contenuto in U. Siccome $D_y f$ è positiva in U, la funzione f risulta strettamente crescente su detto segmento, e siccome $f(x_0, y_0) = 0$ si ha che

$$f(x_0, y_0 - r) < 0 < f(x_0, y_0 + r) \ .$$

Per la continuità di f possiamo allora trovare $\rho > 0$ tale che per ogni $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$

$$f(x, y_0 - r) < 0 < f(x, y_0 + r) \ . \tag{11.4}$$

A patto di sostituire ρ con un numero più piccolo possiamo inoltre supporre che il cilindro chiuso $\overline{B}(x_0, \rho) \times [y_0 - r, y_0 + r]$ sia contenuto in U (questo fatto non è del tutto immediato, cfr. Esercizio 11.9) e che quindi la derivata parziale $D_y f$ sia ivi strettamente positiva.



La (11.4) dice che per ogni $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ e assume un valore negativo ad un estremo dell'intervallo $[y_0-r, y_0+r]$ e positivo nell'altro; per il teorema dei valori intermedi deve dunque esistere almeno un punto y in detto intervallo tale che $f(x, y) = 0$. Inoltre $D_y f$ è strettamente positiva su tutto l'intervallo e quindi la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è strettamente crescente; ne segue che il punto in questione è unico.

A questo punto è chiaro qual è la funzione g cercata: per ogni $x \in \overline{B}(x_0, \rho)$ poniamo $g(x)$ esattamente uguale all'unico $y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ tale che $f(x, y)$.

Allora l'intersezione di C con $\overline{B}(x_0, \rho) \times [y_0 - r, y_0 + r]$ coincide per definizione con il grafico di g. Per concludere la costruzione basta osservare che per via della (11.4) la funzione g assume valori strettamente compresi tra $y_0 - r$ e $y_0 + r$ ovvero si tratta di una mappa da $\overline{B}(x_0, \rho)$ in $B(y_0, r)$.

Passo 2. Continuità di g. Siccome il grafico di g coincide in $\overline{B}(x_0, \rho) \times [y_0 - r, y_0 + r]$ con l'insieme chiuso C, la funzione g è continua (enunciato (b) dell'Esercizio 11.10).

Passo 3. Differenziabilità di g e dimostrazione della formula (11.3). Fissiamo $x \in B(x_0, \rho)$, e per ogni h tale che $x + h \in B(x_0, \rho)$, poniamo $k(h) := g(x + h) - g(x)$. Allora

$$0 = f(x + h, g(x + h)) = f(x + h, g(x) + k(h))$$

e sostituendo a $f(x + h, g(x) + k(h))$ lo sviluppo di Taylor di f in $(x, g(x))$ otteniamo

$$0 = D_x f(x, g(x)) \cdot h + D_y f(x, g(x))\, k(h) + o\big(\sqrt{h^2 + k^2(h)}\big) \tag{11.5}$$

Dalla (11.5) si deduce innanzitutto che $k(h) = O(|h|)$ per $h \to 0$. Supponiamo infatti per assurdo che così non sia: allora esiste una successione $h_n \to 0$ tale che, posto $k_n := k(h_n)$, si ha $|k_n|/|h_n| \to +\infty$, ovvero $|h_n| = o(|k_n|)$. L'identità (11.5) implica allora

$$0 = D_y f(x, g(x))\, k_n + o(|k_n|) \ ;$$

dividendo per k_n e prendendo il limite per $n \to +\infty$ si ottiene infine $0 = D_y f(x, g(x))$, mentre sappiamo che $D_y f$ è strettamente positiva su $\overline{B}(x_0, \rho) \times [y_0 - r, y_0 + r]$.

Sapendo che $k(h) = O(|h|)$, la (11.5) implica

$$k(h) = -\frac{D_x f(x, g(x))}{D_y f(x, g(x))} \cdot h + o(|h|) \ ,$$

e ricordando la definizione di $k(h)$,

$$g(x + h) = g(x) - \frac{D_x f(x, g(x))}{D_y f(x, g(x))} \cdot h + o(|h|) \ ,$$

il che equivale a dire che g è differenziabile in x e vale la (11.3).

Passo 4. Continuità di Dg. La continuità di Dg segue immediatamente dalla formula (11.3) usando la continuità di f e di g (ed il fatto che $D_y f$ non si annulla mai sul grafico di g). □

OSSERVAZIONE. - Tramite un opportuno procedimento per induzione su m è possibile ottenere una dimostrazione del Teorema 11.3 per m qualunque a partire dal caso $m = 1$. Qui ci limitiamo ad accennare la dimostrazione del caso $m = 2$; i dettagli e la dimostrazione del caso generale vengono lasciati per esercizio.

Siccome la matrice $D_y f(x_0, y_0)$ ha rango 2, almeno uno degli elementi deve essere non nullo: supponiamo per semplicità che sia quello di indici $(2, 2)$, ovvero che $D_{y_2} f_2(x_0, y_0) \neq 0$ (al solito, f_1, f_2 e y_1, y_2 sono le componenti di f e di y). Possiamo allora applicare il Teorema 11.3 (caso $m = 1$) alla funzione f_2, e scrivere $f_2^{-1}(0)$ in un intorno di (x_0, y_0) come grafico di una funzione $g_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A questo punto si considera la funzione $\hat{f}_1$ definita da $\hat{f}_1(x, y_1) := f_1(x, y_1, g_2(x, y_1))$: usando il fatto che $D_y f$ ha rango due in (x_0, y_0) si dimostra che $D_{y_1} \hat{f}_1$ è diversa da 0 nel punto $(x_0, \hat{y}_0)$, dove $\hat{y}_0$ è la prima coordinata di y_0. Quindi è possibile scrivere $\hat{f}_1^{-1}(0)$ come grafico di una funzione $g_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. A questo punto non è difficile vedere che $f^{-1}(0) = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$ si scrive come grafico di $g(x) := (g_1(x), g_2(x, g_1(x)))$.

SECONDA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 11.3. - Questa dimostrazione si basa sul teorema di invertibilità locale (Teorema 10.1). Sia $\Phi : A \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ la mappa definita da

$$\Phi(x, y) := (x, f(x, y)) \; .$$

La derivata di Φ è una matrice $n \times n$ data dai seguenti quattro blocchi:

$$D\Phi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_x f & D_y f \end{pmatrix} \; .$$

In particolare $\det(D\Phi(x, y)) = \det(D_y f(x, y))$.

Poiché $D_y f(x_0, y_0)$ ha rango m, ovvero ha determinante non nullo, anche il determinante di $D\Phi(x_0, y_0)$ è diverso da zero, e quindi la mappa Φ soddisfa le ipotesi del teorema di invertibilità locale nel punto (x_0, y_0). Pertanto esiste un intorno aperto U di (x_0, y_0) tale che $V := \Phi(U)$ è aperto, la restrizione di Φ ad U è iniettiva, e l'inversa $\Phi^{-1} : V \to U$ è di classe C^1.

Siccome Φ è una mappa della forma $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$, non è difficile vedere che Φ^{-1} deve essere della forma $(x, z) \mapsto (x, \phi(x, z))$ con g mappa C^1 da V in $\mathbb{R}^m$. Pertanto, detto V' l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^d$ tali che $(x, 0) \in V$,

$$\begin{aligned} C \cap U &= \big\{(x, y) \in U : \; f(x, y) = 0\big\} \\ &= \big\{(x, y) \in U : \; \Phi(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \{0\}\big\} \\ &= \Phi^{-1}\big((\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap V\big) \\ &= \big\{\Phi^{-1}(x, 0) : \; x \in V'\big\} = \big\{(x, \phi(x, 0)) : \; x \in V'\big\} \; . \end{aligned}$$

Dunque C coincide dentro l'aperto U con il grafico della funzione $g : V' \to \mathbb{R}^m$ definita da $g(x) := \phi(x, 0)$. Si noti che V' è aperto in $\mathbb{R}^d$ in quanto intersezione dell'aperto V con il piano $\mathbb{R}^d \times \{0\}$, e che g è di classe C^1 perché tale è ϕ.

Siccome g è di classe C^1, la formula (11.2) si dimostra come nell'Osservazione 11.4(iii).

Per concludere la dimostrazione, basta scegliere $r, \rho > 0$ in modo tale che valgano le seguenti inclusioni: a) il prodotto $B(x_0, \rho) \times B(y_0, r)$ è contenuto in U; b) $B(x_0, \rho)$ è contenuto in V'; c) $g(B(x_0, \rho))$ è contenuto in $B(y_0, r)$. $\square$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 11.2. - Se la matrice $Df(x_0)$ ha rango m, allora tra le n colonne di questa matrice ne esistono m linearmente indipendenti. A patto di riordinare le colonne, vale a dire di rinumerare le variabili in $\mathbb{R}^n$, possiamo supporre che quelle linearmente indipendenti siano le ultime m.

Indicando quindi con $x' := (x_1, \ldots, x_d)$ le prime d variabili e con $x'' := (x_{d+1}, \ldots, x_n)$ le ultime m, si ha che la derivata $D_{x''} f$ ha rango m nel punto $x_0 = (x'_0, x''_0)$ e possiamo quindi applicare il Teorema 11.3: pertanto esistono $\rho, r > 0$ ed una funzione g di classe C^1 dalla palla $B(x_0', \rho)$ (contenuta in $\mathbb{R}^d$) nella palla $B(x_0'', \rho)$ (contenuta in $\mathbb{R}^m$) tale che l'intersezione di C con l'aperto $B(x_0', \rho) \times B(x_0'', \rho)$ in $\mathbb{R}^n$ coincide con il grafico di g.

Per ottenere una funzione g definita su $\mathbb{R}^d$ si prende U della forma $U := B(x_0', \rho') \times B(x_0'', \rho)$ con ρ' strettamente minore di ρ e si applica l'Esercizio 11.15 per estendere la funzione g a tutto il complementare di $B(x_0', \rho')$. $\square$

Esercizi

11.5. - Verificare se le ipotesi del Teorema 11.2 sono soddisfatte o meno nei vari esempi elencati in §11.1. Per i punti in cui sono soddisfatte, specificare quali variabili possono essere esplicitate.

11.6. - Posto $d = m = 1$, si prendano f e g come nell'enunciato del Teorema 11.3. Supponendo che f sia di classe C^2, dimostrare che g è di classe C^2 e scrivere esplicitamente le derivate g' e g'' in termini delle derivate parziali di f di ordine 1 e 2.

11.7*. - Si prendano f e g come nell'enunciato del Teorema 11.3. Dimostrare che se f è di classe C^k con $1 < k \leq +\infty$ allora g è pure di classe C^k.

Traccia: utilizzare l'Esercizio 10.6(d) per dimostrare che $(x, y) \mapsto [D_y f(x, y)]^{-1}$ è una mappa di classe C^{k-1}.

11.8. - Dimostrare quanto asserito nell'Osservazione 11.4(v).

11.9. - Siano U e C un insieme aperto ed un insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $\rho > 0$ indichiamo con C_ρ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ che distano meno di ρ da C, cioè $\operatorname{dist}(x, C) < \rho$ dove $\operatorname{dist}(x, C) := \inf\{|x - y| : y \in C\}$ (l'insieme C_ρ viene detto *ρ-intorno* di C). Dimostrare che

(a) la funzione $x \mapsto \operatorname{dist}(x, C)$ è continua e C_ρ è aperto per ogni $\rho > 0$;
(b) se C è un compatto contenuto in U esiste $\rho > 0$ tale che C_ρ è contenuto in U;
(c) la conclusione al punto (b) non vale se si assume solo che C sia chiuso;
(d) se C è un segmento della forma $\{x_0\} \times I$ contenuto in U con $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e I intervallo chiuso e limitato, allora esiste $\rho > 0$ tale che il cilindro chiuso $\overline{B}(x_0, r) \times I$ è contenuto in U.

11.10. - Siano X e Y spazi metrici, e $g : X \to Y$ una funzione; indichiamo con Γg il grafico di g cioè l'insieme dei punti $(x, g(x)) \in X \times Y$ tali che $x \in X$. Dimostrare che

(a) se g è continua allora Γg è chiuso in $X \times Y$;
(b) se Y è compatto e Γg è chiuso in $X \times Y$ allora g è continua;
(c) la conclusione al punto (b) può non valere se Y non è compatto.

Traccia. (a) Γg è uguale a $f^{-1}(0)$ dove $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ è la funzione continua definita da $f(x, y) := d_Y(g(x), y)$. (b) Se per assurdo g fosse discontinua in x esisterebbe $\varepsilon > 0$ ed una successione $x_n \to x$ tale che $d_Y(g(x_n), g(x)) \geq \varepsilon$ per ogni n; passando ad una sottosuccessione si può supporre che $g(x_n) \to y$, e dunque $d(y, g(x)) \geq \varepsilon$; d'altra parte $(x_n, g(x_n))$ tende a (x, y), e per la chiusura di Γg si ha che $(x, y) \in \Gamma g$ ovvero $y = g(x)$.

11.11. - Dati C_0, C_1 insiemi chiusi disgiunti nello spazio metrico X, dimostrare che esiste una funzione di separazione (cioè una funzione $\sigma : X \to [0, 1]$ tale che $\sigma(x) = 1$ per $x \in C_1$ e $\sigma(x) = 0$ per $x \in C_0$) che è continua.

Traccia: prendere $\sigma(x) := \dfrac{\operatorname{dist}(x, C_0)}{\operatorname{dist}(x, C_1) + \operatorname{dist}(x, C_0)}$.

11.12. - Dato C insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$, dimostrare che esiste una funzione $\Phi_C : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ di classe C^1 tale che $\Phi_C^{-1}(0) = C$.

Traccia. 1) Sia $\phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione di classe C^1 tale che $\phi(t) > 0$ per $t < 1$ e $\phi(t) = 0$ per $t \geq 1$; dimostrare che $x \mapsto \phi(|x|^2)$ è una funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^n$. 2) Prendere una famiglia numerabile di palle aperte $B(x_i, r_i)$ la cui unione è $\mathbb{R}^n \setminus C$ e porre

$$\Phi_C(x) := \sum_i a_i\, \phi\big(r_i^{-2}|x - x_i|^2\big) \ ; \tag{11.6}$$

dimostrare che è possibile scegliere dei coefficienti $a_i > 0$ in modo tale che la serie di funzioni in (11.6) e la corrispondente serie delle derivate convergono totalmente su tutto $\mathbb{R}^n$. 3) Dimostrare che Φ_C è la funzione cercata.

11.13. - Dati C_1, C_2 insiemi chiusi disgiunti in $\mathbb{R}^n$, dimostrare che esiste una funzione di separazione $\sigma : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ di classe C^1 (cfr. Esercizio 11.11).

Traccia: prendere Φ_{C_1} e Φ_{C_2} come nell'Esercizio 11.12 e porre $\sigma(x) := \dfrac{\Phi_{C_2}(x)}{\Phi_{C_1}(x) + \Phi_{C_2}(x)}$.

11.14. - Siano Φ_C e σ le funzioni costruite negli Esercizi 11.12 e 11.13. Modificando opportunamente le dimostrazioni suggerite in quegli esercizi mostrare che:
a) Φ_C e σ possono essere costruite di classe C^k per qualunque intero positivo k;
b*) Φ_C e σ possono essere costruite di classe C^∞.

11.15. - Sia V un aperto di $\mathbb{R}^n$, $g : V \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1 e C un chiuso contenuto in V. Dimostrare che esiste una funzione $\hat{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1 tale che $\hat{g} = g$ in C e $\hat{g} = 0$ fuori da V.

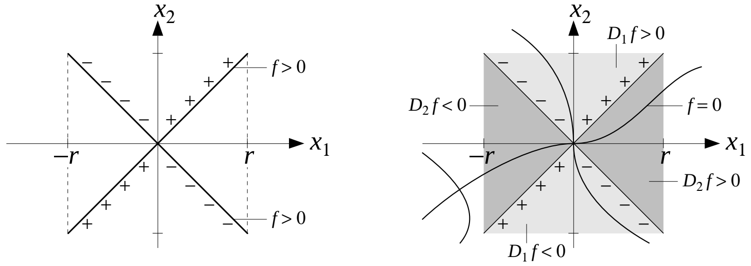
Traccia. Prendere V' aperto tale che $C \subset V' \subset \overline{V}' \subset V$ e prendere σ funzione di separazione di classe C^1 che vale 1 in C e 0 in $\mathbb{R}^n \setminus V'$ (cfr. Esercizio 11.13). Porre $\hat{g} := \sigma g$ in V e $\hat{g} := 0$ fuori da V.

11.16*. - Sia $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $D_y f \neq 0$ ovunque. Dimostrare che l'insieme $f^{-1}(0)$ è il grafico di una funzione $g : A \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con A aperto di $\mathbb{R}^d$. Far vedere con un esempio che il dominio di definizione A della funzione g può essere un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^d$.

11.17*. - Dare un esempio di mappa $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 tale che $\det(D_y f) \neq 0$ ovunque e per cui l'insieme $f^{-1}(0)$ non si scrive come grafico di alcuna mappa.

11.18*. - Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, e sia x_0 un punto di $C := f^{-1}(0)$ tale che $Df(x_0) = 0$ e $D^2 f(x_0)$ è una matrice con un autovalore strettamente negativo ed uno strettamente positivo. Dimostrare che esiste un intorno U di x_0 tale che $C \cap U$ si scrive come unione di due grafici di funzioni di classe C^1 da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (a patto di scegliere opportunamente gli assi di riferimento in $\mathbb{R}^2$).

Traccia. 1) Tramite un cambio di variabili affine ci si riconduca al caso in cui $x_0 = (0,0)$ e lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 di f in $(0,0)$ è $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + o(|x|^2)$. 2) Esiste $r > 0$ tale che $f > 0$ sul segmento di vertici $(0,0)$ e (r,r), e $f < 0$ sul segmento di vertici $(0,0)$ e $(r,-r)$; $D_2 f > 0$ sul triangolo T di vertici $(0,0)$, (r,r) e $(r,-r)$.



3) Dimostrare che per ogni $x_1 \in [0, r]$ esiste uno ed un solo $x_2 \in [-x_1, x_1]$ tale che $f(x_1, x_2) = 0$, ovvero che l'intersezione di C con il triangolo T coincide con il grafico di una funzione $x_2 = g(x_1)$.
4) Argomentare analogamente per gli altri triangoli che formano il quadrato $[-r, r]^2$.

Capitolo 12. Superfici regolari e moltiplicatori di Lagrange

[versione: ———]

Capitolo 13. Il teorema della divergenza

[versione: ——]

Capitolo 14. Potenziale di un campo di vettori

[versione: ———]

Capitolo 15. Esempi di equazioni alle derivate parziali

[versione: ——–]

Capitolo 16. Serie di Fourier

[versione: 2 agosto 2006]

Data una funzione f definita su $\mathbb{R}$ e T-periodica, cioè che soddisfa $f(x+T) = f(x)$ per ogni x, ci si chiede se è possibile scriverla come combinazione lineare – eventualmente infinita – di un'opportuna famiglia $\mathscr{F}$ di funzioni T-periodiche 'elementari'. In questo capitolo supporremo $T := 2\pi$ e considereremo due sole famiglie di funzioni periodiche elementari, peraltro strettamente collegate:

1) $\mathscr{F} := \{\cos(nx), \sin(nx) : n = 1, 2, \ldots\}$: in tal caso ci si chiede se è possibile scrivere una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π come

$$f(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \; ; \tag{16.1}$$

2) $\mathscr{F} := \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$: in tal caso ci si chiede se è possibile scrivere una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di periodo 2π come

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{inx} \; . \tag{16.2}$$

L'espressione a destra dell'uguale nella formula (16.1) è detta *serie di Fourier reale* della funzione f, mentre quella in (16.2) è detta *serie di Fourier complessa*. Si noti che tramite le formule

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx) \; , \quad e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx)$$

è possibile passare dalla serie di Fourier complessa a quella reale. Si passa invece dalla serie di Fourier reale a quella complessa ricordando che

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \; , \quad \sin(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} - e^{-inx}) \; .$$

Una delle ragioni per considerare la serie di Fourier complessa oltre a quella reale è che per questa le dimostrazioni risultano essere di gran lunga più semplici.

La formula (16.2), come anche la (16.1), pone implicitamente diversi problemi: a) sotto quali ipotesi (su f) esistono dei coefficienti c_n tali che la serie converge, e converge proprio a $f(x)$? b) come calcolare effettivamente i coefficienti c_n?

La risposta alla seconda domanda è immediata se si osserva che esiste un prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale delle funzioni di periodo 2π da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, rispetto al quale l'insieme di funzioni $\mathscr{F} := \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale (Definizione 16.3 e Proposizione 16.7). Si ricordi infatti che dato uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare ed un sistema di vettori ortonormali $\{v_j\}$, allora è possibile scrivere ogni vettore $x \in V$ come combinazione lineare dei vettori v_j, cioè $x = \sum_j c_j v_j$, se e solo se i vettori $\{v_j\}$ generano lo spazio V, ed in tal caso i coefficienti c_j coincidono con il prodotto scalare di x e v_j.

Dunque i coefficienti c_n in (16.2) non possono che essere il prodotto scalare di f e e^{inx}.

Resta però da capire se $\mathscr{F} := \{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ sia o meno una base. Precisiamo subito che, quale che sia lo spazio di funzioni che si decide di considerare, $\mathscr{F}$ non è una base nel senso solito del termine (ed infatti non ci si aspetta di scrivere una qualunque funzione come combinazione lineare *finita* delle funzioni e^{inx}). Tuttavia $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale *massimale*, nel senso che non è possibile aggiungere ad $\mathscr{F}$ nessuna funzione in modo da avere ancora un sistema ortonormale (Proposizione 16.7). Questa proprietà è quanto di più vicino c'è all'essere una base, ed infatti basta a garantire che ogni funzione f di classe C^1 si scrive come combinazione lineare *infinita* delle funzioni e^{inx}, e cioè vale la (16.2) (Teorema 16.10).

La serie di Fourier complessa

La prima parte di questo capitolo è dedicata alla serie di Fourier complessa. L'estensione dei vari risultati alla serie di Fourier reale verrà svolta in seguito, omettendo le dimostrazioni.

16.1. Definizione. - Per cominciare, precisiamo lo spazio di funzioni che consideriamo:

$$X := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \ f \text{ continua e } 2\pi\text{-periodica} \} .$$

Si vede subito che X è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri complessi (la somma è la solita somma di funzioni).

16.2. Osservazioni. - (i) Dire che una funzione f definita su $\mathbb{R}$ ha periodo T significa che $f(x+T) = f(x)$ per ogni x. Si noti che non si richiede che T sia il più piccolo dei numeri positivi per cui questo vale, per cui se f ha periodo T ha anche periodo kT per ogni intero k.

(ii) Lo spazio X è 'equivalente' ad altri due spazi di funzioni:

$$X' := \{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C} : \ f \text{ continua e } f(-\pi) = f(\pi) \}$$

e

$$X'' := \{ f : K \to \mathbb{C} : \ f \text{ continua} \}$$

dove K è lo spazio topologico ottenuto identificando gli estremi del segmento $[-\pi, \pi]$ (dunque K è omeomorfo alla circonferenza S^1). Dire che X, X', X'' sono 'equivalenti' non significa che sono uguali – si tratta infatti di spazi di funzioni con domini differenti nei tre casi – ma che esiste una corrispondenza biunivoca naturale tra ciascuno e gli altri. Per la precisione, la corrispondenza tra X ed X' è quella che ad ogni funzione $f \in X$ associa la sua restrizione all'intervallo $[-\pi, \pi]$; la corrispondenza tra X'' e X' e quella che ad ogni $f \in X''$ associa la funzione $f \circ p$ dove p è la proiezione canonica di $[-\pi, \pi]$ sullo spazio quoziente K.

16.3. Definizione. - Sullo spazio X si considera il prodotto scalare

$$\langle f; g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \tag{16.3}$$

dove $\bar{z} := x - iy$ indica il coniugato di $z = x + iy$. La verifica del fatto che $\langle\ ;\ \rangle$ è un prodotto scalare è accennata nell'Esercizio 16.22.

Due vettori $f, g \in X$ si dicono *ortogonali* se $\langle f; g \rangle = 0$. Una famiglia $\mathscr{F}$ di elementi di X è un *sistema ortonormale* se $\langle f; f \rangle = 1$ per ogni $f \in \mathscr{F}$ e $\langle f; g \rangle = 0$ per ogni $f \neq g \in \mathscr{F}$. Un sistema ortonormale $\mathscr{F}$ si dice *massimale* se non è un sottoinsieme proprio di alcun sistema ortonormale, ovvero non esiste alcun vettore non nullo in X che sia ortogonale a tutti gli elementi di $\mathscr{F}$.

16.4. Definizione. - Il prodotto scalare induce su X la norma

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f; f \rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} . \tag{16.4}$$

Il numero $\|f\|_2$ viene detta norma L^2 (leggi 'elle-due') della funzione f.

16.5. Osservazioni. - (i) Il fattore $1/2\pi$ nella definizione del prodotto scalare viene messo per far sì che le funzioni e^{inx} abbiano norma 1 per ogni n (cfr. Proposizione 16.7).

(ii) Nella definizione usuale della norma L^2 non appare il fattore $1/2\pi$; abbiamo preferito inserirlo per evidenziare il collegamento con il prodotto scalare.

(iii) Oltre alla norma L^2 si definisce anche la norma L^p per ogni p compreso tra 1 ed $+\infty$ ponendo

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} .$$

Per $p \neq 2$ questa norma non corrisponde ad alcun prodotto scalare.

Nel lemma che segue si richiamano alcuni fatti elementari, che dovrebbero essere ben noti, riguardanti il prodotto scalare e la norma ad esso associata.

16.6. Lemma. - (a) *Sia $\{f_j\}$ una famiglia finita di elementi di X a due a due ortogonali, e sia $f := \sum_j f_j$. Allora*

$$\|f\|_2^2 = \sum_j \|f_j\|_2^2 . \tag{16.5}$$

(b) *Sia $\{g_j\}$ un sistema ortonormale (finito o numerabile) in X. Per ogni $f \in X$ si ha*

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_j |\langle f; g_j \rangle|^2 . \tag{16.6}$$

Dimostrazione. - La (16.5) segue dal fatto che $\langle f_j; f_k \rangle = 0$ per $j \neq k$:

$$\|f\|_2^2 = \langle f; f \rangle = \sum_{jk} \langle f_j; f_k \rangle = \sum_j \langle f_j; f_j \rangle = \sum_j \|f_j\|_2^2 .$$

Dimostriamo l'enunciato (b) nel caso in cui $\{g_j\}$ è un sistema ortonormale *finito*. Poniamo $a_j := \langle f; g_j \rangle$ per ogni j e $h := f - \sum_j a_j g_j$. Allora h è ortogonale a g_j per ogni i, infatti

$$\langle h; g_j \rangle = \big\langle f - \sum_k a_k g_k;\, g_j \big\rangle = \langle f; g_j \rangle - \sum_k a_k \langle g_k; g_j \rangle = a_j - \sum_k a_k \delta_{kj} = 0 .$$

Dunque $\{h, a_j g_j\}$ è una famiglia di funzioni a due a due ortogonali con somma uguale ad f. La (16.5) implica quindi

$$\|f\|_2^2 = \|h\|_2^2 + \sum_j \|a_j g_j\|_2^2 \geq \sum_j \|a_j g_j\|_2^2 = \sum_j |a_j|^2 \|g_j\|_2^2 = \sum_j |a_j|^2 ,$$

che è proprio la (16.6).

Sia ora $\{g_j\}$ un sistema ortonormale *numerabile*. Sappiamo allora che la (16.6) vale a patto di restringere la somma a destra della disuguaglianza ad una qualunque sottofamiglia finita di indici j. In particolare la (16.6) vale a patto di sostituire alla serie $\sum_j |\langle f; g_j \rangle|^2$ la corrispondente somma parziale n-esima. Passando al limite per $n \to \infty$ otteniamo la (16.6) nel caso generale. □

16.7. Proposizione. - *La famiglia di funzioni $\mathscr{F} := \big\{ e^{inx} :\ n \in \mathbb{Z} \big\}$ è un sistema ortonormale massimale in X.*

Dimostrazione. - Ricordando che $\overline{e^{ia}} = e^{-ia}$ per ogni numero reale a si ottiene

$$\langle e^{inx}; e^{imx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\Big|x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 & \text{se } n = m \\ \dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

e dunque $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale massimale.

La dimostrazione della massimalità è più delicata. Cominciamo con una definizione: si dice *polinomio trigonometrico* ogni combinazione lineare di elementi di $\mathscr{F}$, cioè una funzione della forma $P(x) = \sum_n a_n e^{inx}$ con $a_n \neq 0$ solo per un numero finito di indici n.

Supponiamo ora per assurdo che esista f elemento non nullo di X tale che $\langle f; e^{inx}\rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Allora $\langle f; P\rangle = 0$ per ogni polinomio trigonometrico P, e quindi la formula (16.5) implica

$$\|f - P\|_2 = \|f\|_2 + \|P\|_2 \geq \|f\|_2 \ . \tag{16.7}$$

D'altra parte il Corollario 16.19 implica che esiste una successione di polinomi trigonometrici P_k che converge uniformemente a f, dunque $f - P_k$ converge uniformemente a 0 e questo implica che $\|f - P_k\|_2$ tende a 0 (cfr. Esercizio 16.25), contraddicendo la (16.7). $\square$

16.8. Definizione. - Data $f \in X$, si dicono *coefficienti di Fourier (complessi)* di f i numeri

$$c_n := \langle f; e^{inx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

La disuguaglianza (16.6) implica allora

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \ . \tag{16.8}$$

In effetti si può dimostrare che nella (16.8) vale sempre l'uguaglianza (Esercizio 16.27). Questo fatto, pur fondamentale, non verrà utilizzato nelle dimostrazioni che seguono.

16.9. Lemma. - *Sia f una funzione in X di classe C^1 con coefficienti di Fourier c_n. Allora i coefficienti di Fourier della derivata f' sono inc_n, ovvero*

$$\langle f'; e^{inx}\rangle = in\langle f; e^{inx}\rangle \ . \tag{16.9}$$

Inoltre

$$\|f'\|_2^2 \geq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2 \ . \tag{16.10}$$

Dimostrazione. - Per dimostrare la (16.9) basta partire dalla definizione di prodotto scalare ed integrare per parti:

$$\begin{aligned}\langle f'; e^{inx}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big|f(x)\,e^{inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\big(e^{-inx}\big)'dx \\ &= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,e^{-inx}dx = in\langle f; e^{inx}\rangle\end{aligned}$$

(siccome $f(-\pi) = f(\pi)$ per periodicità, il primo addendo nella seconda riga è nullo). Si ottiene la (16.10) applicando la disuguaglianza (16.8) alla funzione f'. $\square$

16.10. Teorema. - *Sia f una funzione in X di classe C^1 con coefficienti di Fourier c_n. Allora la serie di Fourier*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{16.11}$$

converge totalmente su $\mathbb{R}$ e coincide con la funzione $f(x)$, ovvero vale l'identità (16.2).

Dimostrazione. - Cominciamo col dimostrare che la serie di funzioni (16.11) converge totalmente. Siccome la norma del sup di e^{inx} è uguale a 1 per ogni n, la norma del sup di $c_n e^{inx}$ è uguale a $|c_n|$, e dunque dobbiamo dimostrare che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty \ . \tag{16.12}$$

La dimostrazione della (16.12) si basa su due fatti chiave: Il primo è che

$$2|c_n| \le n^2 |c_n|^2 + \frac{1}{n^2} \quad \text{per ogni } n \neq 0 \tag{16.13}$$

(basta applicare la disuguaglianza $2ab \le a^2 + b^2$ con $a := |nc_n|$ e $b := 1/|n|$). Il secondo è la disuguaglianza (16.10). Utilizzando la (16.13) e la (16.10) otteniamo infatti

$$2\sum_{n\neq 0} |c_n| \le \sum_{n\neq 0} n^2 |c_n|^2 + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} \le \|f'\|_2^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \ ,$$

che chiaramente implica la (16.12). Dunque la funzione

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

è ben definita, continua e 2π-periodica (quindi $g \in X$); resta da dimostrare che coincide con f.

Siccome g ha gli stessi coefficienti di Fourier di f, cioè c_n (Esercizio 16.30), la funzione $f - g$ ha tutti i coefficienti di Fourier nulli, cioè $\langle f - g; e^{inx}\rangle = 0$ per ogni n. La massimalità del sistema ortonormale $\{e^{inx}\}$ (Proposizione 16.7) implica allora che la funzione $f - g$ è identicamente nulla, ovvero che f e g coincidono. $\square$

16.11. Osservazioni. - (i) Il Teorema 16.10 vale anche quando f è una funzione continua e C^1 a tratti (cfr. Definizione 16.33 ed Esercizio 16.35). Se f è C^1 a tratti ma non continua si può dimostrare che le somme parziali della serie di Fourier convergono a $f(x)$ in tutti i punti x in cui f è continua, e convergono alla semisomma del limite destro e del limite sinistro nei punti in cui f è discontinua (Esercizio 16.39).

(ii) Se f è una generica funzione in X, la disuguaglianza (16.8) implica che la serie $\sum |c_n|^2$ è finita, ma questo non basta a dimostrare che la serie $\sum |c_n|$ è finita e quindi che la serie di Fourier di f converge totalmente: per quanto ne sappiamo potrebbe infatti succedere che $c_n = 1/n$, per cui la serie $\sum |c_n|^2$ risulterebbe finita mentre $\sum |c_n|$ è infinita.

(iii) Il Teorema 16.10 non vale per tutte le funzioni in X: esistono infatti funzioni continue e 2π-periodiche la cui serie di Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ non converge per infiniti valori di x. Si può anzi dimostrare (ma noi non lo faremo) che l'insieme delle funzioni in X la cui serie di Fourier non converge su un insieme denso di punti x è residuale in X.

Risoluzione dell'equazione del calore e delle onde

Come esempio di applicazione della serie di Fourier, 'risolviamo' l'equazione del calore e l'equazione delle onde su un anello. L'esposizione di questi risultati è abbastanza informale, nel senso che eviteremo deliberatamente di entrare nel dettaglio delle definizioni e delle dimostrazioni. Le Proposizioni 16.13 e 16.14 contengono delle formule risolutive per le due equazioni alle derivate parziali in oggetto, ma come spesso succede quello che più conta è il procedimento con cui le formule sono state ottenute.

Risolvere l'equazione del calore sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ con "con condizioni di periodicità al bordo" significa trovare le funzioni $u = u(x,t)$ definite su $[-\pi, \pi] \times [0, \infty)$ e di classe C^2 che soddisfano

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{per ogni } t, x \\ u(\pi, t) = u(-\pi, t) & \text{per ogni } t \\ u_x(\pi, t) = u_x(-\pi, t) & \text{per ogni } t \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \end{cases} \tag{16.14}$$

dove u_0 è una funzione assegnata, u_t e u_x indicano le derivate parziali di u nelle variabili t ed x, e u_{xx} la derivata parziale seconda nella direzione x.

16.12. OSSERVAZIONI. - (i) L'equazione alle derivate parziali nella prima riga della (16.14) è nota come *equazione del calore*, la seconda e la terza riga contengono le *condizioni al bordo*, mentre l'ultima riga contiene la *condizione iniziale* (e la funzione u_0 viene chiamata *dato iniziale*).

(ii) Le condizioni al bordo nella seconda e nella terza riga della (16.14) equivalgono grosso modo a chiedere che $u(x,t)$ sia una funzione di classe C^2 definita su $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, periodica nella variabile x con periodo 2π.

(iii) L'interpretazione fisica del problema (16.14) è la seguente: supponiamo di avere un anello di materiale conduttore di lunghezza 2π con spessore uniforme e trascurabile rispetto alla lunghezza. Indichiamo con $x \in [-\pi, \pi]$ i punti dell'anello, e con $u(x,t)$ la temperatura del materiale nel punto x all'istante t; siccome $x = \pi$ e $x = -\pi$ rappresentano lo stesso punto dell'anello, è naturale imporre che u sia periodica di periodo 2π nella variabile x, ovvero le condizioni al bordo nella (16.14). Trascurando il calore disperso all'esterno dell'anello, il comportamento della temperatura è determinato dall'equazione alle derivate parziali $u_t = u_{xx}$ (le varie costanti fisiche sono state rinormalizzate a 1), mentre u_0 rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale $t = 0$.

16.13. PROPOSIZIONE. - *Sia u una soluzione di classe C^2 del problema* (16.14). *Allora u è data dalla formula*

$$u(x,t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{-n^2 t} e^{inx} \tag{16.15}$$

dove d_n sono i coefficienti di Fourier complessi del dato iniziale $u_0(x)$.

DIMOSTRAZIONE. - Per ogni t indichiamo con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier della funzione $x \mapsto u(x,t)$ (intesa come funzione 2π-periodica nella variabile x).

Vogliamo ora tradurre l'equazione $u_t = u_{xx}$ in un sistema di equazioni differenziali per i coefficienti $c_n(t)$. Il primo passo consiste nel calcolare (per ogni t) il prodotto scalare di entrambi i termini dell'equazione per e^{inx} e rappresentare il risultato in termini di $c_n(t)$. Abbiamo dunque

$$\langle u_t; e^{inx} \rangle = \langle u_{xx}; e^{inx} \rangle \quad \text{per ogni } n \text{ ed ogni } t. \tag{16.16}$$

Inoltre, utilizzando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale,

$$\begin{aligned} \langle u_t; e^{inx}\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_t(x,t)e^{-inx}dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)e^{-inx}dx\right) = \dot c_n(t)\ , \end{aligned} \tag{16.17}$$

mentre sappiamo già dal Lemma 16.9 che, fissato t, l'n-esimo coefficiente di Fourier di u_{xx} è uguale in volte l'n-esimo coefficiente di Fourier di u_x, che a sua volta è uguale a in volte l'n-esimo coefficiente di Fourier di u, ovvero

$$\langle u_{xx}; e^{inx}\rangle = in\langle u_x; e^{inx}\rangle = -n^2\langle u; e^{inx}\rangle = -n^2 c_n(t)\ . \tag{16.18}$$

Utilizzando la (16.17) e la (16.18), l'equazione (16.16) diventa

$$\dot c_n(t) = -n^2 c_n(t) \quad \text{per ogni } n \text{ ed ogni } t, \tag{16.19}$$

mentre la condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$ implica

$$c_n(0) = d_n \quad \text{per ogni } n. \tag{16.20}$$

Ma l'equazione differenziale (16.19) e la condizione iniziale (16.20) permettono di calcolare esplicitamente c_n, e per la precisione si ha

$$c_n(t) = d_0 e^{-n^2 t} \quad \text{per ogni } n \text{ ed ogni } t,$$

e ricordando che $c_n(t)$ sono i coefficienti di Fourier di u all'istante t otteniamo la (16.15). □

16.14. Osservazioni. - (i) Per poter applicare il Lemma 16.9 ed ottenere la (16.19) è necessario che per ogni t le funzioni $x \mapsto u(x,t)$ e $x \mapsto u_x(x,t)$ siano di classe C^1 e appartengano a X, ovvero siano di classe C^1 sull'intervallo $[-\pi,\pi]$ ed assumano uguali valori agli estremi. Quest'ultima condizione è espressa dalle condizioni al contorno in (16.14). Si può ottenere l'identità $\langle u_{xx}; e^{inx}\rangle = -n^2\langle u; e^{inx}\rangle$ senza usare il Lemma 16.9 partendo dalla definizione del prodotto scalare $\langle u_{xx}; e^{inx}\rangle$ ed integrando due volte per parti; anche in questo caso il conto torna solo se valgono le condizioni al contorno $u(\pi,t) = u(-\pi,t)$ e $u_x(\pi,t) = u_x(-\pi,t)$.

(ii) Se il dato iniziale u_0 è una funzione a valori reali, non è difficile vedere che anche la soluzione data dalla formula (16.15) è una funzione a valori reali (si usi la caratterizzazione data nell'Esercizio 16.24(c)). Per risolvere dei problemi concreti conviene però usare la serie di Fourier reale invece che quella complessa; il procedimento è analogo a quello usato per dimostrare la Proposizione 16.13.

(iii) La Proposizione 16.13 asserisce che ogni soluzione u di classe C^2 del problema (16.14) è data dalla formula (16.15), ed in particolare tale soluzione è unica. Però questo non garantisce l'esistenza di una soluzione, che infatti viene presupposta. Si può tuttavia dimostrare che se il dato iniziale u_0 è di classe C^1 allora la formula (16.15) definisce una funzione di classe C^0 su $[-\pi,\pi] \times [0,+\infty)$ e di classe C^∞ su $[-\pi,\pi] \times (0,+\infty)$ che risolve il problema (16.14) – cfr. Esercizio 16.43.

Quanto fatto per l'equazione del calore può essere replicato per quella delle onde. Risolvere l'equazione delle onde sull'intervallo $[-\pi,\pi]$ con con condizioni di periodicità al bordo significa trovare le funzioni $u = u(x,t)$ definite su $[-\pi,\pi] \times [0,\infty)$ e di classe C^2 che soddisfano

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{per ogni } t, x \\ u(\pi,t) = u(-\pi,t) & \text{per ogni } t \\ u_x(\pi,t) = u_x(-\pi,t) & \text{per ogni } t \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \\ u_t(x,0) = v_0(x) & \text{per ogni } x \end{cases} \tag{16.21}$$

dove u_0 e v_0 sono due funzioni assegnate (i dati iniziali). Lasciamo per esercizio la dimostrazione del seguente risultato:

16.15. PROPOSIZIONE. - *Sia u una soluzione di classe C^2 del problema* (16.21). *Allora u è data dalla formula*

$$u(x,t) := d_0 + e_0 t + \sum_{n\neq 0} \Big[d_n \cos(nt) + \frac{e_n}{n} \sin(nt) \Big] e^{inx} \tag{16.22}$$

dove d_n e e_n sono i coefficienti di Fourier complessi dei dati iniziali $u_0(x)$ e $v_0(x)$.

La serie di Fourier reale

Nel caso reale si considera lo spazio di funzioni

$$Y := \big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ continua e } 2\pi\text{-periodica} \big\} ,$$

dotato del prodotto scalare

$$\langle f; g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx \ .$$

Il sistema ortonormale massimale di riferimento è dato dalle funzioni trigonometriche reali, cioè $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$, a cui va aggiunta una funzione costante, vale a dire $1/\sqrt{2}$. I coefficienti di Fourier reali di una funzione $f \in Y$ sono

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &:= \langle f; \cos(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx \quad \text{per } n = 1, 2 \dots \\ b_n &:= \langle f; \sin(nx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(nx)\, dx \quad \text{per } n = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

16.16. TEOREMA. - *Sia f una funzione in Y di classe C^1 con coefficienti di Fourier reali a_n e b_n. Allora la serie di Fourier*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

converge totalmente su $\mathbb{R}$ e coincide con la funzione $f(x)$, ovvero vale l'identità (16.1).

Appendice: il Teorema di Stone-Weierstrass

In questa sezione enunciamo senza dimostrazione un importante risultato sull'approssimazione delle funzioni continue su un compatto tramite elementi di un algebra di funzioni (Teorema 16.17). Nel caso particolare dell'algebra di polinomi (Corollario 16.18) il teorema è dovuto a Weierstrass; la versione più generale è invece dovuta a M. Stone.

Introduciamo la notazione necessaria: dato K spazio metrico compatto, $C(K)$ indica lo spazio vettoriale *reale* delle funzioni continue da K in $\mathbb{R}$ dotato della distanza indotta dalla norma del sup, mentre $C(K;\mathbb{C})$ indica lo spazio vettoriale *complesso* delle funzioni continue da K in $\mathbb{C}$. Si dice che un sottoinsieme $\mathscr{F}$ di $C(K)$ o di $C(K;\mathbb{C})$ è una *sottoalgebra* se è un sottospazio vettoriale (reale nel primo caso e complesso nel secondo) chiuso rispetto all'usuale prodotto di funzioni, cioè $g_1, g_2 \in \mathscr{F} \Rightarrow g_1 \cdot g_2 \in \mathscr{F}$. Un sottoinsieme $\mathscr{F}$ di $C(K)$ o di $C(K;\mathbb{C})$ *separa fortemente i punti* di K se per ogni coppia di punti distinti $x_1, x_2 \in K$ esiste una funzione $f \in \mathscr{F}$ che assume valori distinti e diversi da zero su x_1 e x_2. Un sottoinsieme $\mathscr{F}$ di $C(K;\mathbb{C})$ si dice *chiuso per coniugio* se $g \in \mathscr{F} \Rightarrow \overline{g} \in \mathscr{F}$.

16.17. TEOREMA. - *Siano K, $C(K)$ e $C(K;\mathbb{C})$ come sopra. Allora:*
(i) *una sottoalgebra di $C(K)$ che separa fortemente i punti è densa in $C(K)$;*
(ii) *una sottoalgebra di $C(K;\mathbb{C})$ che è chiusa per coniugio e separa fortemente i punti è densa in $C(K;\mathbb{C})$.*

16.18. COROLLARIO. - *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni funzione continua $f : K \to \mathbb{R}$ esiste una successione di polinomi P_k (di n variabili) che convergono uniformemente a f su K.*

DIMOSTRAZIONE. - È immediato verificare che l'insieme delle funzioni polinomiali (ristrette all'insieme K) è una sottoalgebra di $C(K)$ che soddisfa le ipotesi dell'enunciato (i) del Teorema 16.17. □

Ricordo che un *polinomio trigonometrico* è una qualunque combinazione lineare finita delle funzioni e^{inx}, cioè una funzione $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ della forma

$$P(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

dove i coefficienti c_n sono numeri complessi diversi da 0 solo per un numero finito di indici n. Siccome $e^{inx} \cdot e^{imx} = e^{i(n+m)x}$, è facile dimostrare che l'insieme dei polinomi trigonometrici è una sottoalgebra dello spazio X delle funzioni continue e 2π-periodiche da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$.

16.19. COROLLARIO. - *Per ogni funzione $f \in X$ esiste una successione di polinomi trigonometrici P_k che convergono uniformemente a f su $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE. - Si usa il fatto che X è isomorfo $C(K;\mathbb{C})$ dove K è lo spazio compatto ottenuto identificando gli estremi dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ (cfr. Osservazione 16.2(ii) ed Esercizio 16.20). A questo punto è facile verificare che i polinomi trigonometrici sono una sottoalgebra chiusa per coniugio che separa fortemente i punti di K, e quindi basta applicare l'enunciato (ii) del Teorema 16.17. □

Esercizi

Se non si specifica altrimenti, negli esercizi che seguono X è lo spazio di funzioni definito in §16.1 e $\langle\ ;\ \rangle$ è il prodotto scalare definito in §16.3.

16.20. - a) Dimostrare che la corrispondenza tra X e X' definita nell'Osservazione 16.2(ii) è effettivamente una bigezione. Verificare che tale bigezione è un'isometria quando su X ed X' si considerano le distanze indotte dalla norma del sup.
b) Fare lo stesso per la corrispondenza tra X'' e X' definita sempre nell'Osservazione 16.2(ii).
c) Descrivere la corrispondenza tra X e X'' ottenuta componendo le corrispondenze summenzionate.

16.21. - Sia $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ una funzione continua e positiva. Dimostrare che l'integrale di f è zero se e solo se f è identicamente nulla.

Traccia: dato x_0 tale che $f(x_0) > 0$ esistono $r, c > 0$ tali che $f(x) \geq c$ per ogni $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, e quindi l'integrale di f è maggiore di $2cr$.

16.22. - Dimostrare che il prodotto $\langle\ ;\ \rangle$ definito in (16.3) è effettivamente un prodotto positivo su X, vale a dire che

(a) $\langle f; g\rangle = \overline{\langle g; f\rangle}$ per ogni f, g;
(b) la funzione $f \mapsto \langle f; g\rangle$ è lineare in f per ogni g;
(c) $\langle f; f\rangle \geq 0$ per ogni f;
(d) $\langle f; f\rangle = 0$ se e solo se f è identicamente nulla.

Traccia: utilizzare l'Esercizio 16.21 per dimostrare la proprietà (d).

16.23. - Sia V uno spazio vettoriale complesso dotato del prodotto scalare $\langle\ ;\ \rangle$, e sia $\|\ \|$ la ad esso associata. Dimostrare che

$$\mathrm{Re}\langle v; w\rangle = \frac{1}{4}\left[\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right] \tag{16.23}$$

dove $\mathrm{Re}\, z$ indica la parte reale del numero complesso z.

16.24. - Sia f una funzione in X con coefficienti di Fourier complessi c_n. Dimostrare i seguenti enunciati:
(a) i coefficienti di Fourier complessi di $\mathrm{Re}\, f$ (la parte reale di f) sono $\frac{1}{2}(c_n + \overline{c_{-n}})$;
(b) i coefficienti di Fourier complessi di $\mathrm{Im}\, f$ sono $\frac{1}{2i}(c_n - \overline{c_{-n}})$;
(c) f ha valori reali se e solo se $c_{-n} = \overline{c_n}$ per ogni $n = 0, 1, 2, \dots$.

16.25. - Su X consideriamo la distanza indotta dalla norma del sup. Dimostrare i seguenti enunciati:
(a) X è uno spazio metrico completo;
(b) la funzione da X in $\mathbb{R}$ data da $f \mapsto \|f\|_2$ è continua;
(c) la funzione da $X \times X$ in $\mathbb{C}$ data da $(f, g) \mapsto \langle f; g\rangle$ è continua.

16.26*. - Data una funzione $f \in X$ con coefficienti di Fourier c_n, si ponga

$$\phi(f) := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\right)^{1/2} .$$

Dimostrare che
(a) $\phi(f_1 + f_2) \leq \phi(f_1) + \phi(f_2)$ per ogni $f_1, f_2 \in X$;
(b) $\phi(f) \leq \|f\|$, dove $\|f\|$ è la norma del sup;
(c) $\phi(f)$ è una funzione Lipschitziana di f rispetto alla norma del sup.

16.27*. - Sia f una funzione in X con coefficienti di Fourier c_n. Dimostrare che

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 . \tag{16.24}$$

Traccia. 1) Dimostrare la (16.24) nel caso in cui f è un polinomio trigonometrico. 2) Usare l'Esercizio 16.26 per dimostrare che il valore della serie in (16.23) dipende con continuità da f rispetto alla distanza indotta dalla norma del sup. 3) Estendere la (16.24) a tutto lo spazio X usando il fatto che i polinomi trigonometrici sono densi in X e che entrambi i termini della (16.24) sono continui rispetto alla distanza indotta dalla norma del sup.

16.28. - Date $f, g \in X$, indichiamo con c_n e d_n i corrispondenti coefficienti di Fourier. Dimostrare l'identità di Parseval:

$$\langle f; g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \overline{d_n} .$$

Traccia: utilizzare la formula (16.23) per esprimere il prodotto scalare $\langle f; g\rangle$ in termini della norme L^2 delle funzioni $f \pm g$ e $f \pm ig$, e quindi usare l'identità (16.24).

16.29. - (a) Utilizzando le proprietà del prodotto scalare, dimostrare che la norma L^2 definita in §16.4 è effettivamente una norma su X.
(b*) Dimostrare che lo spazio X con la metrica indotta dalla norma L^2 non è completo.

16.30. - Sia $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$ una successione di numeri complessi tale che la serie $\sum c_n e^{inx}$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ alla funzione f. Dimostrare che
(a) la funzione f è continua e 2π-periodica;
(b) i coefficienti di Fourier complessi di f sono i numeri c_n.

16.31. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica di classe C^k con $k \geq 1$.
(a) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi della derivata $D^h f$ per $h = 1, \dots, k$;
(b) dimostrare che $\sum_n n^{2k} |c_n|^2 < +\infty$.

16.32. - Sia $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$ una successione di numeri complessi tali che $\sum_n |n|^k |c_n| < +\infty$ per un qualche intero $k \geq 1$. Dimostrare che la serie di funzioni $\sum_n c_n e^{inx}$ converge ad una funzione 2π-periodica di classe C^k.

16.33. Definizione. - Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di periodo 2π si dice di classe C^k a tratti con $k = 0, 1, \dots$ se esiste una partizione finita dell'intervallo $[-\pi, \pi]$, cioè una famiglia finita di punti $x_0 = -\pi < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = \pi$ tali che f coincide su ogni intervallo aperto (x_{j-1}, x_j) con una funzione di classe C^k definita su $[x_{j-1}, x_j]$.
Dunque f è continua e derivabile fino all'ordine k in tutti i punti esclusi al più gli $\{x_j\}$. In ciascun punto x_j la funzione f ammette un limite destro $f(x_j^+)$ ed un limite sinistro $f(x_j^-)$ (lo stesso vale per le derivate di f fino all'ordine k); f è continua se e solo se $f(x_j) = f(x_j^+) = f(x_j^-)$. Per l'ipotesi di periodicità il limite destro (risp. sinistro) di f in π è uguale a quello in $-\pi$.

16.34. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica, continua e C^1 a tratti, e siano c_n i suoi coefficienti di Fourier complessi. Dimostrare che il Lemma 16.9 vale anche in questo caso, e cioè che i coefficienti di Fourier di f' sono inc_n e si ha $\|f'\|_2^2 \geq \sum_n n^2 |c_n|^2$.

16.35. - Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica continua e C^1 a tratti, e siano c_n i suoi coefficienti di Fourier complessi. Adattando la dimostrazione del Teorema 16.10, far vedere che la serie di Fourier $\sum_n c_n e^{inx}$ converge totalmente alla funzione $f(x)$.

16.36. - Sia g la funzione 2π-periodica data da $g(x) := x$ per $x \in (-\pi, \pi)$ e $g(\pi) = 0$.
(a) Disegnare il grafico di g.
(b) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi c_n di g.
(c) Verificare che i coefficienti di Fourier della derivata di g non sono inc_n. Dunque l'identità (16.9) non vale per le funzioni C^1 a tratti che non siano anche continue (cfr. Esercizio 16.34).

16.37. - Sia X_d lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue a tratti e 2π-periodiche. Per ogni $f \in X_d$ e per ogni intero positivo m indichiamo con $S_m f$ la somma parziale m-esima della corrispondente serie di Fourier complessa, vale a dire

$$[S_m f](x) := \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx} .$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ indichiamo con $T_t f$ la funzione ottenuta traslando f verso destra di t, cioè

$$[T_t f](x) := f(x - t) .$$

(a) Dimostrare che la formula (16.3) definisce un prodotto scalare *degenere* su X_d, cioè che soddisfa tutte le proprietà elencate nell'Esercizio 16.22 tranne la (d).

(b) Determinare il sottospazio di X_d delle funzioni f tali che $\langle f; f\rangle = 0$.
(c) Verificare che S_m e T_t sono operatori lineari di X_d in sé.
(d) Calcolare i coefficienti di Fourier di $T_t f$ a partire da quelli di f.
(e) Dimostrare che $T_t(S_m f) = S_m(T_t f)$ per ogni $x \in X_d$, ovvero T_t e S_m commutano.

16.38*. - Sia g la funzione definita nell'Esercizio 16.36. Dimostrare che la successione delle somme parziali $[S_m g](x)$ (cfr. Esercizio 16.37) converge a $g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Traccia. 1) Verificare che i coefficienti di Fourier di g sono $c_0 = 0$ e $c_n = i(-1)^n/n$ per ogni $n \neq 0$. 2) Dimostrare che

$$[S_m g]'(x) = 1 - \sum_{n=-m}^{m} (-e^{ix})^n = 1 - (-1)^m \frac{\cos\left((m+\frac{1}{2})x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)} .$$

3) Integrando per parti, dimostrare che per ogni $x \in (-\pi, \pi)$ si ha

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{\cos\left((m+\frac{1}{2})t\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)}\, dt = 0 ;$$

dedurne la tesi per ogni $x \in (-\pi, \pi)$.

16.39. - Sia f una funzione della forma $f = f_0 + f_1$ dove f_0 è una funzione continua, C^1 a tratti e 2π-periodica mentre f_1 è una combinazione lineare finita di traslazioni della funzione g definita nell'Esercizio 16.36. Dimostrare che la successione delle somme parziali $[S_m f](x)$ converge a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Traccia: utilizzare quanto dimostrato negli Esercizi 16.35, 16.37 e 16.38.

16.40. - Dimostrare che per ogni funzione f appartenente a X_d la successione delle somme parziali $[S_m f(x)]$ converge a $f(x)$ per ogni x dove f è continua, e converge alla semisomma del limite destro $f(x^+)$ e del limite sinistro $f(x^-)$ per ogni x in cui f è discontinua.

Traccia. Costruire f_0, f_1 tali che a) $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ per ogni x in cui f è continua; b) f_0 è una funzione continua, C^1 a tratti e 2π-periodica; c) f_1 è una combinazione lineare finita di traslazioni della funzione g definita nell'Esercizio 16.36. Utilizzare quindi quanto dimostrato nell'Esercizio 16.39.

16.41*. - Dimostrare che ogni sistema ortonormale in X è finito o numerabile.

16.42*. - Dimostrare che un sistema ortonormale $\{g_j\}$ in X non è mai una base algebrica di X, cioè non è possibile rappresentare ogni $f \in X$ come combinazione lineare finita delle g_j.

Traccia: costruire una funzione continua $f \in X$ tale che $\langle f; g_j\rangle \neq 0$ per infiniti indici j.

16.43*. - Sia $\{d_n : n \in \mathbb{Z}\}$ una successione di numeri complessi tale che $\sum_n |nd_n| < +\infty$. Dimostrare che la funzione $u(x,t)$ data dalla formula (16.15) è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, +\infty)$, 2π-periodica nella variabile x, continua su $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ e di classe C^∞ su $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

16.44. - Dimostrare la Proposizione 16.15.

16.45. - Enunciare e dimostrare l'equivalente delle Proposizioni 16.13 e 16.15 per la serie di Fourier reale.

16.46*. - Dimostrare che l'insieme delle funzioni $1/\sqrt{2}$, $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \ldots$, costituisce un sistema ortonormale massimale nello spazio con prodotto scalare Y definito subito prima del Teorema 16.16.

16.47. - Dimostrare il Teorema 16.16.

Traccia: utilizzare la convergenza per la serie di Fourier complessa dimostrata nel Teorema 16.10 scrivendo e^{inx}, e^{-inx} in termini di $\cos(nx)$, $\sin(nx)$.

16.48. - Sia $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa nel piano. Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, indichiamo con c_n i coefficienti di Fourier complessi della funzione γ. Dimostrare che se $|\dot\gamma|$ è costante allora la lunghezza della curva γ è data da

$$\mathrm{Lunghezza}(\gamma) = 2\pi\|\dot\gamma\|_2 = 2\pi\bigg(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2\bigg)^{1/2} .$$

Traccia: utilizzare la formula (16.24).

16.49. - Sia $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa nel piano che parametrizza in senso antiorario la frontiera dell'insieme chiuso limitato D, e siano c_n i coefficienti di Fourier di γ. Dimostrare che l'area di D è data da

$$\mathrm{Area}(D) = \pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n|^2 .$$

Traccia: 1) Applicando il teorema di Gauss-Green al campo di vettori $F(x, y) := (0, x)$ e alla curva γ si ottiene

$$\mathrm{Area}(D) = \int_\gamma F \cdot \tau_\gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\,\gamma \cdot \mathrm{Im}\,\dot\gamma\, dt = 2\pi\langle \mathrm{Re}\,\gamma; \mathrm{Im}\,\dot\gamma\rangle .$$

2) Scrivere i coefficienti di Fourier delle funzioni $\mathrm{Re}\,\gamma$ e $\mathrm{Im}\,\dot\gamma$ usando l'Esercizio 16.24 (ed il Lemma 16.9). 3) Calcolare il prodotto scalare $\langle \mathrm{Re}\,\gamma; \mathrm{Im}\,\dot\gamma\rangle$ usando l'Esercizio 16.28.

16.50*. - La disuguaglianza isoperimetrica dice che a parità di perimetro, la figura piana di area maggiore è il cerchio. Se ne dimostri la seguente versione: *Dato un insieme chiuso e limitato D contenuto in $\mathbb{R}^2$ la cui frontiera ∂D è parametrizzata da una curva regolare, allora*

$$\big[\mathrm{Lunghezza}(\partial D)\big]^2 \geq 4\pi \cdot \mathrm{Area}(D) . \tag{16.25}$$

Inoltre, se in (16.25) *vale l'uguaglianza allora D è un cerchio.*

Traccia: prendere una curva regolare γ che parametrizza la frontiera di D in senso antiorario e per cui $|\dot\gamma|$ è costante, e quindi applicare quanto dimostrato negli Esercizi 16.48 e 16.49.