Versione: 9 febbraio 2010

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Topologia e Analisi Complessa
a.a. 2008/09

docenti: F. Broglia, G. Alberti

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta degli scritti d'esame per il corso di Topologia e Analisi Complessa del corso di laurea in Matematica, a.a. 2008/09. La prima parte contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere (compitini), mentre la seconda sezione contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Omotopia e gruppo fondamentale.

Connessione per archi, cammini e operazioni fra cammini continui.
Omotopia tra funzioni continue, omotopia relativa, omotopia tra cammini.
Equivalenza omotopica; retratti e retratti di deformazione; spazi contraibili.
Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico; ruolo del punto base.
Omomorfismi tra gruppi fondamentali indotti da applicazioni continue; invarianza per omotopia; il gruppo fondamentale di spazi omotopicamente equivalenti.
Il gruppo fondamentale di un prodotto.
Rivestimenti; sollevamento di cammini; rivestimento del quoziente di uno spazio rispetto all'azione di un gruppo; calcolo di alcuni gruppi fondamentali; lemma di monodromia.
Il teorema di van Kampen (con dimostrazione parziale).

Funzioni olomorfe di una variabile complessa

L'algebra delle serie formali.
Serie convergenti; calcolo del raggio di convergenza; operazioni sulle serie convergenti; derivata di una serie convergente.
La funzione esponenziale complessa come rivestimento da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^*$.
Funzioni analitiche; analiticità della somma di una serie convergente; prolungamento analitico; funzioni meromorfe.
Forme differenziali e loro integrazione; forme chiuse e forme esatte; primitive lungo un cammino o lungo un'omotopia; la forma dz/z; indice di un cammino chiuso.
Funzioni olomorfe; condizioni di Cauchy-Riemann; le funzioni olomorfe con derivata diversa da 0 come isomorfismi analitici locali.
Formula integrale di Cauchy; sviluppo in serie di una funzione olomorfa; formula e teorema di Cauchy per un compatto.
Il teorema della mappa aperta; principio del massimo; principio di simmetria.
Serie di Laurent; sviluppo di una funzione olomorfa in una corona; singolarità isolate; classificazione tramite limite e tramite serie; il teorema di Weirstrass per le singolarità essenziali;
La sfera di Riemann e il teorema dei residui. Calcolo degli integrali con il metodo dei residui.
Derivata logaritmica; comportamento attorno ad una radice multipla di una funzione olomorfa; teorema di Rouché.

Testi

PRIMO COMPITINO, 24 APRILE 2009

1. Dato un numero intero $n \geq 2$, calcolare il gruppo fondamentale di
$$X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ x \neq y\} \ .$$

2. Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato dall'unione di tutti i possibili segmenti di estremi compresi tra e_0, e_1, e_2, e_3 dove $e_0 = 0$ e e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ (in altre parole X è l'unione degli spigoli del tetraedro di vertici e_0, e_1, e_2, e_3). Usando il teorema di van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale di X.

3. Sia X lo spazio ottenuto a partire dal piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ identificando tra loro i punti di una data retta R. Dimostrare che X è semplicemente connesso.

4. Dire di ciascuna delle seguenti affermazioni se sono vere o false:
a) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$;
b) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ riveste $S^1 \times S^1$;
c) $S^1 \times S^1$ riveste $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$;
d) S^3 riveste $S^1 \times S^2$;
e) $S^1 \times S^2$ riveste S^3.

SECONDO COMPITINO, 8 GIUGNO 2009

1. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-2x+2)}\, dx$.

2. Si consideri la funzione meromorfa
$$f(z) := \frac{z^9 - 3z^3 + 1}{2z^4 + 3z^2 - 2} \ .$$
Determinare il numero di zeri di f contenuti nella corona circolare $A := \{z : 1 < |z| < 2\}$, contati con la loro molteplicità, e dire se si tratta di zeri semplici o meno.

3. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa propria, cioè tale che l'immagine inversa di ogni compatto è compatta.
a) Dimostrare che f ha un polo di ordine finito all'infinito.
b) Dimostrare che f è un polinomio.

4. Sia A un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : A \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa iniettiva. Dimostrare che $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in A$.

Scritto del primo appello, 23 giugno 2009

1. Dato $n \geq 2$, si consideri sullo spazio $X := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la relazione di equivalenza $\sim$ definita da
$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad |y| = 2^k |x| \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}.$$
a) Dimostrare che $X/\!\sim$ è connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.
b) Esibire un insieme di generatori del gruppo fondamentale di $X/\!\sim$.

2. Dimostrare che ogni mappa dal piano proiettivo nella bottiglia di Klein è omotopa ad una costante.

3. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+4}\,dx$.

4. Si consideri la funzione meromorfa
$$f(z) := e^z - e^{-z} + \frac{2}{z-3}\ .$$
Determinare il numero di zeri di f contenuti nella striscia $A := \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, contati con la loro molteplicità. Dire se si tratta di zeri semplici o meno.

Scritto del secondo appello, 20 luglio 2009

1. Rappresentiamo come al solito lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come quoziente della sfera S^n rispetto all'azione della mappa antipodale, ed indichiamo con $p_n : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la relativa proiezione.
   a) Dimostrare che per ogni $n > 1$ e $m \geq 1$ vale la seguente proprietà (P): ogni mappa continua $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ può essere sollevata ad una mappa continua da S^n in S^m, vale a dire che esiste $\tilde{g} : S^n \to S^m$ continua tale che $p_m \circ \tilde{g} = g \circ p_n$.
   b) Dire se la proprietà (P) vale per $n = 1$ e $m > 1$.
   c) Dire se la proprietà (P) vale per $n = 1$ e $m = 1$.

2. Posto $X := (\mathbb{C}^*)^2$ con $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e fissati due numeri interi positivi n_1, n_2, sia G il gruppo degli omeomorfismi di X generato dalla mappa
$$g : (z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$$
   dove $\lambda_j := \exp(2\pi i / n_j)$ per $j = 1, 2$.
   a) Dimostrare che G è un gruppo ciclico e calcolarne l'ordine.
   b) Dimostrare che l'azione di G su X è propriamente discontinua.
   c) Determinare il gruppo fondamentale di X/G, esibendone un insieme di generatori.

3. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$.

4. a) Dimostrare la seguente generalizzazione del lemma di Schwartz: *Sia D un aperto limitato di $\mathbb{C}$ e sia $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ una funzione continua, olomorfa su D, che non si annulla mai su ∂D e in D ha solo zeri semplici. Presa una funzione continua $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, olomorfa su D, se si ha che $|f(z)| \leq |g(z)|$ per ogni $z \in \partial D$ e $f(z) = 0$ per ogni $z \in D$ con $g(z) = 0$, allora $|f(z)| \leq |g(z)|$ per ogni $z \in D$.*
   b) Far vedere con un esempio che l'ipotesi che gli zeri di g siano semplici è necessaria.

Scritto del terzo appello, 7 settembre 2009

1. Sia X lo spazio ottenuto quozientando il disco chiuso $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ che identifica ad un punto ogni sottoinsieme della forma

$$\left\{z, e^{2\pi i/3}z, e^{4\pi i/3}z\right\} \quad \text{con } z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.$$

Sia invece $\tilde{X}$ lo spazio ottenuto quozientando l'unione dei tre dischi chiusi $Y := D \times \{0, 1, 2\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ che identifica ad un punto ogni sottoinsieme della forma

$$\left\{(z, 0), (e^{2\pi i/3}z, 1), (e^{4\pi i/3}z, 2)\right\} \quad \text{con } z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.$$

a) Dimostrare che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.
b) Dimostrare che esiste un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ di ordine 3.
c) Calcolare il gruppo fondamentale di X.

2. Dato $p \in \mathbb{R}^3$, si consideri l'insieme X dato dall'unione del piano P di equazione $y = 0$ e della circonferenza C di centro p e raggio 1 che giace sul piano di equazione $z = 0$.
Dire per quali p l'insieme X è connesso per archi ed in tal caso calcolarne il gruppo fondamentale, esibendo esplicitamente un insieme di generatori.

3. a) Determinare il residuo di ciascuno dei poli della funzione meromorfa

$$f(z) := \frac{1}{(4 + z^4)^2}\ .$$

[*Suggerimento: usare la formula per il residuo di $(z-a)^{-2}g(z)$ in a, dove g è una funzione olomorfa non nulla in un intorno di a.*]
b) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(4 + x^4)^2}\, dx$.

4. Si consideri inoltre la funzione meromorfa

$$f(z) := e^z - \frac{1}{z^3}\ .$$

a) Calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D := \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 3\}$.
b) Dimostrare che tali zeri sono tutti semplici.

Scritto del quarto appello, 11 gennaio 2010

1. Sia M l'unione di 3 semipiani distinti nello spazio delimitati dalla stessa retta R, e sia $X := M \setminus \{p_0\}$ dove p_0 è un punto di R; indichiamo inoltre con E l'intersezione di X con la sfera di centro p_0 e raggio 1.
   a) Dimostrare che E è un retratto di deformazione di X.
   b) Calcolare il gruppo fondamentale di X indicando esplicitamente un insieme di generatori.
2. Calcolare il gruppo fondamentale dei seguenti spazi:
   a) il completato proiettivo di un piano in $\mathbb{R}^3$
   b) il completato proiettivo della superficie S in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x_3 = x_1^2 + x_2^2$.
3. a) Sia g una funzione olomorfa in un intorno del numero complesso a ed n un intero positivo. Calcolare il residuo di $(z-a)^{-n}g(z)$ in a in termini delle derivate di g in a.
   b) Determinare ordine e residuo di ciascuno dei poli della funzione meromorfa
   $$f(z) := \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \ .$$
   c) Utilizzando il teorema dei residui, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.
4. Si consideri la funzione meromorfa
   $$f(z) := z(z^3-4) + e^{z/2} + \frac{1}{4z-6} \ .$$
   Calcolare il numero di zeri di f contenuti nella corona circolare $D := \{z \,:\, 1 \le |z| \le 2\}$, contati con la loro molteplicità.

Scritto del quinto appello, 9 febbraio 2010

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una mappa continua che coincide con l'identità fuori da un compatto. Dimostrare che f è suriettiva.

2. a) Sia X il quoziente della circonferenza $S^1 := \{z : |z| = 1\}$ rispetto alla relazione di equivalenza
$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1^3 = z_2^3 \ .$$
Calcolare il gruppo fondamentale di X, esibendone esplicitamente un insieme di generatori.
b) Sia $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, e sia Y il quoziente di D indotto dalla relazione di equivalenza
$$z_1 \sim z_2 \ \Leftrightarrow \ z_1 = z_2 \text{ oppure } z_1, z_2 \in S^1 \text{ e } z_1^3 = z_2^3.$$
Calcolare il gruppo fondamentale di Y indicando esplicitamente un insieme di generatori. [*Si suggerisce di usare il teorema di van Kampen.*]

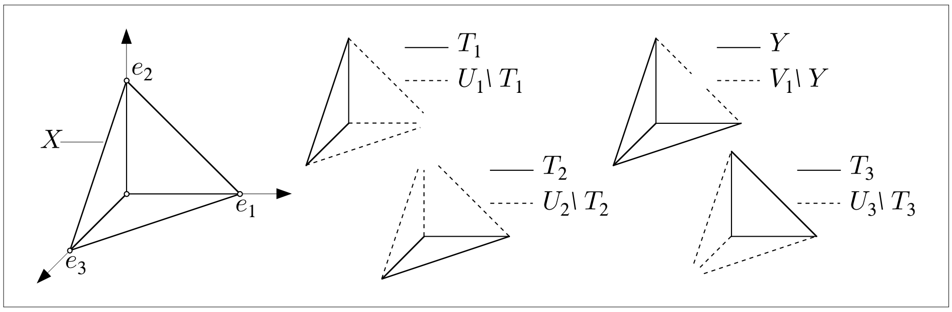
3. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-1)^4 + 4}\, dx$.

4. Sia D il disco aperto $\{|z| < 1\}$, e sia f un omeomorfismo di $\overline{D}$ in sé, olomorfo in D, che porta 0 in 0 e ∂D in ∂D. Si consideri la mappa
$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{se } |z| \leq 1, \\[2mm] \dfrac{1}{\overline{f(1/\bar{z})}} & \text{se } |z| > 1. \end{cases}$$
Dimostrare quanto segue:
a) g è ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$, continua, e olomorfa in $\mathbb{C} \setminus S^1$;
b) g è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$;
c) g ha crescita lineare all'infinito (cioè esistono c, r tali che $|g(z)| \leq c|z|$ per $|z| \geq r$);
d) esiste $a \in S^1$ tale che $f(z) = az$ per ogni $z \in D$.

Soluzioni

1. La mappa $(x, y) \mapsto (x - y, y)$ è un omeomorfismo di X in $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n$, e quest'ultimo è omotopicamente equivalente a S^{n-1} perché $\mathbb{R}^n$ meno un punto è omotopicamente equivalente a S^{n-1} mentre $\mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente a un punto (è contraibile). Pertanto X è connesso per archi per ogni n e semplicemente connesso per $n \geq 3$, mentre per $n = 2$ si ha che $\pi_1(X) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Per ogni $i = 1, 2, 3$, indichiamo con T_i il triangolo dato dall'unione dei tre segmenti di vertici e_j con $j \neq i$ (cfr. figura sotto). La soluzione dell'esercizio è quindi divisa in tre passi:
   (i) $\pi_1(T_i) \simeq \mathbb{Z}$ per ogni $i = 1, 2, 3$ (segue dal fatto che ogni T_i è omeomorfo a S^1);
   (ii) $\pi_1(T_1 \cup T_2) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (gruppo libero con due generatori);
   (iii) $\pi_1(X = T_1 \cup T_2 \cup T_3) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (gruppo libero con tre generatori).



   Dimostriamo (ii). $T_1 \cap T_2$ è il segmento di di estremi e_0 ed e_3, ed è quindi connesso per archi e semplicemente connesso. Pertanto per il teorema di van Kampen il gruppo fondamentale di $Y := T_1 \cup T_2$ è isomorfo al prodotto libero dei gruppi fondamentali di T_1 e T_2, ovvero è isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. In effetti questa dimostrazione non del tutto corretta perché T_1 e T_2 non sono aperti in Y, come invece si richiede per poter applicare il teorema si van Kampen, ma a questo si rimedia scomponendo Y come $U_1 \cup U_2$ dove $U_1 := Y \setminus \{e_1\}$ e $U_2 := Y \setminus \{e_2\}$: si verifica infatti facilmente che $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ si deformano rispettivamente su $T_1, T_2, T_1 \cap T_2$ (cfr. figura sopra) e sono quindi omotopicamente equivalenti a quest'ultimi.
   Dimostriamo infine (iii). Scriviamo $X = Y \cup T_3$. $Y \cap T_3$ è l'unione del segmento di estremi e_0 ed e_1 e del segmento di estremi e_0 ed e_2, ed è quindi connesso per archi e semplicemente connesso. Pertanto per il teorema di van Kampen il gruppo fondamentale di $X := Y \cup T_3$ è isomorfo al prodotto libero dei gruppi fondamentali di Y e T_3, ovvero è isomorfo a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Anche in questo caso per applicare correttamente il teorema di van Kampen dobbiamo scomporre X come $V_1 \cup V_2$ dove $V_1 := X \setminus \{p\}$ e p è il punto medio del segmento di estremi e_1 ed e_2, e $V_2 := X \setminus \{e_3\}$: si verifica infatti che $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ si deformano rispettivamente su $Y, T_3, Y \cap T_3$ e sono quindi omotopicamente equivalenti a quest'ultimi.

3. È noto che il piano proiettivo è omeomorfo a $D^2/{\sim}$ dove D^2 è il disco chiuso di dimensione 2 e $\sim$ la relazione di equivalenza che identifica le coppie di punti antipodali della frontiera ∂D^2; si può inoltre richiedere che i punti ∂D^2 corrispondano a quelli di una retta proiettiva data. (Per esempio, l'omeomorfismo $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to D/{\sim}$ definito da
$$[1, x_1, x_2] \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2)$$
   ed esteso per continuità a tutto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, porta la retta di equazione $x_0 = 0$ su $\partial D/{\sim}$, ed è noto che esiste un omeomorfismo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ in sé – anzi, una proiettività – che porta una qualunque retta assegnata in quella di equazione $x_0 = 0$.)
   Se la retta mappata su $\partial D/{\sim}$ e proprio R, lo spazio X risulta essere omeomorfo a $D/{\approx}$ dove $\approx$ è la relazione di equivalenza che identifica tra loro i punti di ∂D. Ma è noto che

questo spazio è omeomorfo a S^2, quindi X è omeomorfo a S^2 e pertanto è semplicemente connesso.

4. Nessuna delle affermazioni date è vera. Ecco le ragioni:
   a) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $S^1 \times S^1$ hanno gruppi fondamentali diversi: $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$ e $\pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}^2$.
   b) Se $p : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to S^1 \times S^1$ fosse un rivestimento, allora $p_* : \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \to \pi_1(S^1 \times S^1)$ sarebbe un omomorfismo *iniettivo*, ma non esistono omomorfismi iniettivi da $\mathbb{Z}_2$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ perché quest'ultimo gruppo non ha elementi di ordine finito non banali.
   c) Analogamente al punto precedente, non esistono omomorfismi iniettivi da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_2$ (semplicemente perché il primo insieme è infinito ed il secondo no).
   d) Il rivestimento universale di $S^1 \times S^2$ è dato da $\mathbb{R} \times S^2$. Quindi se anche S^3 rivestisse $S^1 \times S^2$ allora, essendo semplicemente connesso, dovrebbe essere omeomorfo a $\mathbb{R} \times S^2$, cosa che non è possibile, se non altro perché S^3 è compatto e $\mathbb{R} \times S^2$ no.
   e) Si ricordi che se uno spazio connesso riveste uno spazio semplicemente connesso, allora il rivestimento è un omeomorfismo. Da questo segue che se $S^1 \times S^2$ rivestisse S^3, allora dovrebbe essere omeomorfo a S^3 ed in particolare dovrebbe essere semplicemente connesso, cosa che non è.

COMMENTI.

- Esercizio 2. Una soluzione alternativa è la seguente: sia T la mappa lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ che porta e_1 in $(1,0)$, e_2 in $(0,1)$ e e_3 in $(-1,-1)$. Allora la restrizione di T a X è iniettiva, e quindi X è omeomorfo a $T(X)$. Inoltre $T(X)$ è il retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2$ meno i punti $(1/4, 1/4)$, $(1/4, -1/4)$ e $(-1/4, 1/4)$. Pertanto $T(X)$, e quindi anche X, sono omotopicamente equivalenti al piano meno tre punti, ed è noto che il gruppo fondamentale di questo spazio è il gruppo libero con tre generatori.

- Esercizio 3. Nella soluzione riportata sopra è stato dato per scontato il seguente lemma di carattere generale: data una relazione di equivalenza $\sim_1$ sullo spazio topologico X e una relazione di equivalenza $\sim_2$ su $X/{\sim_1}$, indichiamo con $p_1 : X \to X/{\sim_1}$ e $p_2 : X/{\sim_1} \to (X/{\sim_1})/{\sim_2}$ le relative proiezioni canoniche, e con $\sim$ la relazione di equivalenza su X indotta dalla mappa composta $p_2 \circ p_1$. Allora $X/{\sim}$ è omeomorfo a $(X/{\sim_1})/{\sim_2}$ (ed un omeomorfismo lo si ottiene passando al quoziente la mappa $p_2 \circ p_1 : X \to (X/{\sim_1})/{\sim_2}$).

- Esercizio 3. Una soluzione alternativa è la seguente: sia p la proiezione canonica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ su X ed r il punto di X corrispondente alla retta R (vale a dire che $p(R) = \{r\}$). Si ha allora che X, in quanto quoziente dello spazio compatto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, è a sua volta compatto, inoltre $X \setminus \{r\}$ è omeomorfo tramite la mappa p a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus R$, che a sua volta è notoriamente omeomorfo al piano $\mathbb{R}^2$. Da questo segue per un lemma di carattere generale che X deve essere omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R}^2$, che a sua volta è notoriamente omeomorfa ad S^2. Il lemma utilizzato qui dice che uno spazio topologico Y compatto *e di Hausdorff* coincide con la compattificazione di Alexandrov del complementare di un qualunque suo punto: nel nostro caso è quindi *essenziale* verificare preliminarmente che X è uno spazio di Hausdorff.

- Esercizio 4b). Una dimostrazione alternativa è la seguente: siccome S^2 riveste $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rivestisse $S^1 \times S^1$ allora la sfera S^2 rivestirebbe $S^1 \times S^1$ e quindi, essendo semplicemente connessa, sarebbe omeomorfa al rivestimento universale di $S^1 \times S^1$, vale a dire $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ma questo è impossibile, se non altro perché S^2 è compatta e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no.

  Questa dimostrazione usa il seguente lemma: se $p_1 : X_0 \to X_1$ e $p_2 : X_1 \to X_2$ sono dei rivestimenti, allora anche $p_2 \circ p_1 : X_0 \to X_2$ è un rivestimento. Se p_2 è un rivestimento di ordine finito questo enunciato è di dimostrazione immediata, ma non è così in generale (e infatti vale solo sotto opportune ipotesi) e quindi non andrebbe dato per scontato.

- Esercizio 4d). Una soluzione alternativa la si ottiene ricordando che se uno spazio ammette un rivestimento universale compatto, allora ha gruppo fondamentale finito (perché il rivestimento avrebbe ordine finito). Se dunque S^3 – che è compatto e semplicemente connesso – rivestisse $S^1 \times S^2$, quest'ultimo avrebbe gruppo fondamentale finito, cosa che non è perché $\pi_1(S^1 \times S^2) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.
- Esercizio 4e). Una soluzione alternativa consiste nell'osservare che se $p : S^1 \times S^2$ fosse un rivestimento, p_* sarebbe un omomorfismo iniettivo da $\pi_1(S^1 \times S^2) \simeq \mathbb{Z}$ in $\pi_1(S^3) \simeq \{e\}$, ma per una semplice questione di cardinalità non esistono mappe iniettive da $\mathbb{Z}$ in $\{e\}$.

1. Consideriamo la funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ data da

$$f(z) := \frac{e^{i\pi z} - 1}{z(z^2 - 2z + 2)} \ . \tag{1}$$

Osserviamo innanzitutto che 0 è una singolarità rimovibile di f, perché sia il numeratore che il denominatore in (1) si annullano in 0, e per il denominatore si tratta di uno zero semplice. Gli altri punti singolari di f sono dati dagli zeri del denominatore, vale a dire $z_{1,2} = 1 \pm i$; siccome questi sono zeri semplici del denominatore in corrispondenza dei quali il numeratore non si annulla, si tratta di poli semplici di f.
Per ogni $r > 0$, indichiamo con D_r il semidisco dato dall'intersezione del disco di centro l'origine e raggio r con il semipiano superiore $A := \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$; la frontiera di D_r è quindi parametrizzata dai cammini $\gamma_{1,r}(t) := t$, con $t \in [-r, r]$, e $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$. Si verifica subito che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \operatorname{Im}\left[\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz\right] \ . \tag{2}$$

Inoltre, poiché $|f(z)| = O(1/|z|^3)$ nel semipiano A,

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 0 \ . \tag{3}$$

Infine, per ogni $r > \sqrt{5}$ il semidisco D_r contiene solamente il polo $z_1 = 1 + i$ e poiché la frontiera di D_r è parametrizzata in senso *antiorario* dal cammino $\gamma_{1,r} * \gamma_{2,r}$, per il teorema dei residui abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1) \\
&= 2\pi i \left.\frac{e^{i\pi z} - 1}{(z^3 - 2z^2 + 2z)'}\right|_{z=z_1} \\
&= 2\pi i \frac{e^{i\pi(1+i)} - 1}{3(1+i)^2 - 4(1+i) + 2} \\
&= 2\pi i \frac{-e^{-\pi} - 1}{2i - 2} = \frac{\pi}{2}(e^{-\pi} + 1)(i - 1)
\end{aligned} \tag{4}$$

Passando al limite per $r \to +\infty$ nella (4) e usando la (2) e la (3), otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 2x + 5)}\, dx = \frac{\pi}{2}(e^{-\pi} + 1) \ .$$

2. Si noti innanzitutto che gli zeri della funzione razionale $f(z)$ coincidono con quelli del numeratore $g(z) := z^9 - 3z^3 + 1$, ed hanno la stessa molteplicità, perché il denominatore $h(z) := 2z^4 + 3z^2 - 2$ non si annulla in nessuno di questi punti. Infatti il denominatore $h(z)$ si annulla per

$$z = \pm 1/\sqrt{2}\,,\ \pm i\sqrt{2}\ ,$$

mentre

$$g(\pm 1/\sqrt{2}) = (\pm 1/\sqrt{2})^9 - 3(\pm 1/\sqrt{2})^3 + 1 = \mp\frac{23}{32}\sqrt{2} + 1 \neq 0$$

e

$$g(\pm i\sqrt{2}) = (\pm i\sqrt{2})^9 - 3(\pm i\sqrt{2})^3 + 1 = \pm 22\sqrt{2}\, i + 1 \neq 0 \ .$$

Scriviamo ora la corona circolare A come $A = D_2 \setminus \overline{D}_1$ dove D_r indica il disco aperto di centro l'origine e raggio r, ed utilizziamo quindi il teorema di Rouché per calcolare separatamente il numero di zeri di g in D_2 e $\overline{D}_1$.

Per D_2, consideriamo la seguente scomposizione di g:

$$g(z) = \underbrace{z^9}_{g_1(z)} + \underbrace{1 - 3z^3}_{g_2(z)} \ .$$

Per ogni $z \in \partial D_2$ si ha $|g_2(z)| \leq 1 + |3z^3| = 25 < 2^9 = |g_1(z)|$ e quindi, per il teorema di Rouché,

$$\#\{\text{zeri di } g \text{ in } D_2\} = \#\{\text{zeri di } g_1 \text{ in } D_2\} = 9$$

Viceversa per D_1 consideriamo la scomposizione

$$g(z) = \underbrace{-3z^3}_{g_1(z)} + \underbrace{z^9 + 1}_{g_2(z)} \ .$$

Per ogni $z \in \partial D_1$ si ha $|g_2(z)| \leq |z^9| + 1 = 2 < 3 = |g_1(z)|$ e quindi

$$\#\{\text{zeri di } g \text{ in } \overline{D}_1\} = \#\{\text{zeri di } g \text{ in } D_1\} = \#\{\text{zeri di } g_1 \text{ in } D_1\} = 3 \ .$$

Pertanto

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } A = D_2 \setminus \overline{D}_1\} = \#\{\text{zeri di } g \text{ in } D_2\} - \#\{\text{zeri di } g \text{ in } \overline{D}_1\} = 6 \ .$$

Per concludere osserviamo che gli zeri di g, e quindi anche quelli di f, sono tutti semplici. Infatti gli zeri non semplici sarebbero quelli in cui si annulla sia g che la derivata g', ovvero che risolvono il sistema

$$\begin{cases} z^9 - 3z^3 + 1 = 0 \\ 9z^8 - 9z^2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} (z^6 - 3)z^3 = -1 \\ (z^6 - 1)z^2 = 0 \end{cases}$$

ma la seconda equazione dà $z = 0$ oppure $z^6 = 1$ e in ambo i casi sostituendo nella prima equazione si arriva ad un assurdo.

3. a) Indichiamo con D_r il disco chiuso di centro l'origine e raggio r. Siccome f è propria, $f^{-1}(D_1)$ è compatto e quindi è contenuto in D_r per qualche $r > 0$. Ne segue che $f(\mathbb{C} \setminus D_r)$ non interseca D_1, ed in particolare non è un insieme denso in $\mathbb{C}$. Ma se per assurdo f avesse una singolarità essenziale all'infinito, $f(\mathbb{C} \setminus D_r)$ dovrebbe essere denso in $\mathbb{C}$. Quindi f deve avere un polo all'infinito (si può escludere che f abbia una singolarità rimovibile all'infinito, visto che in tal caso f risulterebbe essere limitata, quindi costante e pertanto non propria).
b) Siccome f è olomorfa su $\mathbb{C}$, la sua serie di Taylor in zero, $\sum_0^\infty a_n z^n$, converge a $f(z)$ su tutto $\mathbb{C}$. Quindi, posto $z = 1/z'$, si ha che $f(1/z') = \sum_0^\infty a_n (z')^{-n}$ per ogni $z' \neq 0$, e dunque quest'ultima è la serie di Laurent di f all'infinito. Il fatto che f abbia un polo all'infinito implica allora che $a_n \neq 0$ solo per un numero finito di indici, ovvero che f è un polinomio.

4. Supponiamo per assurdo che esista z_0 tale che $f'(z_0) = 0$. Possiamo inoltre ricondurci al caso che $z_0 = 0$ e $f(z_0) = 0$; indichiamo allora con n il più piccolo indice per cui il coefficiente n-esimo della serie di Taylor di f in z_0 risulta essere diverso da zero (dunque $n \geq 2$). Come

si è visto a lezione, esiste allora una funzione olomorfa $g(z)$ definita in un intorno U di 0 tale che

$$f(z) = (g(z))^n \quad \text{per ogni } z \in U$$

(basta scrivere $f(z)$ come $z^n\, h(z)$ con $h(0) \neq 0$, prendere un intorno V di 0 dove esiste una determinazione del logaritmo complesso, e porre quindi $g(z) := z \exp(\log h(z)/n)$ per ogni $z \in U := h^{-1}(V)$).

Poiché g come ogni funzione olomorfa non costante è aperta, esiste $r > 0$ tale che $g(U)$ contiene il disco chiuso di centro 0 e raggio r, e quindi esistono $z_1, \dots, z_n \in U$ tali che

$$g(z_k) = re^{2\pi k i/n} \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n.$$

Dunque i punti z_k sono a due a due distinti, ma

$$f(z_k) = (g(z_k))^n = r \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n,$$

in contraddizione con l'iniettività di f.

COMMENTI.

- Esercizio 1. Molti hanno risolto il problema applicando il teorema dei residui ad una funzione leggermente diversa da quella considerata sopra, vale a dire

  $$f(z) := \frac{e^{i\pi z}}{z(z^2 - 2z + 2)} \ .$$

  In questo caso bisogna tener conto del fatto che 0 non è una singolarità eliminabile ma un polo di f.

- Esercizio 2. Nel verificare che gli zeri del denominatore di f non sono zeri del numeratore ci si potrebbe limitare a quelli contenuti nella corona circolare A, vale a dire $\pm i\sqrt{2}$. Allo stesso modo, per verificare che gli zeri del numeratore contenuti in A sono tutti semplici basta osservare che la derivata del numeratore non si annulla in A.

- Esercizio 4. Prima dimostrazione alternativa. Supponiamo per assurdo che $f'(z_0) = 0$ per qualche $z_0 \in A$. Siccome f' non è identicamente nulla (altrimenti…), deve esistere un intorno U di z_0 tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U \setminus \{z\}$. Essendo f aperta e iniettiva, $V := f(U)$ è un intorno aperto di $z_1 := f(z_0)$ ed f ammette un'inversa continua $g : V \to U$. Essendo $f'(z) \neq 0$ per $z \neq z_0$, g è olomorfa in tutti i punti di V tranne al più z_1, ma poiché g è continua in z_1, quest'ultima è una singolarità eliminabile, ovvero g è olomorfa anche in z_1, e quindi per il teorema di derivazione della funzione composta si ha che $g'(z_1) \cdot f'(z_0) = 1$, in contraddizione con l'ipotesi $f'(z_0) = 0$.

- Esercizio 4. Seconda dimostrazione alternativa. Chiamiamo *molteplicità* di una funzione olomorfa $f : A \to \mathbb{C}$ in un punto $z_0 \in A$ il più piccolo indice $n = n(z_0)$ strettamente positivo per cui l'n-esimo coefficiente della serie di Taylor di f in z_0 risulta diverso da 0, vale a dire la molteplicità di z_0 come zero della funzione $f(z) - y_0$, dove si posto $y_0 := f(z_0)$. Quindi l'insieme dei punti $z_0 \in A$ tale che $f'(z_0) = 0$ coincide con quello dei punti tali che $n(z_0) \geq 2$, e se f non è costante in nessuna componente connessa di A, questo insieme deve essere discreto.

  Prendiamo ora $z_0 \in A$ e un disco chiuso D centrato in z_0 e contenuto in A: se f è *iniettiva*, allora $f(z) - y_0 \neq 0$ per ogni $z \in \partial D$ e quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|f(z) - y_0| \geq \varepsilon$ per ogni $z \in \partial D$. Allora per ogni numero complesso y con $|y - y_0| < \varepsilon$ possiamo applicare il teorema di Rouché alla funzione $f(z) - y$, ottenendo che in D ha lo stesso numero di zeri di della funzione $f(z) - y_0$, contati con la loro molteplicità, e dall'iniettività di f segue dunque che $n(z) = n(z_0)$ per ogni z nell'aperto $U := f^{-1}(\{y : |y - y_0| < \varepsilon\})$. Per quanto visto sopra segue che $n(z_0)$ non può che essere 1, ovvero che $f'(z_0) \neq 0$.

Scritto del primo appello, 23 giugno 2009

1. a) Dimostriamo che lo spazio $X/\sim$ è omeomorfo a S^1; da questo segue in particolare che $X/\sim$ è connesso per archi e $\pi_1(X/\sim) \simeq \mathbb{Z}$.

   Sia dunque Y il segmento contenuto in X di estremi e_1 e $2e_1$ dove $e_1 := (1, 0, \dots, 0)$. Si verifica facilmente che Y interseca ogni classe di equivalenza di X, e quindi segue da un fatto noto (visto ad esercitazione) che $X/\sim$ è omeomorfo a $Y/\sim$. Ma si vede altrettanto facilmente che la restrizione della relazione di equivalenza $\sim$ a Y consiste semplicemente nell'identificazione degli estremi, e quindi $Y/\sim$ è omeomorfo a S^1.

   b) Vedendo S^1 come un segmento Y di cui sono stati identificati gli estremi, un generatore del gruppo fondamentale è dato da un qualunque cammino che congiunge detti estremi. In altre parole un generatore del gruppo fondamentale di $X/\sim$ con punto base $p(e_1)$ è il cammino chiuso $p \circ \gamma$ dove p è la proiezione canonica di X su $X/\sim$ e $\gamma(t) := (1 + t)e_1$ per $t \in [0, 1]$.

2. Sia $\varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to K$ la mappa in questione. Ricordiamo che la bottiglia di Klein K può essere ottenuta come quoziente del piano $\mathbb{R}^2$ rispetto all'azione del gruppo G generato dalle trasformazioni $g_1 : (x, y) \mapsto (x, y + 1)$ e $g_2 : (x, y) \mapsto (x + 1, 1 - y)$. In particolare lo spazio K è rivestito da $\mathbb{R}^2$ ed ha gruppo fondamentale isomorfo a G.

   Supponiamo ora che la mappa φ ammetta un sollevamento $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$. Allora, essendo $\mathbb{R}^2$ contraibile, il sollevamento $\tilde{\varphi}$ è omotopo ad una costante, e componendo quest'omotopia con la proiezione canonica di $\mathbb{R}^2$ su K si ottiene che anche φ è omotopa ad una costante.

   Non resta dunque che dimostrare che la mappa φ ammette sempre un sollevamento $\tilde{\varphi}$. Per un noto teorema basta verificare che l'omomorfismo $\varphi_\# : \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \to \pi_1(K)$ è banale, e questo segue dal fatto che $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}_2$ mentre $\pi_1(K) \simeq G$ non contiene elementi di ordine 2. Per verificare quest'ultima asserzione ricordiamo che G è dato dall'insieme delle trasformazioni del piano della forma $g_1^m g_2^n$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, e che il prodotto di due elementi di G è dato dalla regola

   $$(g_1^m g_2^n)(g_1^{m'} g_2^{n'}) = g_1^{m+\sigma(n)m'} g_2^{n+n'}$$

   dove $\sigma(n) := (-1)^n$. Se dunque $g_1^m g_2^n$ ha ordine 2, allora

   $$e = (g_1^m g_2^n)^2 = g_1^{m(1+\sigma(n))} g_2^{2n} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2n = 0 \\ m(1 + \sigma(n)) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} n = 0 \\ m = 0 \end{cases}$$

   e quindi $g_1^m g_2^n = e$.

3. Per ogni $z \neq 0$ consideriamo la funzione

   $$f(z) := \frac{\sqrt[4]{z}}{z^2 + 2z + 4} \ ,$$

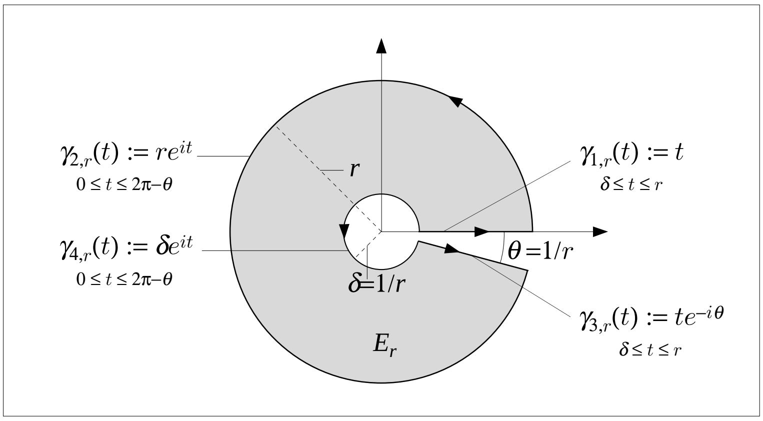
   dove si è posto

   $$\sqrt[4]{z} := \exp\left(\tfrac{1}{4} \log z\right) = \rho^{1/4} e^{i\theta/4} \quad \text{per } z = \rho e^{i\theta} \text{ con } \rho > 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

   Procedendo come al solito consideriamo l'integrale di $f(z)$ sul cammino

   $$\gamma_r := \gamma_{1,r} * \gamma_{2,r} * i(\gamma_{3,r}) * i(\gamma_{4,r})$$

   dove i cammini $\gamma_{1,r}, \dots, \gamma_{4,r}$ sono dati nella figura sottostante.



Il cammino γ_r parametrizza in senso antiorario la frontiera di E_r e per $r > \sqrt{2}$ la funzione $f(z)$ è meromorfa all'interno di E_r con poli *semplici* in $-1 \pm i\sqrt{3}$, ed è continua sul bordo di E_r. Applicando il teorema dei residui abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,r}} \cdots - \int_{\gamma_{3,r}} \cdots - \int_{\gamma_{4,r}} \cdots &= \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \\
&= 2\pi i \Big[\mathrm{Res}\big(f, -1+i\sqrt{3}\big) + \mathrm{Res}\big(f, -1-i\sqrt{3}\big)\Big] \\
&= 2\pi i \left[\frac{\sqrt[4]{z}}{2z+2}\Big|_{z=-1+i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[4]{z}}{2z+2}\Big|_{z=-1-i\sqrt{3}} \right] \\
&= 2\pi i \left[\frac{\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/6}}{2\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/3}}{-2\sqrt{3}i} \right] \\
&= \frac{\pi\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}+i}{2} - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{\pi}{\sqrt[4]{72}}(\sqrt{3}-1)(1-i)\ . \qquad (1)
\end{aligned}$$

D'altra parte si verifica in modo standard che

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+4}\,dx\ , \qquad (2)$$

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{i\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+4}\,dx\ , \qquad (3)$$

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{4,r}} f(z)\,dz = 0\ . \qquad (4)$$

Mettendo insieme le formule (1)-(4) otteniamo infine

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt[4]{72}}(\sqrt{3}-1)\ .$$

4. Per ogni $r > 0$ consideriamo il rettangolo in $\mathbb{C}$

$$A_r := [-r, r] \times [-\pi/2, \pi/2]\ .$$

Vogliamo usare il teorema di Rouché per determinare il numero di zeri di f contenuti in A_r (almeno per r sufficientemente grande); a questo scopo scomponiamo f come

$$f(z) = \underbrace{e^z - e^{-z}}_{f_1(z)} + \underbrace{2(z-3)^{-1}}_{f_2(z)}\ .$$

Dobbiamo ora dimostrare che $|f_1| > |f_2|$ su ciascuno dei 4 lati della frontiera di A_r. Sui due lati di equazione $z = x \pm i\pi/2$ si ha che

$$|f_1(z)| = |\pm i(e^x + e^{-x})| = e^x + e^{-x} \geq 2$$

(l'ultima disuguaglianza la si ottiene verificando che il minimo di $e^x + e^{-x}$ viene raggiunto per $x = 0$) e d'altra parte

$$|f_2(z)| = \frac{2}{|(x-3) \pm i\pi/2|} \leq \frac{2}{\pi/2} = \frac{4}{\pi} < 2 \ .$$

Sui lati di equazione $z = r + iy$ si ha invece che, per $r \geq 1$,

$$|f_1(z)| \geq |e^z| - |e^{-z}| = e^r - e^{-r} \geq e + e^{-1} > 2 \tag{1}$$

e in effetti la stessa stima vale anche per $r \leq -1$. D'altra parte per $|r - 3| \geq 1$ si ha

$$|f_2(z)| = \frac{2}{|(r-3) + iy|} \leq \frac{2}{|r-3|} \leq 2 \ . \tag{2}$$

Da quanto visto segue che $|f_1| > |f_2|$ su ∂A_r per ogni $r \geq 4$. Pertanto, siccome f_1 non ha poli in $\mathbb{C}$ e gli zeri sono $z = ik\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, applicando una nota variante del teorema di Rouché otteniamo

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } A_r\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } A_r\} + \#\{\text{poli di } f \text{ in } A_r\} = 1 + 1 = 2 \ .$$

Quindi, essendo A l'unione della famiglia crescente $\{A_r\}$, f ha solo due zeri in A contati con la loro molteplicità (e per quanto visto questi zeri sono contenuti in A_4).
Questi due zeri sono semplici. Per dimostrarlo basta per esempio far vedere che A_2 ne contiene uno solo, e questo lo si ottiene procedendo esattamente come sopra (infatti la stessa dimostrazione dà che $|f_1| > |f_2|$ anche su ∂A_2).

Scritto del secondo appello, 20 luglio 2009

1. La proprietà (P) equivale a dire che la mappa $g' := g \circ p_n : S^n \to \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ ammette sempre un sollevamento $\tilde{g} : S^n \to S^m$, ovvero, per un noto teorema, che vale l'inclusione

$$g'_*(\pi_1(S^n)) \subset p_{m*}(\pi_1(S^m)) \tag{1}$$

a livello di sottogruppi di $\pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}))$.
a) Per $n > 1$, l'inclusione (1) è soddisfatta perché il gruppo fondamentale $\pi_1(S^n)$ è banale e quindi lo stesso vale per $g'_*(\pi_1(S^n))$.
b) La risposta è affermativa. In questo caso $\pi_1(S^m)$ e $p_{m*}(\pi_1(S^m))$ sono banali e si deve quindi dimostrare che $g'_*(\pi_1(S^1))$ è pure banale. Ma attenzione: essendo $\pi_1(S^1)$ isomorfo a $\mathbb{Z}$, ma non c'è alcuna ragione immediata per cui questo debba essere vero per *ogni* mappa $g' : S^n \to \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$; bisogna usare specificamente che g' è della forma $g \circ p_1$.
Prendiamo e_0 generatore di $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ ed e_1 generatore di $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$. Com'è noto, $p_{1*}(e_0) = 2e_1$ (in notazione additiva) e siccome $g' = g \circ p_1$, si ha che

$$g'_*(e_0) = g_*(p_{1*}(e_0)) = g_*(2e_1) = 2g_*(e_1) = 0 \tag{2}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}))$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Dalla (2) segue che $g'_*(\pi_1(S^1))$ è banale.
c) La risposta è affermativa, e lo si dimostra in modo analogo al punto b). Prendiamo e_0 ed e_1 come prima ed indichiamo con n l'intero tale che $g_*(e_1) = ne_1$: allora

$$g'_*(e_0) = g_*(p_{1*}(e_0)) = g_*(2e_1) = 2g_*(e_1) = 2n\, e_1 = n\, p_{1*}(e_0)$$

e da questa uguaglianza segue l'inclusione (1).

2. a) Per ogni intero n si ha che

$$g^n : (z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1^n z_1, \lambda_2^n z_2) \ . \tag{3}$$

In particolare g^n è l'identità se e solo se $1 = \lambda_i^n = \exp(2\pi n i/n_j)$ per $j = 1, 2$, vale a dire se e solo se n è un multiplo sia di n_1 che di n_2. Dunque G è un gruppo ciclico di ordine N uguale al minimo comune multiplo di n_1 ed n_2.
b) Essendo G un gruppo finito, basta dimostrare che l'azione di G è libera. Supponiamo di avere n e (z_1, z_2) tale che $g^n(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$: dalla (3) segue che $\lambda_j^n = 1$ per $j = 1, 2$ – si ricordi che sia z_1 che z_2 sono diversi da 0 – e dunque g^n è l'identità.
c) Siccome X non è semplicemente connesso, il gruppo fondamentale di X/G non è dato semplicemente da G. Per aggirare questa difficoltà, rappresentiamo X stesso come quoziente di uno spazio semplicemente connesso $\tilde{X}$ rispetto ad un gruppo di trasformazioni, in modo da ottenere poi una rappresentazione di X/G come quoziente di $\tilde{X}$ rispetto ad un gruppo di trasformazioni (che agisce in modo propriamente discontinuo).
Sappiamo che $\mathbb{C}^*$ è omeomorfo al quoziente $\mathbb{C}/H$ dove H è il sottogruppo delle traslazioni di $\mathbb{C}$ generato da $z \mapsto z + 1$, e un omeomorfismo di $\mathbb{C}/H$ in $\mathbb{C}^*$ è lo si ottiene passando al quoziente la mappa esponenziale: $[w] \mapsto \exp(2\pi i w)$. Dunque $X := (\mathbb{C}^*)^2$ è omeomorfo al quoziente $\mathbb{C}^2/K$ dove K è il sottogruppo delle traslazioni di $\mathbb{C}^2$ generato da

$$g_1 : (w_1, w_2) \mapsto (w_1 + 1, w_2) \quad \text{e} \quad g_2 : (w_1, w_2) \mapsto (w_1, w_2 + 1) \ ,$$

e un omeomorfismo da $\mathbb{C}^2/K$ in X è dato dalla mappa

$$[w_1, w_2] \mapsto \big(\exp(2\pi i w_1), \exp(2\pi i w_2)\big) \ .$$

Pertanto X/G è omeomorfo a $\mathbb{C}^2/\tilde{G}$ dove $\tilde{G}$ è il sottogruppo delle traslazioni di $\mathbb{C}^2$ generato da g_1, g_2 e g_3 dove g_3 è il sollevamento a $\mathbb{C}^2$ della trasformazione g che genera G, vale a dire

$$g_3 : (w_1, w_2) \mapsto (w_1 + 1/n_1, w_2 + 1/n_2) \ .$$

Siccome l'azione di $\tilde{G}$ su $\mathbb{C}^2$ è propriamente discontinua (si omette la verifica) e $\mathbb{C}^2$ è semplicemente connesso, il gruppo fondamentale di $\mathbb{C}^2/\tilde{G}$, e quindi anche quello di X/G, sono isomorfi a $\tilde{G}$. Inoltre un insieme di generatori lo si ottiene passando al quoziente i cammini γ_j che congiungono $(0,0)$ a $g_j(0,0)$ in $\mathbb{C}^2$ per $j = 1, 2, 3$.

Si può infine dimostrare – ma questo è decisamente più complicato! – che $\tilde{G}$ è un gruppo abeliano libero con 2 generatori indipendenti, ed è quindi isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Che si tratti di un gruppo abeliano libero segue immediatamente dal fatto che è un sottogruppo delle traslazioni di $\mathbb{C}^2$; si dimostra poi che è generato da g_3 e g_4 dove

$$g_4 := g_1^{m_1} g_2^{m_2} \quad \text{ovvero} \quad g_4 : (w_1, w_2) \mapsto (w_1 + m_1, w_2 + m_2) \ ,$$

ed i numeri interi m_1 e m_2 sono scelti in modo tale che $m_1 n_1 - m_2 n_2$ è il massimo comun divisore di n_1 ed n_2 (è un fatto noto che tali m_1, m_2 esistono). Dobbiamo dunque far vedere che g_1 e g_2 appartengono al gruppo generato da g_3 e g_4: nel caso di g_1 questo significa trovare a_1, a_2 interi tali che $g_1 = g_3^{a_1} g_4^{a_2}$, e tenuto conto della formula di g_1 e del fatto che

$$g_3^{a_1} g_4^{a_2} : (w_1, w_2) \mapsto (w_1 + a_1/n_1 + a_2 m_1, w_2 + a_1/n_2 + a_2 m_2) \ ,$$

questo equivale a dire che a_1, a_2 risolvono il sistema

$$\begin{cases} a_1/n_1 + a_2 m_1 = 1 \\ a_1/n_2 + a_2 m_2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} a_1 = -a_2 m_2 n_2 \\ a_2 = n_1/(n_1 m_1 - m_2 n_2) \end{cases} .$$

Si noti che a_1 ed a_2 sono interi proprio perché abbiamo scelto m_1, m_2 in modo tale che $n_1 m_1 - m_2 n_2$ divide n_1. La dimostrazione per g_2 è ovviamente la stessa.

3. Si procede nel solito modo: consideriamo la funzione meromorfa

$$f(z) := \frac{e^{2iz}}{z^4 + 5z^2 + 4} \ ,$$

e osserviamo che i punti singolari sono gli zeri del denominatore, vale a dire $\pm i$ e $\pm 2i$; si tratta in particolare di poli semplici.

Per ogni $r > 0$ sia D_r il semi-disco dato dall'intersezione del disco aperto di centro 0 e raggio r con il semipiano $A := \{\operatorname{Im} z > 0\}$; la frontiera di D_r è quindi parametrizzata in senso antiorario dai cammini $\gamma_{1,r}(t) := t$, con $t \in [-r, r]$, e $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$. Come al solito

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} \, dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z) \, dz \ , \tag{4}$$

e poiché $|f(z)| = O(1/|z|^4)$ nel semipiano A,

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z) \, dz = 0 \ . \tag{5}$$

Infine, per ogni $r > 2$ il semi-disco D_r contiene solo i poli i e $2i$ e quindi per il teorema dei residui abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1,r}} f(z) \, dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z) \, dz &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), i) + \operatorname{Res}(f(z), 2i) \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{2iz}}{(z^4 + 5z^2 + 4)'} \bigg|_{z=i} + \frac{e^{2iz}}{(z^4 + 5z^2 + 4)'} \bigg|_{z=2i} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{-2}}{6i} + \frac{e^{-4}}{-12i} \right] = \frac{\pi(2e^2 - 1)}{6e^4} \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Passando al limite per $r \to +\infty$ nella (6) e usando la (4) e la (5), otteniamo infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+2x+5)}\, dx = \frac{\pi(2e^2-1)}{6e^4} \; .$$

4. a) Si consideri la funzione $h(z) := f(z)/g(z)$. L'ipotesi che gli zeri di g sono tutti semplici e sono anche zeri di f implica che le singolarità di h all'interno di D sono tutte rimovibili. In altre parole, h si estende ad una funzione continua su $\overline{D}$ e olomorfa su D. Quindi, per il principio del massimo modulo, il valore massimo di $|h|$ viene raggiunto in un qualche punto della frontiera di D ed è pertanto minore o uguale a 1 perché $|f| \le |g|$ su ∂D. Quindi per ogni z in D si ha
$$\frac{|f(z)|}{|g(z)|} = |h(z)| \le 1 \quad \text{ovvero} \quad |f(z)| \le |g(z)| \; .$$
b) Detto D il disco di centro 0 e raggio 1, si prenda $g(z) := z^2$ e $f(z) := z$.

Commenti.

- Esercizio 1. Diverse persone hanno cercato di costruire $\tilde{g}$ come $\hat{g} \circ p_n$ con $\hat{g}$ sollevamento a S^m della mappa $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$. Il problema è che $\hat{g}$, a differenza di $\tilde{g}$, non sempre esiste: per esempio, se $n = m$ e g è l'identità su $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, allora $\hat{g}$ non esiste: infatti $g_*(\pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R})))$ è ovviamente uguale a $\pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}))$, mentre $p_{m*}(\pi_1(S^m))$ è sempre un sottogruppo proprio di $\pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}))$.
- Per un errore nella preparazione dello scritto, la soluzione completa dell'esercizio 2, vale a dire la determinazione esatta del gruppo fondamentale di X/G, è risultata essere più complicata del previsto.

1. a) Indichiamo con q la proiezione canonica di D su X e con $\tilde{q}$ quella di Y su $\tilde{X}$. Posto

$$C_k := \tilde{q}(D \times \{k\}) \quad \text{per } k = 0, 1, 2,$$

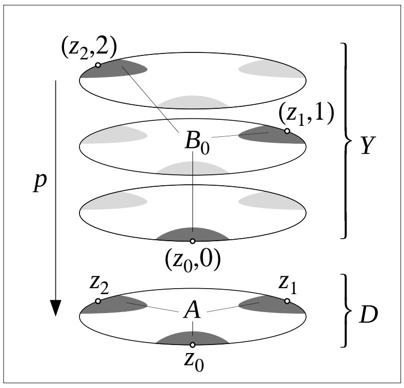
si ha che ciascun C_k è semplicemente connesso in quanto omeomorfo a D, mentre $C_k \cap C_h$ è connesso per archi per ogni $k \neq h$, in quando immagine secondo $\tilde{q}$ di $\partial D = \{z : |z| = 1\}$, che è connesso per archi. Quindi $X' := C_0 \cup C_1$ è un'unione di semplicemente connessi con intersezione connessa per archi, e pertanto risulta essere semplicemente connesso per la versione semplice del teorema di van Kampen. Allo stesso modo anche $X = X' \cup C_2$ risulta essere semplicemente connesso.
(Ad essere precisi, per applicare il teorema di van Kampen bisogna considerare una decomposizione di X' (e poi di X) in aperti e invece insiemi C_k sono chiusi; per rimediare basta considerare al loro posto gli aperti $U_k := \tilde{q}(Y \setminus \{(0, h) : h \neq k\})$ ed osservare che si deformano su C_k e sono quindi semplicemente connessi, mentre le rispettive intersezioni sono connesse per archi.)
b) Un rivestimento p lo si ottiene passando al quoziente la proiezione di Y su D, vale a dire la mappa

$$\tilde{p} : Y \to D \ , \quad \tilde{p} : (z, k) \mapsto z \ ,$$

cosa che è possibile perché $(z, k) \sim (z', k')$ implica $z \sim z'$. In altre parole,

$$p : \tilde{X} \to X \ , \quad p : [(z, k)] \mapsto [z] \ .$$

Per ogni punto $[z_0] \in X$ dobbiamo ora esibire un intorno aperto trivializzante U.

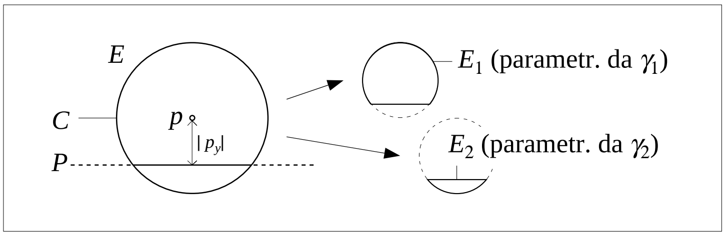


Se $z_0 \in D \setminus \partial D)$, basta prendere $U = q(A)$ dove A è un intorno aperto di z_0 che non interseca S^1: è infatti immediato verificare che $p^{-1}(U)$ è uguale all'unione disgiunta degli aperti $U_k := \tilde{q}(A \times \{k\})$ con $k = 0, 1, 2$, e che la restrizione di p a ciascuno di questi aperti è un omeomorfismo in U.
Se invece $z_0 \in \partial D$, prendiamo $U := q(A)$ dove $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2)$ con A_k intorni aperti di $z_k := e^{2k\pi i/3} z$ scelti in modo tale che siano a due a due disgiunti e che la loro unione A sia un aperto saturo rispetto alla relazione di equivalenza in D, cosicché U è aperto in X. A questo punto si verifica facilmente (vedi figura) che $p^{-1}(U)$ coincide con l'unione disgiunta dei seguenti tre aperti di $\tilde{X}$:

$$\begin{aligned}
U_0 &:= \tilde{q}(B_0) \quad \text{con } B_0 := (A_0 \times \{0\}) \cup (A_1 \times \{1\}) \cup (A_2 \times \{2\}), \\
U_1 &:= \tilde{q}(B_1) \quad \text{con } B_1 := (A_1 \times \{0\}) \cup (A_2 \times \{1\}) \cup (A_0 \times \{2\}), \\
U_2 &:= \tilde{q}(B_2) \quad \text{con } B_2 := (A_2 \times \{0\}) \cup (A_0 \times \{1\}) \cup (A_1 \times \{2\}),
\end{aligned}$$

e che la restrizione di p a ciascuno di questi aperti è un omeomorfismo in U.
c) Segue da quanto visto nei punti precedenti che $\tilde{X}$ è il rivestimento universale di X. Siccome si tratta di un rivestimento di ordine 3, il gruppo fondamentale di X deve avere ordine 3, ed è quindi isomorfo all'unico gruppo di ordine 3, vale a dire $\mathbb{Z}_3$.

2. L'insieme X è connesso se e solo se la circonferenza C ed il piano P si intersecano, vale a dire se e solo se $|p_y| \leq 1$, dove p_y è la coordinate di p nella direzione y (si veda la figura).
Per $p_y = \pm 1$ lo spazio X si deforma su C, e dunque $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}$ (un generatore è quindi dato da una qualunque parametrizzazione della circonferenza).



Per $|p_y| < 1$ lo spazio X si deforma sull'unione E della circonferenza e della corda avente come estremi l'intersezione della circonferenza con il piano. Applicando il teorema di van Kampen alla scomposizione $E = E_1 \cup E_2$ dove E_1 ed E_2 sono dati in figura, si ottiene subito che il gruppo fondamentale di E, e quindi anche quello di X, è un gruppo liberi con due generatori. Infatti sia E_1 che E_2 sono omeomorfi a circonferenze mentre $E_1 \cap E_2$ è un segmento ed in particolare è semplicemente connesso (al solito, una dimostrazione corretta richiederebbe di sostituire i chiusi E_1 ed E_2 con degli aperti). Infine un insieme di generatori del gruppo è dato dalle parametrizzazioni γ_1 e γ_2 di E_1 ed E_2.

3. a) Sviluppando g in serie di potenze in a si ottiene subito che

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{(z-a)^{-2}}, a\right) = g'(a) \ .$$

I poli di f sono le radici quarte di -4, vale a dire $\pm 1 + \pm i$, ed hanno tutti ordine 2. Detto a uno di questi poli, abbiamo che

$$f(z) = \frac{1}{(z^4 - a^4)^2} = (z-a)^{-2} \underbrace{\frac{1}{(z^3 + az^2 + a^2 z + a^3)^2}}_{g(z)} \ ,$$

e applicando la formula precedente si ottiene

$$\mathrm{Res}(f(z), a) = g'(a) = -2 \frac{3z^2 + 2az + a^2}{(z^3 + az^2 + a^2 z + a^3)^3}\bigg|_{z=a} = -\frac{3a}{2^4 (a^4)^2} = -\frac{3}{2^8} a \ .$$

b) In questo caso conviene integrare la funzione $f(z)$ sulla frontiera del quarto di disco chiuso C_r dato dall'intersezione del primo quadrante con il disco di centro l'origine e raggio r: si osservi infatti che il contributo di entrambi i raggi si riconduce all'integrale da calcolare, mentre il contributo del quarto di circonferenza tende a 0 quando $r \to +\infty$. In altre parole, detto γ_r un cammino che parametrizza ∂C_r in senso antiorario, si ha che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = (1 - i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(4 + x^4)^2}\, dx$$

Pertanto, usando quanto fatto al punto a),

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4+x^4)^2}\, dx &= \mathrm{Re}\left[\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[2\pi i\, \mathrm{Res}(f(z); 1+i)\right] = \mathrm{Re}\left[-2\pi i \frac{3}{2^8}(1+i)\right] = \frac{3\pi}{2^7} \ .\end{aligned}$$

4. a) Per calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D_2 := \{|z| \leq 3\}$ applichiamo la solita variante del teorema di Rouché alla scomposizione

$$f(z) = \underbrace{e^z}_{f_1} + \underbrace{(-1/z^3)}_{f_2} \ .$$

In effetti per $z \in \partial D_3$ si ha $|f_1(z)| = e^x \geq e^{-3} > 3^{-3} = |f_2(z)|$ e quindi

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_3\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } D_3\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D_3\} = 0 \ ,$$

da cui segue che

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_3\} = \#\{\text{poli di } f \text{ in } D_3\} = 3 \ . \tag{1}$$

Invece, per calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D_{1/2} := \{|z| \leq 1/2\}$, ovvero nella sua parte interna (!), utilizziamo la scomposizione

$$f(z) = \underbrace{(-1/z^3)}_{f_1} + \underbrace{e^z}_{f_2} \ .$$

In effetti per $z \in \partial D_{1/2}$ si ha $|f_2(z)| = e^x \leq e^{1/2} < 8 = |f_1(z)|$ e quindi

$$\begin{aligned} &\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_{1/2}\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } D_{1/2}\} \\ &\qquad = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D_{1/2}\} - \#\{\text{poli di } f_1 \text{ in } D_{1/2}\} = -3 \ , \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_{1/2}\} = \#\{\text{poli di } f \text{ in } D_{1/2}\} - 3 = 0 \ . \tag{2}$$

Dalla (1) e dalla (2) deduciamo infine che f ha 3 zeri contenuti in D (contati con la loro molteplicità).
b) Per far vedere che questi zeri sono semplici, basta osservare che se per assurdo uno di questi, indicato con z, non fosse semplice allora avremmo che in z si annullano sia f che f'; in particolare $f(z) = f'(z)$, da cui, fatte le dovute semplificazioni, segue che $z = -3$, punto che non è interno a D, e in cui comunque f non si annulla.

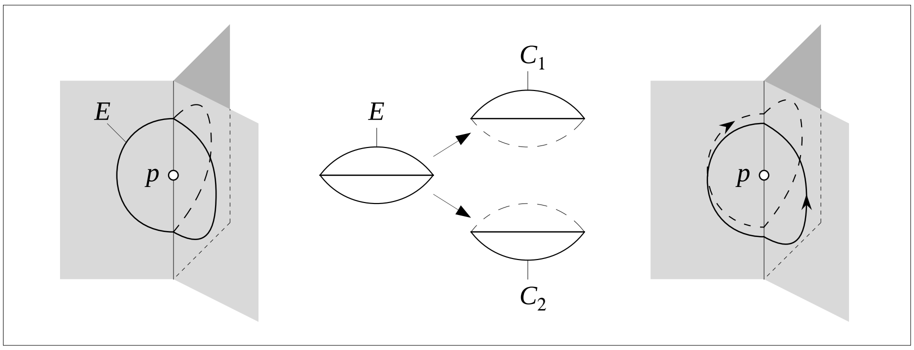
Commenti.

- Esercizio 1b). Una dimostrazione alternativa del fatto che $\tilde{X}$ è un ricoprimento di X la si ottiene facendo vedere che X è omeomorfo al quoziente di X rispetto al gruppo di trasformazioni G generato dalla mappa $\varphi : [z,k] \mapsto [z,k+1]$, dove la somma và intesa modulo 3. Siccome tale gruppo agisce liberamente ed è finito – anzi è chiaramente isomorfo a $\mathbb{Z}_3$ – si ottiene anche che il gruppo fondamentale del quoziente è $\mathbb{Z}_3$.
- Esercizio 2. Per $|p_y| < 1$ si può anche dimostrare (in alternativa) che E, e quindi anche X, sono omotopicamente equivalenti (anche se non omeomorfi) ad un bouquet di due circonferenze.
- Esercizio 3c). Si può calcolare l'integrale voluto anche integrando $f(z)\,dz$ sulla frontiera del semidisco superiore (o inferiore) invece che su quelle del quarto di disco C_r.
- Esercizio 4b). Un modo alternativo per far vedere che gli zeri di f sono semplici consiste nel dimostrare che uno (ed uno solo) sta sull'asse reale e gli altri due sono distinti in quanto coniugati (si noti che $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ e quindi se z è uno zero di f anche $\bar{z}$ lo deve essere).

1. a) Supponendo $p_0 = 0$, basta considerare la deformazione radiale

$$R(t,x) := (1-t)x + t\frac{x}{|x|} \quad \text{con } t \in [0,1],\ x \in X.$$

b) Lo spazio X è chiaramente omeomorfo all'unione di tre segmenti di cui sono stati identificati gli estremi a tre a tre, vale a dire il quoziente di $Y := [0,1] \times \{1,2,3\}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ che identifica ad un punto l'insieme $\{0\} \times \{1,2,3\}$ e ad un altro punto l'insieme $\{1\} \times \{1,2,3\}$ (si veda la figura sottostante, al centro).



Detta p la proiezione canonica di Y sul quoziente, si applica il teorema di van Kampen alla scomposizione $X = C_1 \cup C_2$ con $C_1 := p([0,1] \times \{2,3\})$ e $C_2 := p([0,1] \times \{1,3\})$ ottenendo quindi che il gruppo fondamentale di $Y/\!\sim$, ovvero quello di X, è isomorfo al gruppo libero con due generatori $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. (Ad essere precisi, per applicare il teorema di van Kampen bisogna considerare una decomposizione in aperti, e invece gli insiemi C_j sono chiusi; per rimediare basta considerare al loro posto gli aperti $U_j := p(Y \setminus \{(1/2, j)\})$ con $j = 1, 2$).
Due cammini che generano il gruppo fondamentale di X sono indicati nella figura sopra, a destra.

2. a) Il completato proiettivo di un piano in $\mathbb{R}^3$ è un piano proiettivo, e quindi ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.
b) Aggiungendo la coordinata omogenea x_0, il completato proiettivo di S è ottenuto è dato dalla superficie S' di equazione $x_3x_0 = x_1^2 + x_2^2$. Si verifica quindi che $S' \setminus S$ consiste del solo punto $[0,0,0,1]$, e siccome S' è uno spazio compatto di Hausdorff, per un noto risultato è omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov di S. D'altra parte S è chiaramente omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ (tramite la proiezione sul piano x_1x_2) e quindi S' è omeomorfo alla compattificazione di Alexandrov del piano, che è notoriamente omeomorfa alla sfera S^2. In particolare il gruppo fondamentale di S' è banale.

3. a) Sviluppando $(z-a)^{-n}g(z)$ in serie di potenze in a si ottiene subito che

$$\operatorname{Res}\big((z-a)^{-n}g(z), a\big) = \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}g(a)\ .$$

b) I poli di f sono $\pm i$ ed hanno entrambi ordine 2. Applicando la formula ottenuta al punto precedente con $n = 2$ ed $a = \pm i$ si ottiene

$$\operatorname{Res}(f(z), +i) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}(z+i)^{-2}}{(z-i)^2}; +i\right) = \left[e^{iz}(z+i)^{-2}\right]'\Big|_{z=+i} = -\frac{i}{2e}\ ,$$
$$\operatorname{Res}(f(z), -i) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}(z-i)^{-2}}{(z+i)^2}; -i\right) = \left[e^{iz}(z-i)^{-2}\right]'\Big|_{z=-i} = 0\ .$$

c) Si procede nel solito modo: per ogni $r > 0$ sia D_r il semi-disco dato dall'intersezione del disco aperto di centro 0 e raggio r con il semipiano $A := \{\operatorname{Im} z > 0\}$. La frontiera di D_r è quindi parametrizzata in senso antiorario dai cammini $\gamma_{1,r}(t) := t$, con $t \in [-r, r]$, e $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$. Come al solito

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz \ , \tag{1}$$

e poiché $|f(z)| = O(1/|z|^4)$ nel semipiano A,

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 0 \ . \tag{2}$$

Infine, per ogni $r > 1$ il semi-disco D_r contiene solo il polo i e quindi per il teorema dei residui, e per quanto visto al punto b), abbiamo che

$$\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = \frac{\pi}{e} \ . \tag{3}$$

Passando al limite per $r \to +\infty$ nella (3) e usando la (1) e la (2) si ottiene infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{e} \ .$$

4. a) Per calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D_2 := \{|z| \le 2\}$ applichiamo il teorema di Rouché (o meglio una sua nota variante) alla scomposizione

$$f(z) = \underbrace{z^4}_{f_1} + \underbrace{e^{z/2} - 4z + \frac{1}{4z-6}}_{f_2} \ .$$

In effetti per $z \in \partial D_2$ si ha

$$|f_2(z)| \le e^{x/2} + 4|z| + \frac{1}{4|z|-6} \le e + 8 + \frac{1}{2} < 16 = |f_1(z)| \ .$$

Quindi

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_2\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } D_2\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D_2\} = 4 \ ,$$

da cui segue che

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_2\} = 5 \ . \tag{4}$$

Per calcolare il numero di zeri di f contenuti in $D_1 := \{|z| < 1\}$ applichiamo invece il teorema di Rouché alla scomposizione

$$f(z) = \underbrace{-4z}_{f_1} + \underbrace{z^4 + e^{z/2} + \frac{1}{4z-6}}_{f_2} \ .$$

In effetti per $z \in \partial D_1$ si ha

$$|f_2(z)| \le |z|^4 + e^{x/2} + \frac{1}{6-4|z|} \le 1 + e^{1/2} + \frac{1}{2} < 4 = |f_1(z)| \ .$$

Pertanto

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D_1\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D_1\} = 1 \ . \tag{5}$$

Dalla (4) e dalla (5) deduciamo infine che

$$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D = D_2 \setminus D_1\} = 4 \ .$$

Commenti.

- Esercizio 1b). In alternativa si può dimostrare che il retratto di deformazione E è omotopicamente equivalente (anche se non omeomorfo) ad un bouquet di due circonferenze.
- Esercizio 2b). In alternativa si può dimostrare direttamente che S' è omeomorfo a S^2. Per la precisione, il cambio di variabili

  $$[x_0, x_1, x_2, x_3] = [y_0 + y_3, y_1, y_2, y_0 - y_3]$$

  (che corrisponde ovviamente ad una trasformazione proiettiva di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$) porta la superficie S' di equazione $x_0 x_3 = x_1^2 + x_2^2$ in quella di equazione $y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, che è una sfera.
- Per errore, alla prova scritta è stata data una versione del quarto esercizio leggermente più semplice, con $z^3(z-4)$ al posto $z(z^3-4)$. Qui è stato riportato l'esercizio come originariamente inteso. La versione data alla prova scritta si risolve applicando il teorema di Rouché direttamente all'insieme D e alla scomposizione

  $$f(z) = \underbrace{-4z^3}_{f_1} + \underbrace{z^4 + e^{z/2} + \frac{1}{4z-6}}_{f_2} \ .$$

  Infatti ∂D consiste degli z tali che $|z| = 2$ oppure $|z| = 1$, e nel primo caso si ha

  $$|f_2(z)| \le |z|^4 + e^{x/2} + \frac{1}{4|z|-6} \le 16 + e + \frac{1}{2} < 32 = |f_1(z)| \ ,$$

  mentre nel secondo caso

  $$|f_2(z)| \le |z|^4 + e^{x/2} + \frac{1}{6-4|z|} \le 1 + e^{1/2} + \frac{1}{2} < 4 = |f_1(z)| \ .$$

  Quindi

  $$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D\} - \#\{\text{poli di } f \text{ in } D\} = \#\{\text{zeri di } f_1 \text{ in } D\} = 0 \ ,$$

  da cui segue che

  $$\#\{\text{zeri di } f \text{ in } D\} = \#\{\text{poli di } f \text{ in } D\} = 1 \ .$$

1. Per ipotesi esiste r tale che

$$f(x) = x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } |x| \geq r, \tag{1}$$

e tramite un'opportuno cambio di variabili possiamo ricondurci la caso $r = 1$. Pertanto la restrizione di f al disco chiuso $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ è una mappa continua a valori nel piano che coincide con l'identità sulla frontiera di D^2, ed è un fatto noto che $f(D^2) \supset D^2$ (si tratta di una delle varie formulazioni equivalenti del teorema di punto fisso di Brower, o di non retraibilità del disco sulla circonferenza). D'altra parte è ovvio dalla (1) che $f(\mathbb{R}^2 \setminus D^2) = \mathbb{R}^2 \setminus D^2$, e mettendo insieme questi fatti si ottiene infine che $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

2. a) Detto C l'arco parametrizzato da

$$\gamma_1(t) := e^{it} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi/3],$$

si ha che C è un sottoinsieme compatto di S^1 e ne interseca tutte le classi di equivalenza. Quindi, per un risultato noto, X è omeomorfo a $C/{\sim}$, e siccome la restrizione di $\sim$ a C è la relazione di equivalenza che identifica gli estremi di C, $C/{\sim}$ e X sono omeomorfi a S^1. Pertanto il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$, ed è generato (per esempio) da $[p \circ \gamma_1]$.
b) Detta p la proiezione canonica di D sul quoziente, applichiamo il teorema di van Kampen alla scomposizione $Y = U_1 \cup U_2$ con

$$U_1 := p(\{z : z \neq 0\}) \quad \text{e} \quad U_2 := p(\{z : |z| < 1\}) \ .$$

L'aperto U_1 è connesso per archi e si deforma su $p(S^1)$ tramite la solita deformazione radiale. Pertanto il gruppo fondamentale di U^1 è isomorfo a quello di $p(S^1)$, che, per quanto visto al punto precedente, è il gruppo libero generato da $a := [p \circ \gamma_1]$.
L'aperto U_2 è (omeomorfo a) un disco aperto ed è quindi semplicemente connesso.
L'intersezione $U_1 \cap U_2$ si deforma sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $1/2$. Pertanto il suo gruppo fondamentale è il gruppo libero generato dal cammino $p \circ \gamma_2$ dove

$$\gamma_2(t) := e^{it} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo ora che in U_1 il cammino $p \circ \gamma_2$ è omotopo a $p \circ \gamma_1$ percorso tre volte, ovvero $[p \circ \gamma_2] = a^3$. Viceversa in U_2 il cammino $p \circ \gamma_2$ è omotopo alla costante.
Per quanto appena visto, usando il teorema di van Kampen si ottiene che il gruppo fondamentale di Y è il gruppo generato da a con la relazione $a^3 = e$ ed è dunque isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

3. Consideriamo la funzione meromorfa

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{(z-1)^4 + 4} \ ,$$

e per ogni $r > 0$ indichiamo come al solito con D_r il semidisco dato dall'intersezione del disco aperto di centro l'origine e raggio r con il semipiano superiore $A := \{\operatorname{Im} z > 0\}$; la frontiera di D_r è quindi parametrizzata dai cammini $\gamma_{1,r}(t) := t$, con $t \in [-r, r]$, e $\gamma_{2,r}(t) := re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$, e ovviamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-1)^4 + 4} \, dx = \operatorname{Re}\left[\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz\right] \ . \tag{2}$$

Inoltre, poiché $|f(z)| = O(1/|z|^4)$ nel semipiano A,

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz = 0 \; . \tag{3}$$

Infine i punti singolari di f sono dati dagli zeri del denominatore, vale a dire $2 \pm i, \pm i$, e si tratta di poli semplici di f. Pertanto per ogni $r > \sqrt{5}$ il semidisco D_r contiene i poli $z_1 = i$ e $z_2 = 2 + i$, e poiché la frontiera di D_r è parametrizzata in senso *antiorario* dal cammino $\gamma_{1,r} * \gamma_{2,r}$, per il teorema dei residui abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,r}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f(z), z_1) + [\mathrm{Res}(f(z), z_2)\big] \\ &= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{((z-1)^4+4)'}\bigg|_{z=z_1} + \frac{e^{iz}}{((z-1)^4+4)'}\bigg|_{z=z_2}\right] \\ &= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{4(z-1)^3}\bigg|_{z=z_1} + \frac{e^{iz}}{4(z-1)^3}\bigg|_{z=z_2}\right] \\ &= 2\pi i\left[\frac{(1-z)\,e^{iz}}{16}\bigg|_{z=i} + \frac{(1-z)\,e^{iz}}{16}\bigg|_{z=2+i}\right] \\ &= \frac{\pi}{8e}[1 + \cos 2 + \sin 2 + i(1 - \sin 2 - \cos 2)] \; .\end{aligned}$$

Passando al limite per $r \to +\infty$ nell'equazione precedente e usando la (2) e la (3) si ottiene quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x-1)^4 + 4}\,dx = \frac{\pi}{8e}(1 + \cos 2 + \sin 2) \; .$$

4. a) Siccome $f(0) = 0$ e f è iniettiva, $f(z) \neq 0$ per ogni $z \neq 0$ e quindi $g(z)$ è ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$. Chiaramente sia $f(z)$ che $1/\overline{f(1/\bar z)}$ sono mappe continue sul loro insieme di definizione, inoltre usando il fatto che $1/\bar z = z$ quando $|z| = 1$ (e che $|f(z)| = 1$ per $|z| = 1$) si ottiene facilmente che $f(z) = 1/\overline{f(1/\bar z)}$ quando $|z| = 1$; da questo e da un lemma noto segue che g è continua su tutto $\mathbb{C}$. Chiaramente g è olomorfa per $|z| < 1$, mentre per $|z| > 1$ si ha che $g(z) = 1/h(1/z)$ dove $h(z) := \overline{f(\bar z)}$, e usando il fatto (noto) che h è olomorfa, si ottiene che anche g è olomorfa per $|z| > 1$.
   b) Per dimostrare che f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ basta verificare che la forma $f(z)\,dz$ è chiusa, e questo segue dal fatto che f è continua su $\mathbb{C}$ e olomorfa su $\mathbb{C} \setminus S^1$ (nel caso in cui S^2 viene sostituito dall'asse reale questo enunciato è stato dimostrato a lezione; qui si deve modificare opportunamente la dimostrazione).
   c) Per ipotesi $f(0) = 0$, ed essendo f iniettiva, la derivata di f in 0 deve essere diversa da 0 (altrimenti f sarebbe asintoticamente equivalente in 0 ad una potenza di z, e non potrebbe essere iniettiva). Pertanto $f(z) = cz + o(z)$ per $z \to 0$ con $c := f'(0)$, e da questo segue che $g(z) = cz + o(z)$ per $|z| \to +\infty$.
   d) Per quanto visto al punto precedente g è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ a crescita lineare all'infinito, e da questo segue che g è lineare, ovvero che $g(z) = az + b$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Questo implica che $f(z) = az + b$ per ogni $z \in D$; inoltre l'ipotesi $f(0) = 0$ implica $f(0) = 0$, e il fatto che $f(D) = D$ implica $|a| = 1$.

Commenti.

- Esercizio 1. Dimostrazione alternativa: supponendo per assurdo che f non sia suriettiva, esiste $y_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{R}^2)$. A meno di traslazioni si può assumere che $y_0 = 0$ e si considera la mappa $g : \mathbb{R}^2 \to S^1$ data da $g : x \mapsto f(x)/|f(x)|$. Per ipotesi esiste inoltre un compatto K tale $f(x) = x$ per $x \notin K$, e assumendo che tale compatto sia contenuto nel disco D^2, si ottiene che la restrizione di g porta D^2 in S^1, è continua, e coincide con l'identità su S^1, cosa che è impossibile (si tratta di una delle varie formulazioni equivalenti del teorema di Brower).

- Esercizio 2. Alternativamente si può dimostrare che la mappa $g : S^1 \to S^1$ data da $g : z \mapsto z^3$ definisce una mappa $\tilde{g} : X \to S^1$ che è continua ed iniettiva, e pertanto è anche un omeomerfismo (perché lo spazio X è compatto e di Hausdorff).
- Esercizio 3. Sono stati fatti sorprendentemente tanti errori nel calcolo delle radici del polinomio $(z-1)^4 + 4$.
- Esercizio 4. Applicando il Lemma di Schwartz sia ad f si ottiene che $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$. che alla sua inversa. Osserviamo inoltre che l'inversa di f è una funzione olomorfa da D in D (questo fatto andrebbe dimostrato) e pertanto, sempre per il lemma di Schwartz, $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ per ogni $w \in D$. Ponendo quindi $z = f^{-1}(w)$ si ottiene che $|z| \leq f(z)$ per ogni $z \in D$. Sappiamo dunque che $|f(z)| = |z|$ per ogni $z \in D$, e quindi sempre il lemma di Schwartz ci dice che $f(z) = az$ con $|a| = 1$. A questo modo si dimostra direttamente il punto d), e da questo seguono facilmente tutti gli altri.