Versione: 11 settembre 2010

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi in più Variabili III

a.a. 2009/10

docenti: Giovanni Alberti e Maria Stella Gelli

GIOVANNI ALBERTI
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi in più Variabili III consistono solitamente di otto problemi di cui dare una soluzione articolata. Di questi, i primi quattro o cinque sono relativamente semplici, nel senso che ammettono una soluzione di poche righe o comunque possono essere facilmente ricondotti a fatti e/o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una traccia delle soluzioni.

Programma del corso.

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Serie di Fourier
   - 1.1 Rappresentazione di una funzione di periodo 2π come serie di Fourier reale e complessa su $\mathbb{R}$. La base di Fourier (complessa) come sistema ortonormale; teorema di approssimazione Weierstrass e massimalità di tale sistema. Convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe $\mathscr{C}^1$.
   - 1.2 *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier. Ruolo dei dati iniziali e delle condizioni al bordo.
   - 1.3 Varianti della serie di Fourier: per funzioni su un intervallo e nulle al bordo; per funzioni sul quadrato.
   - 1.4 *La base di Fourier come sistema di autovettori di un operatore autoaggiunto. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.*
2. Convoluzione di funzioni e trasformata di Fourier
   - 2.1 Rappresentazione di una funzione su $\mathbb{R}$ come combinazione integrale delle funzioni trigonometriche complesse. *Derivazione euristica a partire dalla serie di Fourier.*
   - 2.2 Prodotto di convoluzione di due funzioni su $\mathbb{R}$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier: trasformata del prodotto e del prodotto di convoluzione, della traslazione, della derivata. Dimostrazione della formula di inversione.
   - 2.3 Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier, e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore.
   - 2.4 *Convoluzione e distribuzione della somma di due variabili aleatorie indipendenti. Dimostrazione del teorema del limite centrale tramite trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier per funzioni di più variabili.*
   - 2.5 Richiamo: compattezza e compattezza sequenziale; teorema di Ascoli-Arzelà, teorema di Tychonov (dimostrato solo per un prodotto numerabile di spazi metrici compatti). *Teorema di unicità di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
3. Integrazione su superfici
   - 3.1 Richiamo: integrazione di campi di vettori su curve e superfici; teorema di Stokes, di Gauss-Green e della divergenza.
   - 3.2 Superfici regolari di dimensione k (sottovarietà) in $\mathbb{R}^n$ senza bordo; equivalenza delle diverse definizioni. Definizione di spazio tangente ad una superficie. Definizione di funzione (e di mappa) di classe $\mathscr{C}^h$ su una superficie, e del suo differenziale in un punto. Superfici con bordo.
   - 3.3 Determinante Jacobiano e formula dell'area. Integrale di una funzione scalare su una superfice (definito tramite parametrizzazioni).
   - 3.4 Orientazione di una superficie e orientazione del bordo. Applicazioni k-lineari alternanti e k-forme, rappresentazione di una k-forma in coordinate. Differenziale e pull-back di una k-forma. Teorema di Stokes. *Forme chiuse ed esatte.*

4. Funzioni armoniche

4.1 Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Proprietà della media e principio del massimo. Unicità della soluzione dell'equazione di Laplace.

4.2 Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco tramite la serie di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite la funzione di Green. *Relazione con la teoria delle funzioni olomorfe.*

5. Integrazione secondo Lebesgue

5.1 Definizione di misura (σ-additiva) su una σ-algebra. Funzioni Boreliane e funzioni misurabili. Costruzione dell'integrale e sue proprietà fondamentali. Teorema di convergenza monotona, di convergenza dominata (di Lebesgue) e lemma di Fatou. *Teorema di Lusin. Prodotto di σ-algebre e di misure; teorema di Fubini.*

5.4 Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Spazi L^p.

Testi

Primo compitino, 20 novembre 2009

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $x^n e^{-|x|}$ con n intero positivo.
2. Dimostrare che una funzione su $\mathbb{R}$ continua, 2π-periodica e *a valori reali* è univocamente determinata dai coefficienti di Fourier complessi con indice $n \geq 0$.
3. Dati $a_1, a_2 > 0$, calcolare il prodotto di convoluzione $N_{a_1} * N_{a_2}$ dove $N_a(x) := \exp\left(-\dfrac{x^2}{2a^2}\right)$.
4. Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine che ammetta come soluzione $u(x) := \exp(-x^4/4)$, e scrivere l'equazione (differenziale lineare omogenea) corrispondente per la trasformata di Fourier $\hat{u}$.
5. Detto X lo spazio delle funzioni continue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ dotato del solito prodotto scalare, indichiamo con Y il sottospazio di X delle funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ nulle in 1 e con le lettere R, S, T degli operatori lineari da Y in X.
   a) Posto $Ru := -x\dot{u}$ e $Su := x\dot{u} + u$, verificare che S è l'aggiunto di R.
   b) Calcolare l'aggiunto di $Tu := x^2\ddot{u}$.
6. Sullo spazio delle funzioni continue $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ consideriamo l'usuale prodotto scalare rinormalizzato per un fattore $2/\pi$, cosicché le funzioni $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$ formano un sistema ortonormale, e per ogni funzione f indichiamo con $\gamma_n(f)$ i coefficienti di f rispetto a questo sistema.
   a) Supponendo che f sia di classe $\mathscr{C}^2$ e nulla in 0 e π, esprimere $\gamma_n(f'')$ in funzione di $\gamma_n(f)$.
   b) Calcolare $\gamma_n(g)$ dove $g(x) := x^4 - 2\pi x^3 + \pi^3 x$.
   c) Trovare la soluzione del problema
   $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g(x) & \text{per ogni } t \in [0,+\infty),\ x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{per ogni } t \in [0,+\infty), \\ u(0,x) = 0 & \text{per ogni } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$
   d) Cosa si può dire sulla regolarità di questa soluzione per $t > 0$? [*Dare almeno una stima dal basso per il massimo valore k tale che $u \in \mathscr{C}^k$.*]
7. Siano f, g funzioni continue su $\mathbb{R}$ a valori complessi tali che f è 2π-periodica e $\|g\|_1 < +\infty$.
   a) Far vedere che il prodotto di convoluzione $f * g$ è una funzione 2π-periodica.
   b) Scrivere i coefficienti di Fourier complessi $c_n(f * g)$ di $f * g$ in termini dei coefficienti $c_n(f)$ e della trasformata di Fourier $\hat{g}$.
   c) Dimostrare che se f è di classe $\mathscr{C}^1$ allora la serie di Fourier di $f * g$ converge uniformemente.
   d) Dimostrare che se g ha supporto compatto allora la serie di Fourier di $f * g$ converge uniformemente.
8. Sia p un polinomio reale di grado $d \geq 2$ con zeri semplici e non reali. Dimostrare che la trasformata di Fourier di $1/p(x)$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

SECONDO COMPITINO, 7 GENNAIO 2010

1. Su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si consideri la funzione $\rho(x) := |x|$.
   a) Calcolare $d\rho$;
   b) data $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$, calcolare $d(f(\rho)\, d\rho)$.
   [*Dovesse servire, limitarsi nel punto* b) *al caso* $n = 2$.]

2. Si consideri la mappa $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ data da $f : A \mapsto A^2$.
   a) Calcolare $df(A)$;
   b) calcolare il rango di $df(A)$ per $n = 2$ e $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Calcolare $d\big[(xy^2\, dz + xz^2\, dy) \wedge (dx + dy + dz)\big]$.

4. Sia S l'insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ con norma euclidea uguale a 1. Dimostrare che S è una superficie compatta senza bordo di dimensione $d := \frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

5. a) Sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ tale che sia u e u^2 sono funzioni armoniche. Dimostrare che u è costante.
   b) Dire se vale lo stesso risultato per funzioni u a valori complessi.

6. Sia S una superficie connessa, senza bordo, di dimensione d e classe $\mathscr{C}^1$ in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare quanto segue:
   a) data $f : S \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$ tale che $df(x) = 0$ per ogni $x \in S$, allora f è costante;
   b) se esiste un vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $v \perp \operatorname{Tan}(S, x)$ per ogni $x \in S$, allora S è contenuta in un iperpiano affine perpendicolare a v.

7. Sia $D := \{t \in \mathbb{R}^2 : |t| \le 1\}$ e sia $S := \varphi(D)$ dove $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ è la mappa data da
   $$\varphi(t_1, t_2) := \big(t_1 + t_1^3\,,\ t_2 + t_2^3\,,\ (1 + t_1)(1 + t_2)\big)\ .$$
   Sia inoltre ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3$ data da
   $$\omega := (dx_1 - dx_2) \wedge dx_3\ .$$
   a) Verificare che φ è iniettiva e $d\varphi(t)$ ha rango massimo in tutti i punti di D. [*Si noti che questo è sufficiente a dimostrare che* S *è una superficie con bordo di dimensione* 2 *in* $\mathbb{R}^2$.]
   b) Supponendo che S sia dotata dell'orientazione indotta da φ, calcolare $\displaystyle\int_S \omega$.

8. Sia $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica di classe $\mathscr{C}^1$ con media nulla. Per ogni intero $k = 1, 2, \dots$, indichiamo con u_k la soluzione del problema
   $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } D, \\ u(e^{i\theta}) = f(k\theta) & \text{per } 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$
   Dimostrare che esiste una costante c tale che $|u_k(x)| \le c|x|^k$ per ogni $x \in D$ ed ogni k.

SCRITTO DEL PRIMO APPELLO, 12 GENNAIO 2010

1. Sia g la funzione su $\mathbb{R}$ di periodo 2π definita da $g(x) := e^{-|x|}$ per $x \in [-\pi, \pi]$. Calcolare i coefficienti di Fourier reali e complessi di g.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa data da $f(t_1, t_2) := (t_1, t_2, t_1^2, t_2^2)$, e sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^4$ data da
$$\omega = (x_2^2\, dx_1 - x_1^2\, dx_2) \wedge (x_4^2\, dx_3 - x_3^2\, dx_4) \ .$$
a) Calcolare $d\omega$.
b) Calcolare $f^\# \omega$.

3. Siano f, g funzioni continue su $\mathbb{R}$ tali che f è Lipschitziana e limitata e $\|g\|_1 < +\infty$. Dimostrare che $f * g$ è una funzione Lipschitziana la cui costante di Lipschitz soddisfa $\mathrm{Lip}(f * g) \le \mathrm{Lip}(f)\, \|g\|_1$.

4. Sia A un compatto con frontiera regolare in $\mathbb{R}^n$, e sia X l'insieme delle funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ su A nulle su ∂A. Dimostrare che l'operatore $-\Delta : X \to \mathscr{C}(A)$ è autoaggiunto e definito positivo.

5. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dimostrare che la funzione f è identicamente nulla.

6. Sia X lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue e 2π-periodiche, ed indichiamo come al solito con $c_n(f)$ i coefficienti di Fourier complessi di una funzione $f \in X$. Definiamo il prodotto di convoluzione di due funzioni $f, g \in X$ come
$$f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, g(x-y)\, dy \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
a) Calcolare i coefficienti di Fourier di $f * g$ a partire da quelli di f e di g.
b) Dimostrare che $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.
c) Presa $g \in X$ e $u_0 \in X \cap \mathscr{C}^1$, trovare una soluzione del problema
$$\begin{cases} u_t = g * u - u & \text{in } \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & \text{per } t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{$*$}$$

7. Si consideri la mappa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ data da $f(z) := (z^2, z^3)$.
a) Dimostrare che f è iniettiva e propria, e che $\nabla f(z)$ ha rango massimo per ogni $z \neq 0$.
b) Calcolare il determinante Jacobiano di f.
c) Dire se $S := f(\mathbb{C})$ è una superficie regolare oppure no.
[*Dove necessario si identifica* $\mathbb{C}$ *con* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{C}^2$ *con* $\mathbb{R}^4$*; con "superficie regolare" si intende una superficie senza bordo di classe* $\mathscr{C}^\infty$ *e dimensione* 2 *in* $\mathbb{R}^4$.]

8. Data A matrice $n \times n$ reale, simmetrica e definita positiva, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) := \exp\Big(-\frac{1}{2} \langle Ax\, ;\, x \rangle \Big) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$
a) Calcolare la trasformata di Fourier di f nel caso in cui A è diagonale.
b) Calcolare la trasformata di Fourier di f per A qualunque.

Scritto del secondo appello, 5 febbraio 2010

1. Siano f, g funzioni reali e continue su $\mathbb{R}$ tali che f è di classe $\mathscr{C}^1$ e 2π-periodica, e $\|g\|_1 < +\infty$. Scrivere la trasformata di Fourier del prodotto $f \cdot g$ in termini dei coefficienti di Fourier (complessi) di f e della trasformata di Fourier di g.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $h(x) := e^{-|x|} \cos x$.

3. a) Sia φ un'applicazione k-lineare alternante su $\mathbb{R}^n$ con k dispari. Dimostrare che $\varphi \wedge \varphi = 0$.
   b) E se k è pari?

4. Sia ω una 2-forma su $\mathbb{R}^3$ del tipo $\omega := g\, dx_1 \wedge dx_2$ con $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathscr{C}^1$ che dipende solo da x_1 e x_2.
   a) Verificare che $d\omega = 0$ e scrivere esplicitamente una primitiva di ω.
   b) Dimostrare che $\int_S \omega = 0$ per ogni superficie S orientata, compatta e senza bordo.

5. Dati $a \in \mathbb{R}$ e $b : [0, T] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ funzione continua, si consideri il problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + au + b(t, x) & \text{in } [0, T] \times [0, \pi]; \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{per ogni } t \in [0, T]; \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0 & \text{per ogni } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

   Dimostrare che esiste al più una soluzione $u : [0, T] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^2$.

6. Dato $n \geq 2$, sia S l'insieme delle coppie $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tali che $|x_1| = |x_2| = |x_1 - x_2| = 1$.
   a) Dimostrare che S è una superficie $\mathscr{C}^\infty$ di dimensione $d := 2n-3$, compatta e senza bordo.
   b) Dire se S è orientabile o meno.

7. Detto X lo spazio vettoriale delle funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\|f\|_1 < +\infty$ e presa $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come nell'esercizio 2, si consideri la forma bilineare su X

$$Q(f_1; f_2) := \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x_2 - x_1)\, f_1(x_1)\, f_2(x_2)\, dx_1\, dx_2 \ .$$

   a) Dimostrare che Q è ben definita per ogni $f_1, f_2 \in X$.
   b) Trovare un'applicazione lineare autoaggiunta $T : X \to X$ tale che $Q(f_1; f_2) = \langle T f_1 \,;\, f_2 \rangle$ per ogni $f_1, f_2 \in X$ [*con* $\langle\, ;\, \rangle$ *si intende l'usuale prodotto scalare su* X].
   c) Dimostrare che Q è definita positiva.
   d) Trovare gli autovettori di T.

8. Indichiamo con D e D' i dischi chiusi in $\mathbb{R}^2$ di centro 0 e raggi 1 e 1/2 rispettivamente, e con $\|f\|_A$ la norma del sup di una funzione f relativamente all'insieme A.
   a) Dimostrare che esiste una costante C tale che per ogni funzione armonica u definita in un intorno di D si ha $\|\nabla u\|_{D'} \leq C \, \|u\|_{\partial D}$.
   b) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia u_n una successione di funzioni armoniche equilimitate su A. Dimostrare che per ogni compatto K contenuto in A esiste una sottosuccessione di u_n che converge uniformemente su K.

Scritto del terzo appello, 7 giugno 2010

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e 2π-periodica. Dimostrare che f è di classe $\mathscr{C}^\infty$ se e solo se i coefficienti di Fourier c_n soddisfano $c_n = o(|n|^{-a})$ per ogni $a \geq 0$.
2. Sia u una funzione armonica su $\mathbb{R}^n$. Dimostrare quanto segue:
   a) se $\|u\|_1 < +\infty$ allora u è identicamente nulla;
   b) se $\|u\|_p < +\infty$ per qualche $p < +\infty$ allora u è identicamente nulla.
3. Detto X lo spazio delle funzioni continue da $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$ dotato del solito prodotto scalare, e Y il sottospazio delle funzioni di classe $\mathscr{C}^1$ nulle in ± 1, si considerino gli operatori lineari $S : X \to X$ e $D : Y \to X$ dati rispettivamente da $Su(x) := \frac{1}{2}(u(x)+u(-x))$ e $Du(x) := \dot{u}(x)$. Dire se S è autoaggiunto e calcolare l'aggiunta di SD.
4. Si consideri la mappa $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ data da $f : A \mapsto \mathrm{tr}(A) \cdot A$.
   a) Calcolare $df(A)$;
   b) calcolare il rango di $df(A)$ per $n = 2$ e $A = I$;
   c) calcolare il rango di $df(A)$ per $n = 2$ e A diagonale.
5. Sia A la chiusura di un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare, e sia ν la normale esterna a ∂A. Sia inoltre $u : (0, T) \times A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$ tale che
   $$u_t = \Delta u \quad \text{su } (0, T) \times A.$$
   Dimostrare i seguenti enunciati:
   a) se $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $(0, T) \times \partial A$ allora che $\int_A u\, dx$ è costante in t;
   b) se $u = 0$ su $(0, T) \times \partial A$ allora $\int_A u^2\, dx$ è decrescente in t.
6. Risolvere il problema
   $$\begin{cases} u_t = 2u + u_{xx} & \text{per ogni } t \in [0, +\infty),\ x \in [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{per ogni } t \in [0, +\infty), \\ u(0, x) = 2 \sin x \cos(2x) & \text{per ogni } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$
7. a) Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1)e^{-x^2/2}$.
   b) Trovare le funzioni continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $g * g = f$ e $\|x\, g(x)\|_1 < +\infty$;
   c) Cosa succede al punto b) se si suppone $\|g(x)\|_1 < +\infty$ invece di $\|x\, g(x)\|_1 < +\infty$.
8. Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $z^2 = x^2 + y^2$ e $1 \leq z \leq 2$, e sia
   $$\omega = \left(1 + \frac{y}{x^4 + 1}\right) dx \wedge dy - z(x + y)(dx + dy) \wedge dz\ .$$
   a) Verificare che S è una superficie con bordo di classe $\mathscr{C}^\infty$.
   b) Trovare una parametrizzazione φ di S e calcolare $\varphi^\# \omega$ e $\varphi^\#(d\omega)$.
   c) Calcolare $\int_S \omega$ supponendo che S sia orientata in modo tale che la corrispondente orientazione di ∂S nel punto $(1, 0, 1)$ sia data dal vettore $(0, 1, 0)$.

Scritto del quarto appello, 23 luglio 2010

1. Calcolare il differenziale della forma ω su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ data da
$$\omega := f(|x|) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \omega_i$$
dove $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ e ω_i il prodotto esterno dei dx_j con $j \neq i$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $e^{-a|x|}$ per ogni $a > 0$.

3. Sia X lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue e di periodo 2π. Caratterizzare le funzioni in X che sono *pari* e assumono valori *reali* in termini dei loro coefficienti di Fourier complessi.

4. Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'equazione $u_{tt} = 4u_{xx}$ che soddisfi le condizioni iniziali $u(0, x) = 2/(1 + x^4)$ e $u_t(0, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5. Si consideri una successione di funzioni armoniche $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che convergono uniformemente sui compatti ad una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f è armonica.

6. Sia S una superfice senza bordo di classe $\mathscr{C}^1$ e dimensione d in $\mathbb{R}^n$. Data $g : S \to \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathscr{C}^1$, poniamo $N := g^{-1}(0)$. Dimostrare che se $dg(x) \neq 0$ per ogni $x \in N$ allora N è una superfice senza bordo di classe $\mathscr{C}^1$ e dimensione $d - 1$.

7. Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 + z^3 - 2z = 4$ e $z \geq 0$, e preso $a \in \mathbb{R}$ si ponga
$$\omega := e^{x^2+y^2} dx \wedge dy - 2z(x + ay)\,(dx + dy) \wedge dz\ ,$$
a) Dimostrare che S è una superfice con bordo, compatta e di classe $\mathscr{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^3$.
b) Determinare l'insieme I degli $a \in \mathbb{R}$ per i quali ω è chiusa, ovvero $d\omega = 0$.
c) Per ogni $a \in I$ trovare una primitiva di ω, vale a dire una 1-forma σ tale che $d\sigma = \omega$.
d) Per ogni $a \in I$ calcolare l'integrale di ω su S supponendo che l'orientazione di S in $(0, 0, 2)$ sia quella indotta dal vettore normale $(0, 0, 1)$.

8. Sia Ω il semipiano dei punti $(x, s) \in \mathbb{R}^2$ tali che $s > 0$, e sia $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua che tende a 0 all'infinito. Consideriamo quindi il problema
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per ogni } (x, s) \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, s) \to 0 & \text{per } |(x, s)| \to +\infty. \end{cases} \qquad (*)$$
a) Dimostrare che $(*)$ ammette al più una soluzione u continua su $\overline{\Omega}$ e di classe $\mathscr{C}^2$ su Ω.
b) Trovare un'espressione esplicita per u. [*Non si richiede una completa giustificazione. Suggerimento: detta $v(y, s)$ la trasformata di Fourier di $u(x, s)$ rispetto alla variabile x, riscrivere l'equazione $\Delta u = 0$ in termini di v.*]

SCRITTO DEL QUINTO APPELLO, 10 SETTEMBRE 2010

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e 2π-periodica con coefficienti di Fourier complessi c_n.
   a) Dato $a \in \mathbb{R}$, esprimere i coefficienti di Fourier complessi di $f(x+a)$ in funzione di c_n.
   b) Dato $k \in \mathbb{Z}$, esprimere i coefficienti di Fourier complessi di $f(kx)$ in funzione di c_n.

2. Si consideri la mappa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(t_1,t_2) := (t_1^2 - t_2^2, 2t_1t_2, t_1^2 + t_2^2)$ e la 2-forma su $\mathbb{R}^3$
$$\omega = x_1\, dx_2 \wedge dx_3 - x_2\, dx_3 \wedge dx_1 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \ .$$
   Calcolare $d\omega$, $f^\# \omega$ e $f^\#(d\omega)$.

3. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \sin^2 x/x^2$. [*Può essere utile ricordare che* $\sin x/x$ *è una trasformata di Fourier già calcolata a lezione*.]

4. Trovare una soluzione $u : \mathbb{R} \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ del seguente problema:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 5u \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = 2\sin(2x) + 2\sin(3x) \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases} .$$

5. Preso $a \in \mathbb{R}$, si consideri la 2-forma
$$\omega := (3x_1^2 + ax_3)\, dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 + 2ax_3)\, dx_2 \wedge dx_3 \ .$$
   a) Determinare l'insieme I degli $a \in \mathbb{R}$ per i quali ω è chiusa, ovvero $d\omega = 0$.
   b) Per ogni $a \in I$ trovare una primitiva di ω, vale a dire una 1-forma σ dalle che $d\sigma = \omega$.

6. Detto X lo spazio delle matrici reali $n \times n$ con $n \geq 2$, si consideri la mappa $f : X \to X$ data da $f(A) := A + A^t + A^t A$.
   a) Calcolare $df(A)$ per ogni $A \in X$ e dimostrare che ha rango minore o uguale a $\frac{1}{2}n(n+1)$.
   b) Detta I la matrice identità, calcolare il rango di $Df(aI)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
   c) Dimostrare che l'insieme delle $A \in X$ tali che $f(A) = 0$ è una superfice regolare di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$.

7. Sia S l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ tali che $(|x|,|y|) \in C$ dove C è una curva (nel senso di superfice di dimensione 1) di classe $\mathscr{C}^1$ contenuta in $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$, compatta e senza bordo.
   a) Dimostrare che S è una superfice $\mathscr{C}^1$ di dimensione 3 in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, compatta e senza bordo.
   b) Calcolare il volume di S a partire da una parametrizzazione γ di C.

8. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione armonica, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^2$.
   a) Dimostrare che se f è affine allora $f \circ u$ è armonica.
   b) Supponendo che $f \circ u$ sia armonica e che il gradiente di u non si annulli mai, dimostrare che f coincide sull'immagine di u con una funzione affine.
   c) Cosa succede al punto b) rimuovendo l'ipotesi che il gradiente di u non si annulli mai?

Soluzioni

1. Usando i seguenti fatti noti:

$$\mathscr{F}(ixf) = D(\mathscr{F}f) \ , \quad \mathscr{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+y^2} \ ,$$

si ottiene che

$$\mathscr{F}(x^n e^{-|x|}) = i^n \mathscr{F}((-ix)^n e^{-|x|}) = i^n D^n \mathscr{F}(e^{-|x|}) = 2i^n D^n \left(\frac{1}{1+y^2}\right) \ ,$$

e quindi

$$\mathscr{F}(x^n e^{-|x|}) = 2i^n D^n \left(\operatorname{Im} \frac{1}{y-i}\right) = \frac{2(-i)^n n!}{\operatorname{Im}\left((y-i)^{n+1}\right)} \ .$$

2. Detti c_n i coefficienti di Fourier di f , se f è reale si ha che

$$\bar{c}_n = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = c_{-n} \ ,$$

e quindi i coefficienti di indice negativo possono essere determinati a partire da quelli di indice positivo; per concludere basta ricordare che una funzione continua e 2π-periodica è univocamente determinata dai suoi coefficienti di Fourier.

3. Usando i seguenti fatti noti:

$$\mathscr{F}(f(x/a)) = a(\mathscr{F}f)(ay) \ , \quad \mathscr{F}(e^{-x^2/2}) = \sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2} \ ,$$

si ottiene che per ogni $a > 0$,

$$\mathscr{F}(N_a) = \sqrt{2\pi} a\, N_{1/a} \ .$$

Quindi, posto $\bar{a} := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(N_{a_1} * N_{a_2}) &= \mathscr{F}(N_{a_1}) \cdot \mathscr{F}(N_{a_2}) \\ &= 2\pi a_1 a_2\, N_{1/a_1} N_{1/a_2} \\ &= 2\pi a_1 a_2\, N_{1/\bar{a}} = \sqrt{2\pi}\, \frac{a_1 a_2}{\bar{a}}\, \mathscr{F}(N_{\bar{a}}) \ ,\end{aligned}$$

e per la formula di inversione si ha che

$$N_{a_1} * N_{a_2} = \sqrt{2\pi}\, \frac{a_1 a_2}{\bar{a}}\, N_{\bar{a}} \ .$$

4. Siccome $\dot{u} = -x^3 \exp(-x^4/4) = -x^3\, u$, la funzione u risolve l'equazione differenziale

$$\dot{u} + x^3 u = 0 \ .$$

Passando alla trasformata di Fourier otteniamo

$$0 = \mathscr{F}(\dot{u} + x^3 u) = \mathscr{F}(\dot{u}) - i\mathscr{F}((-ix)^3 u) = iy\widehat{u} - iD^3\widehat{u}$$

e quindi $\widehat{u}$ risolve l'equazione

$$D^3\widehat{u} - y\widehat{u} = 0 \ .$$

5. a) Dobbiamo verificare che $\langle Ru\,;\,v\rangle = \langle u\,;\,Sv\rangle$ per ogni $u, v \in Y$. Integrando per parti e ricordando che $u(1) = v(1) = 0$ si ottiene in effetti

$$\langle Ru\,;\,v\rangle = \int_0^1 -x\dot u\, v\, dx = -\Big| xv\,u \Big|_0^1 + \int_0^1 (xv)' u\, dx = \int_0^1 (x\dot v + v) u\, dx = \langle u\,;\,Sv\rangle\ .$$

b) Per determinare l'aggiunto di T dobbiamo scrivere $\langle Tu\,;\,v\rangle$ come prodotto scalare di u per un'espressione (lineare) che dipende solo da v. Procediamo quindi come nel punto precedente:

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle &= \int_0^1 x^2\ddot u\, v\, dx\\ &= \Big| x^2 v\,\dot u\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2 v)'\,\dot u\, dx\\ &= -\int_0^1 (x^2\dot v + 2xv)\dot u\, dx\\ &= -\Big|(x^2\dot v + 2xv)u\Big|_0^1 + \int_0^1 (x^2\dot v + 2xv)' u\, dx = \int_0^1 (x^2\ddot v + 4x\dot v + 2v) u\, dx\end{aligned}$$

(per la seconda e terza uguaglianza abbiamo usato il fatto che $u(1) = v(1) = 0$). Pertanto l'aggiunto di T è l'operatore $T^* : Y \to X$ dato da

$$T^* u := x^2\ddot u + 4x\dot u + 2u\ .$$

6. a) Integrando per parti due volte il prodotto scalare $\langle f\,;\,\sin(nx)\rangle$ si ottiene che

$$\gamma_n(D^2 f) = -n^2\,\gamma_n(f) \tag{1}$$

per $n = 1, 2, \dots$ (si tratta di un calcolo già svolto a esercitazione).
b) Si osservi che sia g che $D^2 g$ sono di classe $\mathscr{C}^2$ e nulle in 0 e π, e quindi usando la (1) si ottiene che

$$\gamma_n(g) = -\frac{1}{n^2}\,\gamma_n(D^2 g) = \frac{1}{n^4}\,\gamma_n(D^4 g)\ ,$$

e siccome $D^4 g = 24$, un semplice calcolo dà che

$$\gamma_n(g) = \frac{24}{n^4}\,\gamma_n(1) = \begin{cases} \dfrac{96}{\pi n^5} & \text{per } n \text{ dispari,}\\ 0 & \text{per } n \text{ pari.}\end{cases} \tag{2}$$

c) Procediamo come al solito scrivendo u come

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\,\sin(nx)\ . \tag{3}$$

Si ottiene allora che ogni γ_n deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y + n^2 y = \dfrac{96}{\pi n^5}\\ y(0) = 0\end{cases} \text{ per } n \text{ dispari e } \quad \begin{cases} \dot y + n^2 y = 0\\ y(0) = 0\end{cases} \text{ per } n \text{ pari.}$$

Pertanto

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \dfrac{96}{\pi n^7}(1 - e^{-n^2 t}) & \text{per } n \text{ dispari,} \\ \\ 0 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases} \tag{4}$$

Affinché la funzione u definita dalla formula (3) con i coefficienti γ_n dati in (4) sia effettivamente una soluzione del problema proposto è sufficiente che u sia di classe almeno $\mathscr{C}^2$, cosa che viene verificata nel punto successivo.

d) Dimostriamo che la funzione u definita dalla formula (3) con i coefficienti γ_n dati in (4) è di classe $\mathscr{C}^\infty$. Il punto è che possiamo scomporre u come

$$u(t,x) := \underbrace{\sum_{n \text{ dispari}} \frac{96}{\pi n^7} \sin(nx)}_{u_0(x)} - \underbrace{\sum_{n \text{ dispari}} \frac{96}{\pi n^7} e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{v(t,x)}$$

Ora, utilizzando la (1) e la (2) si vede subito che u_0 è la funzione nulla in 0 e π la cui derivata seconda è $-g$, e quindi

$$u_0(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{\pi}{10}x^5 + \frac{\pi^3}{6}x^3 - \frac{\pi^5}{10}x \; ; \tag{5}$$

in particolare u_0 è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $[0,\pi]$. D'altra parte si dimostra che v è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $(0,+\infty) \times [0,\pi]$ procedendo come per la soluzione dell'equazione del calore (in effetti v risolve l'equazione del calore, cfr. note finali): infatti

$$\left| D_x^h D_t^k \Big[\frac{96}{\pi n^7} e^{-n^2 t} \sin(nx) \Big] \right| = O(n^{2k+h-7} e^{-n^2 t})$$

e questo basta a dimostrare che, per ogni $\delta > 0$, la serie di funzioni che definisce v converge totalmente su $[\delta, +\infty) \times [0,\pi]$ come pure la serie delle derivate di qualunque ordine.

7. a) Si tratta di una verifica elementare.

b) Usando la definizione $f * g(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt \right] e^{-inx}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\; e^{-in(x-t)}\, dx \right] g(t)\, e^{-int}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, g(t)\, e^{-int}\, dt = c_n(f)\, \widehat{g}(n) \; . \end{aligned} \tag{6}$$

(Nella seconda uguaglianza si usa il teorema di Fubini per scambiare l'ordine di integrazione – la è cosa resa possibile dal fatto che il modulo della funzione integranda si stima con $||f||\,|g(x)|$ e quindi ha integrale finito su $[-\pi,\pi] \times \mathbb{R}$. Nella terza uguaglianza abbiamo usato il fatto che l'integrale tra $-\pi$ e π di una funzione 2π-periodica è uguale a quello di una sua qualunque traslata.)

c) Come visto a lezione, basta dimostrare che la somma $\sum_n |c_n(f*g)|$ è finita. In effetti dalla (6) si ottiene che

$$|c_n(f*g)| \le \|\widehat{g}\|\, |c_n(f)| \le \|g\|_1\, |c_n(f)| \; ,$$

e sappiamo già che se f è di classe $\mathscr{C}^1$ allora $\sum_n |c_n(f)| < +\infty$.
d) Utilizzando la (6) si ottiene anche che

$$|c_n(f*g)| = |c_n(f)|\,|\widehat{g}(n)| \le \frac{1}{2}(|c_n(f)|^2 + |\widehat{g}(n)|^2)\ .$$

Sappiamo dalla (dis)uguaglianza di Bessel che $\sum_n |c_n(f)|^2 < +\infty$, e quindi per ottenere che $\sum_n |c_n(f*g)| < +\infty$ ci basta dimostrare che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(n)|^2 < +\infty \tag{7}$$

In effetti si è visto a lezione che preso N intero tale che il supporto di g è contenuto in $[-\pi N, \pi N]$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(n/N)|^2 = \|g\|_2^2 < +\infty\ , \tag{8}$$

e la (7) segue dal fatto che gli addendi della serie in (7) sono un sottoinsieme di quelli della serie in (8).

8. La trasformata di Fourier di $1/p$ è ben definita perché $1/p$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$ (p non ha zeri reali!) che soddisfa $1/p(x) = O(1/x^2)$ per $x \to \pm\infty$, e quindi la sua norma L^1 è finita.
Ci limitiamo a dimostrare che $\widehat{1/p}$ è di classe $\mathscr{C}^\infty$ sulla semiretta $(0, +\infty)$; la dimostrazione per la semiretta $(-\infty, 0)$ è analoga. Per $y > 0$, il metodo dei residui mostra che

$$\widehat{1/p}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iyx}}{p(x)}\,dx = -2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iyz}}{p(z)}; z_j\right) \tag{9}$$

dove $\{z_j\}$ sono i poli di $e^{-iyz}/p(z)$, ovvero gli seri di $p(z)$, contenuti nel semipiano $\operatorname{Im} z < 0$. Trattandosi di zeri semplici sappiamo anche che

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iyz}}{p(z)}; z_j\right) = \frac{e^{-iyz_j}}{p'(z_j)}$$

e quindi

$$\widehat{1/p}(y) = -2\pi i \sum_{z_j} \frac{e^{-iyz_j}}{p'(z_j)}\ .$$

In particolare $\widehat{1/p}(y)$ coincide sulla semiretta $y > 0$ con una funzione analitica.

Commenti

- Esercizio 3. In questo esercizio sono stati fatti molti (troppi) errori di calcolo.
- Esercizio 5. Riguardo a questo esercizio, è opportuno chiarire il seguente aspetto teorico: dato un operatore $R : Y \to X$, è vero che esiste al più un operatore $S : Y \to X$ tale che

$$\langle Ru\,;\, v\rangle = \langle u\,;\, Sv\rangle \quad \text{per ogni } u, v \in Y, \tag{10}$$

e che viene quindi chiamato (ammesso che esista) aggiunto di R? In altre parole, la relazione (10) caratterizza univocamente l'aggiunto?

La risposta è affermativa se Y è un sottospazio denso in X rispetto alla topologia indotta dalla norma associata al prodotto scalare (come in effetti è in questo specifico caso): dati infatti due operatori S_1 ed S_2 per cui vale la (10) e posto $S := S_1 - S_2$, per ogni $v \in Y$ si ha che $\langle u\,;\,Sv\rangle = 0$ per ogni $u \in Y$, e quindi per densità anche per ogni $u \in X$; prendendo $u := Sv$ si ottiene quindi che $Sv = 0$. Pertanto $S_1 v = S_2 v$ per ogni $v \in Y$, ovvero $S_1 = S_2$.

- Esercizio 6c). È possibile dimostrare (ma non era richiesto) che la soluzione ottenuta è unica è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $[0, +\infty) \times [0, \pi]$.

- Esercizio 6d). Stimando la norma del sup delle funzioni $\gamma_n(t)\sin(nx)$ e delle loro derivate parziali si riesce solo a dimostrare che u è almeno di classe $\mathscr{C}^5$. Per far vedere che u è di classe $\mathscr{C}^\infty$ bisogna ricorrere ad un argomento diverso.

- Esercizio 6. Per risolvere il problema al punto c) e determinare la regolarità della soluzione si può adottare un procedimento leggermente diverso. Poiché g non dipende da t, una particolare soluzione dell'equazione differenziale $u_t = u_{xx} + g$ che soddisfa le condizioni al bordo
$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \text{per ogni } t \in [0, +\infty) \tag{11}$$
e per di più non dipende da t è la funzione $u_0(x)$ tale che $\ddot u_0 = -g$ e $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, vale a dire quella data dalla formula (5). Inoltre, siccome l'equazione $u_t = u_{xx} + g$ è lineare e non omogenea, le soluzioni che soddisfano la (11) sono tutte e sole della forma $u = u_0 + v$ dove v risolve l'equazione omogenea associata $u_t = u_{xx}$ (vale a dire l'equazione del calore) con le condizioni al bordo (11). Siccome è noto che tutte le soluzioni dell'equazione del calore sono di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $(0, +\infty) \times [0, \pi]$, si ottiene subito che lo stesso vale anche per le soluzioni dell'equazione non omogenea.

- Esercizio 6a). Alcuni hanno risolto l'esercizio scrivendo f come serie di $\gamma_n(f)\sin(nx)$ e derivando due volte quest'identità per ottenere la rappresentazione in serie di f'' ed identificarne così i coefficienti. Questa dimostrazione non è corretta perché in generale la serie delle derivate e la serie delle derivate seconde non convergono assolutamente (e neanche puntualmente) e quindi non è possibile scambiare la serie con la derivata.

- Esercizio 6b). Diverse persone hanno calcolato i coefficienti direttamente a partire dalla definizione, senza usare quanto fatto al punto a).

- Esercizio 7c). Per dimostrare la convergenza totale della serie di Fourier di $f * g$ ci si può limitare ad osservare che $f * g$ è di classe $\mathscr{C}^1$, in quanto convoluzione di una funzione $\mathscr{C}^1$ con una funzione continua con norma L^1 finita.

- Esercizio 7d). Dimostrazione alternativa (Roberto Daluiso): supponiamo che g abbia supporto contenuto nell'intervallo $[-k\pi, k\pi]$ con k intero e indichiamo con $S_m f$ la somma parziale da $-m$ a m della serie di Fourier di f; si dimostra che per ogni $x \in \mathbb{R}$
$$f * g(x) - S_m(f * g)(x) = \int_{-k\pi}^{k\pi} \big(f(x-t) - S_m f(x-t)\big) g(t)\, dt$$
e quindi
$$\big|f * g(x) - S_m(f * g)(x)\big| \le \int_{-k\pi}^{k\pi} \big|f(x-t) - S_m f(x-t)\big|\, |g(t)|\, dt \le \|f - S_m f\|_2\, \|g\|_2$$
dove $\|\cdot\|$ indica la norma L^2 sull'intervallo $[-k\pi, k\pi]$. Per concludere basta quindi usare il fatto (a dire il vero non immediato) che le somme parziali $S_m f$ convergono sempre a f nella norma L^2.

- Esercizio 7d). Alcuni hanno ricondotto l'esercizio a dimostrare che $\widehat{g}(y) = O(1/y)$ per $y \to \pm\infty$. In effetti, siccome g ha supporto compatto, allora $\widehat{g}$ è di classe $\mathscr{C}^\infty$ e $D^k\widehat{g}(y)$ tende a 0 per $y \to \pm\infty$ per ogni intero k, ed è quindi plausibile supporre che $\widehat{g}(y) = O(1/y)$. Sfortunatamente così non è, anche se non è facile dare un esempio.

- Esercizio 8. Per questo esercizio sono state proposte svariate soluzioni, di cui diverse sbagliate anche se talvolta molto ingegnose. Un errore relativamente frequente è stato cercare di dimostrare in sostanza che la trasformata di $1/p$ è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$, cosa che però non è vera: la trasformata di $(1+x^2)^{-1}$ è $\pi e^{-|y|}$ e quindi non è neanche $\mathscr{C}^1$.
Un altro errore è stato quello di scomporre $1/p$ come
$$\frac{1}{p(x)} = \sum_j \frac{c_j}{(x-a_j)^2 + b_j^2}$$
dove $a_j \pm ib_j$ sono gli zeri di p e c_j sono opportune costanti. Il fatto è che in generale questa scomposizione non vale, come si vede prendendo $p(x) := (x^2+1)(x^2+2x+2)$.

- Esercizio 8. L'ipotesi che p abbia coefficienti reali non è necessaria. Anche l'ipotesi che p abbia zeri semplici non è necessaria, ma è stata usata nella soluzione data sopra per scrivere in modo esplicito i residui della funzione $e^{-iyz}/p(z)$. In effetti la formula (9) vale senza alcuna ipotesi sulla molteplicità degli zeri di p, ed utilizzando il fatto che
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{-iyz}}{p(z)}; z_j\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} \frac{e^{-iyz}}{p(z)}\, dz$$
dove γ_j è una qualunque circonferenza che racchiude lo zero z_j e nessun altro, si verifica facilmente tramite il teorema di derivazione sotto il segno di integrale che questo residuo dipende in maniera $\mathscr{C}^\infty$ (e in effetti anche analitica) dalla variabile y.

- Esercizio 8. Dimostrazione alternativa (Eleonora Bardelli): detti z_j gli zeri di p, si può scomporre $1/p$ come
$$\frac{1}{p(x)} = \sum_j a_j f_j(x) \quad \text{dove } f_j(x) := \frac{1}{x - z_j}$$
per un opportuna scelta dei numeri complessi a_j. Anche se la funzione f_j ha norma L^1 infinita, è comunque possibile calcolarne la trasformata di Fourier in tutti i punti y diversi da 0 (intesa come integrale improprio su $\mathbb{R}$) usando il metodo dei residui: se $\operatorname{Im} z_j > 0$ si ha
$$\widehat{f}_j(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y > 0, \\ 2\pi i\, e^{-iyz_j} & \text{se } y < 0, \end{cases}$$
ed una formula analoga vale per $\operatorname{Im} z_j < 0$. Dunque la funzione $\widehat{f_j}$ è analitica per $y \neq 0$, e pertanto lo stesso vale per quella di $1/p$.

- Esercizio 8. Dimostrazione alternativa (Denis Nardin): ci si riduce a dimostrare che la funzione
$$g(t) := \widehat{1/p}\,(1/t)$$
è di classe $\mathscr{C}^\infty$ per $t \neq 0$. Tramite un semplice cambio di variabile si ottiene che
$$g(t) = |t| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p(st)} e^{-is}\, ds\ ,$$

e a questo punto la derivabilità di g segue da una variante (affatto ovvia!) del teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Si deve verificare che la funzione integranda $h(s,t) := e^{-is}/p(st)$ è infinitamente derivabile nella variabile t e inoltre, poiché il dominio di integrazione non è compatto, bisogna anche far vedere che per ogni $k = 1, 2, \dots$ è possibile ricoprire l'insieme dei punti $t \neq 0$ con intervalli I tali che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in I} |D_t^k h(s,t)| \, ds < +\infty \ .$$

Quest'ultima proprietà segue dal fatto che la derivata parziale $D_t^k(1/p(st))$ si scrive come $q_k(s,t)\, p(st)^{-k-1}$ dove q_k è un polinomio in s e t il cui grado rispetto a s è inferiore o uguale a k volte il grado di p.

1. a) Poiché $\rho(x) := (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, si ha $\dfrac{\partial\rho}{\partial x_i} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} x_i = \dfrac{x_i}{\rho}$ per ogni i, e quindi

$$d\rho = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n} x_i \, dx_i \ .$$

b) Usando le proprietà dell'operatore d, e in particolare il fatto che $d^2\omega = 0$ e $\omega \wedge \omega = 0$ per ogni forma ω, si ottiene

$$d(f(\rho)\, d\rho) = d(f(\rho)) \wedge d\rho + f(\rho)\, d(d\rho) = f'(\rho)\, d\rho \wedge d\rho = 0 \ .$$

2. a) Sviluppando il quadrato si ottiene che per ogni $A, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2 = f(A) + AH + HA + o(|H|)$$

e da questo segue che

$$df(A) : H \mapsto AH + HA \ .$$

b) In questo caso

$$df(A) : H \mapsto \begin{pmatrix} H_{21} - H_{12} & H_{11} + H_{22} \\ -H_{11} - H_{22} & H_{21} - H_{12} \end{pmatrix} \ .$$

Dunque l'applicazione lineare $df(A)$ ha valori nello spazio V delle matrici 2×2 della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

con $a, b, \in \mathbb{R}$, e si verifica facilmente che è suriettiva. Pertanto il rango di $df(A)$ è uguale alla dimensione di V, cioè 2.

3. Si tratta di un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} & d\big[(xy^2\, dz + xz^2\, dy) \wedge (dx + dy + dz)\big] \\ &\quad = d\big[- xz^2\, dx \wedge dy - xy^2\, dx \wedge dz + x(z^2 - y^2)\, dy \wedge dz\big] \\ &\quad = \ - (z^2 dx + 2xz\, dz) \wedge dx \wedge dy \\ &\qquad - (y^2 dx + 2xy\, dy) \wedge dx \wedge dz \\ &\qquad + ((z^2 - y^2)\, dx - 2xy\, dy + 2xz\, dz) \wedge dy \wedge dz\big] \\ &\quad = (2xy - 2xz + z^2 - y^2)\, dx \wedge dy \wedge dz \ . \end{aligned}$$

4. Il sottospazio V delle matrici simmetriche $n \times n$ ha dimensione $m = \frac{1}{2} n(n+1)$. Tramite una base ortonormale di V (ortonormale rispetto al prodotto scalare in $\mathbb{R}^{n\times n}$ che definisce la norma euclidea) possiamo identificare isometricamente V con $\mathbb{R}^m$, e in questo modo S viene a coincidere con la sfera unitaria di $\mathbb{R}^m$, che è *notoriamente* una superficie compatta senza bordo di dimensione $d = m - 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$ e classe $\mathscr{C}^\infty$.

5. a) Se u è armonica, allora $\Delta u = 0$ per definizione. Se inoltre u^2 è armonica, allora

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(u^2) &= \nabla \cdot (\nabla(u^2)) = \nabla \cdot (2u\, \nabla u) = \\ &= 2\nabla u \cdot \nabla u + 2u\, \nabla \cdot (\nabla u) = 2|\nabla u|^2 + 2u\, \Delta u = 2|\nabla u|^2 \ , \end{aligned}$$

e dunque u ha gradiente nullo su tutto $\mathbb{R}^2$, per cui deve essere costante.

b) La risposta è negativa: identificando il dominio $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, la funzione $u(z) := z$ è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ ed in particolare è armonica (nel senso che entrambe le componenti sono armoniche), e lo stesso vale per u^2.

6. a) È un fatto noto che ogni funzione localmente costante su uno spazio topologico connesso deve essere costante, e quindi basta dimostrare che la funzione f è localmente costante.
Dato $x_0 \in S$, prendiamo U intorno aperto di x_0 tale che esiste $\varphi : A \to S \cap U$ parametrizzazione di classe $\mathscr{C}^1$ con A aperto di $\mathbb{R}^d$. Allora la funzione composta $f \circ \varphi$ soddisfa
$$d(f \circ \varphi)(t) = df(x)\, d\varphi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in A \text{ e } x := \varphi(t),$$
ovvero ha gradiente nullo su tutto A. Ne segue che $f \circ \varphi$ è costante sulla componente connessa A' di A che contiene $t_0 := \varphi^{-1}(x_0)$, e quindi f è costante su $U' := \varphi(A')$, che è un intorno aperto di x_0.
b) Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := v \cdot x$. Dato $x \in S$, si ha allora che $\langle df(x)\,;\, h\rangle = v \cdot h$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, e quindi $\langle df(x)\,;\, h\rangle = 0$ per ogni $h \in \mathrm{Tan}(S; x)$, ovvero il differenziale della restrizione di f a S è nullo in ogni punto. Pertanto, per quanto visto al punto precedente, f è costante su S, il che significa esattamente che S è contenuta in un iperpiano affine perpendicolare a v.

7. a) Che f sia iniettiva segue direttamente dal fatto la funzione $s \mapsto s + s^3$ è iniettiva su tutto $\mathbb{R}$ (è strettamente crescente). Inoltre
$$\nabla\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1+3t_1^2 & 0 \\ 0 & 1+3t_2^2 \\ 1+t_2 & 1+t_1 \end{pmatrix} ,$$
e siccome il minore 2×2 dato dalle prime due righe ha determinante sempre strettamente positivo, la matrice $\nabla\varphi(t)$ ha rango 2 in ogni punto.
b) il pull-back di ω secondo φ è
$$\begin{aligned} \varphi^\# \omega &:= (d\varphi_1 - d\varphi_2) \wedge d\varphi_3 \\ &= (d(t_1 + t_1^3) - d(t_2 + t_2^3)) \wedge d(1 + t_1 + t_2 + t_1 t_2) \\ &= ((1+3t_1^2)\, dt_1 - (1+3t_2^2)\, dt_2) \wedge ((1+t_2)\, dt_1 + (1+t_1)\, dt_2) \\ &= ((1+3t_1^2)(1+t_1) + (1+3t_2^2)(1+t_2))\, dt_1 \wedge dt_2 \\ &= (2 + 3(t_1^2+t_2^2) + t_1(1+t_1^2) + t_2(1+t_2^2))\, dt_1 \wedge dt_2 \end{aligned}$$
e quindi
$$\int_S \omega = \int_D \varphi^\# \omega = \int_D 2 + 3(t_1^2+t_2^2) + t_1(1+t_1^2) + t_2(1+t_2^2)\, dt_1\, dt_2 \ .$$
Si osservi ora che il terzo addendo nell'ultimo integrale è una funzione dispari rispetto alla variabile t_1, e pertanto ha integrale nullo sul disco D (lo si vede integrandola prima rispetto a t_1 e poi rispetto a t_2). Lo stesso vale analogamente per il quarto addendo, e quindi
$$\int_S \omega = \int_D 2 + 3|t|^2\, dt_1\, dt_2 = \int_0^1 (2 + 3\rho^2)\, 2\pi\rho\, d\rho = \frac{7}{2}\pi \ .$$

8. Indichiamo con c_n i coefficienti di Fourier (complessi) di f. Siccome f ha media nulla, $c_0 = 0$. Inoltre f è una funzione a valori reali e quindi, come visto a lezione,
$$f(\theta) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, e^{in\theta}\right) .$$

Quindi

$$u_k(e^{i\theta}) = f(k\theta) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, e^{ink\theta}\right) \quad \text{per ogni } \theta \in [0, 2\pi],$$

e, sempre per quanto visto a lezione,

$$u_k(x) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, x^{nk}\right) \quad \text{per ogni } x \in D$$

(per x^m si intende la potenza m-esima di x come numero complesso). Pertanto, essendo $|x|^{kn} \leq |x|^k$ per ogni $k, n \geq 1$ ed ogni $x \in D$,

$$|u_k(x)| \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|\,|x|^{nk} \leq c\,|x|^k \quad \text{con } c := 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \ .$$

COMMENTI

- Esercizio 1. Soluzione alternativa. Si osservi che, detta F una primitiva di f, la 1-forma $f(\rho)\,d\rho$ è il differenziale di $F(\rho)$ e quindi deve avere differenziale nullo (perché $d^2\omega = 0$ per ogni forma ω di classe $\mathscr{C}^2$).
- Esercizio 1. Soluzione alternativa. Si osservi che, indicando con y la variabile in $\mathbb{R}$, $f(\rho)\,d\rho$ è il pull-back secondo ρ della 1-forma su $\mathbb{R}$ data da $f(y)\,dy$, e quindi

$$d(f(\rho)\,d\rho) = d(\rho^{\#}(f(y)\,dy)) = \rho^{\#}(d(f(y)\,dy)) = \rho^{\#}(f'(y)\,dy \wedge dy) = \rho^{\#}0 = 0 \ .$$

- Esercizio 4. Nella soluzione data sopra si è usato implicitamente il fatto che se S è un sottoinsieme di un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, ed esiste un isomorfismo lineare di V in $\mathbb{R}^m$ che porta S in una superficie di dimensione d in $\mathbb{R}^m$, allora S è una superficie di dimensione d in $\mathbb{R}^n$. Questo fatto lo si verifica facilmente usando le caratterizzazione delle superfici in termini di parametrizzazioni (o anche di equazioni).
- Esercizio 4. Soluzione alternativa. Detto $\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{anti}}$ lo spazio delle matrici antisimmetriche $n\times n$, identificato con $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, consideriamo la mappa $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{anti}} \times \mathbb{R}$ definita da

$$f : A \mapsto (A - A^t, |A|^2 - 1) \ .$$

Per definizione $S = f^{-1}(0,0)$, e quindi ci basta dimostrare che $df(A)$ ha rango massimo per ogni $A \in S$ (la mappa f è polinomiale e quindi regolare quanto si vuole). Detto $\langle\,;\,\rangle$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^{n\times n}$ che definisce la norma euclidea, si ha che

$$df(A) : H \mapsto (H - H^t, 2\langle A\,;\,H\rangle) \ ,$$

e per dimostrare che questa applicazione ha rango massimo ci basta far vedere che il suo nucleo ha dimensione $d = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$. Ma il nucleo di $df(A)$ consiste delle matrici simmetriche ortogonali alla matrice simmetrica A, e siccome il prodotto scalare $\langle\,;\,\rangle$ non è degenere, si tratta di un sottospazio di codimensione 1 dello spazio delle matrici simmetriche, e quindi ha dimensione $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$, che è uguale a d.

- Esercizio 7b). Soluzione alternativa. Si può scrivere $\int_S \omega$ direttamente a partire dalla definizione e quindi senza usare la nozione di pull-back:

$$\begin{aligned}\int_S \omega &= \int_S dx_1 \wedge d_x 3 - dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \int_D \det \begin{pmatrix} 1+3t_1^2 & 0 \\ 1+t_2 & 1+t_1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1+3t_2^2 \\ 1+t_2 & 1+t_1 \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \\ &= \int_D (1+3t_1^2)(1+t_1) + (1+3t_2^2)(1+t_2)\, dt_1\, dt_2 \ .\end{aligned}$$

- Esercizio 7b). Soluzione alternativa. La forma ω, essendo costante, è anche esatta, e per la precisione è il differenziale di $(x_1 - x_2)\, dx_3$. Applicando il teorema di Stokes ed il fatto che il bordo di S è parametrizzato con la giusta orientazione da

$$\theta \mapsto \varphi(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta + \cos^3\theta, \sin\theta + \sin^3\theta, 1 + \cos\theta + \sin\theta + \cos\theta\sin\theta)$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$, otteniamo

$$\begin{aligned}\int_S \omega &= \int_{\partial S} (x_1 - x_2)\, dx_3 \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \cos^3\theta - \sin\theta + \sin^3\theta)(1 + \cos\theta + \sin\theta + \cos\theta\sin\theta)'\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{2}\sin(2\theta) + \frac{1}{4}\cos(4\theta)\right)(1 + \cos\theta + \sin\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{7}{4} d\theta = \frac{7}{2}\pi\end{aligned}$$

(la penultima uguaglianza segue dall'ortogonalità del sistema trigonometrico).

- Esercizio 8. Soluzione alternativa. Sappiamo che la funzione u_1 esiste, è continua sulla chiusura di D, differenziabile in 0, e nulla in 0 (il valore in zero coincide con la media dei valori su ∂D per via della proprietà della media). A partire da questo si verifica facilmente che esiste una costante c tale che $|u_1(x)| \le c|x|$ per ogni $x \in D$. Per concludere la dimostrazione basta osservare che $u_1(x^k)$ coincide con $u_k(x)$ su ∂D ed è armonica su D (si verifica facilmente che la composizione di una funzione armonica con una olomorfa è armonica) e quindi $u_1(x^k)$ coincide con $u_k(x)$ su tutto D per via dell'unicità delle funzioni armoniche con dato al bordo assegnato. Dunque $|u_k(x)| = |u_1(x^k)| \le c|x|^k$.

1. Osserviamo innanzitutto che

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\sin(nx)\,dx = 0$$

per $n = 1, 2, \dots$ perché la funzione g è pari, mentre

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\cos(nx)\,dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\,\cos(nx)\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{(in-1)x}\,dx\right) = \frac{2(1-(-1)^n e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} := a_n\ .\end{aligned}$$

Quindi le serie di Fourier reali e complesse di g sono

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,\cos(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_{|n|}}{2}\,e^{inx}\ .$$

2. a) $d\omega = -2x_1^2(x_3+x_4)\,dx_{234} + 2x_2^2(x_3+x_4)\,dx_{134} + 2x_3^2(x_1+x_2)\,dx_{124} - 2x_4^2(x_1+x_2)\,dx_{123}$.
b) $f^{\#}\omega = (t_2^2\,dt_1 - t_1^2\,dt_2)\wedge(t_2^4\,dt_1^2 - t_1^4\,dt_2^2) = 2t_1^3t_2^3(t_2-t_1)\,dt_1\wedge dt_2$.

3. Partendo dalla definizione di prodotto di convoluzione, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\big|f*g(x_1) - f*g(x_2)\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}}\big(f(x_1-y)-f(x_2-y)\big)\,g(y)\,dy\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}}\big|f(x_1-y)-f(x_2-y)\big|\,|g(y)|\,dy\\ &\le \int_{\mathbb{R}}\mathrm{Lip}(f)\,|x_1-x_2|\,|g(y)|\,dy = \mathrm{Lip}(f)\cdot\|g\|_1\cdot|x_1-x_2|\ .\end{aligned}$$

4. Per ogni $u, v \in X$ si ha

$$\langle -\Delta u\,;\,v\rangle = \int_A -\Delta u\,v = -\int_{\partial A} v\,\nabla u\cdot\eta + \int_A \nabla u\cdot\nabla v = \int_A \nabla u\cdot\nabla v \tag{1}$$

(η indica la normale esterna a ∂A, la seconda uguaglianza la si ottiene applicando il teorema della divergenza al campo di vettori $v\,\nabla u$, ed utilizzando il fatto che

$$\nabla\cdot(v\,\nabla u) = \nabla v\cdot\nabla u + v\,\Delta u\ ,$$

la terza uguaglianza segue dal fatto che $v = 0$ su ∂A).
Applicando due volte la (1) otteniamo che per ogni $u, v \in X$

$$\langle -\Delta u\,;\,v\rangle = \int_A \nabla u\cdot\nabla v = \langle u\,;\,-\Delta v\rangle\ ,$$

e dunque $-\Delta$ è autoaggiunto. Inoltre applicando la (1) con $v := u$ si ottiene

$$\langle -\Delta u\,;\,u\rangle = \int_A |\nabla u|^2 \ge 0\ ,$$

e chiaramente vale l'uguaglianza solo se u ha gradiente nullo su A, che, insieme al fatto che $A = 0$ su ∂A, implica che $u = 0$ su A. Dunque $-\Delta$ è un operatore definito positivo.

5. Per il teorema di Weierstrass esiste una successione di polinomi p_n che converge uniformemente a f sull'intervallo $[0,1]$, e quindi

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\,p_n(x)\,dx\ .$$

D'altra parte segue immediatamente dall'ipotesi che

$$\int_0^1 f(x)\,p(x)\,dx = 0$$

per ogni polinomio p, e quindi concludiamo che f^2 ha integrale nullo su $[0,1]$. Pertanto f è identicamente nulla.

6. a) Calcoliamo i coefficienti di Fourier di $f * g$:

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(y-x)\,dy\right)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(y-x)\,e^{-in(x-y)}\,dx\right)f(y)\,e^{-iny}\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi-y}^{\pi-y} g(t)\,e^{-int}\,dt\right)f(y)\,e^{-iny}\,dy = 2\pi\,c_n(g)\,c_n(f) \end{aligned}$$

(nella terza uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $t = x - y$, nella quarta il fatto che l'integrale di una funzione 2π-periodica su ogni intervallo di lunghezza 2π è lo stesso, per cui l'integrale tra parentesi tonde nella terza riga coincide con $2\pi\,c_n(g)$).

b) Procedendo in maniera analoga al punto precedente

$$\begin{aligned} \|f*g\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,g(y-x)\,dy\right|dx \\ &\le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\,|g(y-x)|\,dx\,dy = \|g\|_1\,\|f\|_1\ . \end{aligned}$$

c) Per cominciare, troviamo la soluzione del problema $(*)$ in modo formale: scriviamo quindi u come serie di Fourier rispetto alla variabile x, vale a dire

$$u(x,t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n(t)\,e^{inx}$$

con $y_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$. Posto allora $a_n := c_n(g)$ e $b_n := c_n(u_0)$, per quanto visto al punto precedente l'equazione $u_t = u * g - u$ diventa

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot y_n\,e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2\pi\,a_n - 1)\,y_n\,e^{inx}$$

ovvero

$$\dot y_n = (2\pi\,a_n - 1)\,y_n \quad \text{per ogni } n\in\mathbb{Z}.$$

Inoltre la condizione iniziale $u(0,x) = u_0(x)$ implica $y_n(0) = b_n$. Pertanto

$$y_n(t) = b_n e^{(2\pi\,a_n - 1)t}\ ,$$

e quindi

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{(2\pi\, a_n - 1)t + inx} \ . \tag{2}$$

Volendo procedere ad una dimostrazione rigorosa, dobbiamo verificare che la funzione u data dalla formula (2) è ben definita per ogni $t, x \in \mathbb{R}$, continua, 2π-periodica nella variabile x, derivabile con derivata continua nella variabile t, e risolve effettivamente $(*)$.
Osserviamo che la successione a_n è limitata e quindi le funzioni $e^{(2\pi\, a_n - 1)t + inx}$ sono equi-limitate su $I \times \mathbb{R}$ per ogni intervallo limitato I; inoltre la successione b_n è assolutamente sommabile perché u_0 è di classe $\mathscr{C}^1$ e quindi la serie di funzioni in (2) converge totalmente su $I \times \mathbb{R}$ per ogni I limitato. Pertanto la funzione u è ben definita per ogni $t, x \in \mathbb{R}$ e continua. Analogamente si verifica che anche la serie delle derivate parziali rispetto a t degli addendi in (2) converge totalmente su $I \times \mathbb{R}$ per ogni I limitato, e quindi u è derivabile in t con derivata continua.
Che u sia 2π-periodica in x è evidente, come pure è evidente che, avendo gli stessi coefficienti di Fourier ed appartenendo a X, le funzioni $u(0,\cdot)$ e u_0 coincidono. Per la stessa ragione anche le funzioni $u(t,\cdot)$ e $u * g(t,\cdot) - u(t,\cdot)$ coincidono per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi la funzione u è realmente una soluzione di $(*)$.

7. a) Che la mappa f sia iniettiva segue dal fatto che ammette un'inversa (sinistra): infatti $f(z) = (w_1, w_2)$ implica che $z = w_2/w_1$ se $w_1 \neq 0$, e $z = 0$ se $w_1 = 0$. È inoltre evidente che f è propria, cioè che $|f(z)|$ tende a $+\infty$ quando $|z| \to +\infty$.
Per calcolare il gradiente di f ricordiamo che se g è una funzione olomorfa allora il gradiente di g, vista come mappa da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, è dato da

$$\nabla g(z) := [g'(z)]$$

dove si è posto

$$[w] := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } w = a + bi \in \mathbb{C}.$$

Pertanto $\nabla f(z)$ è la matrice 4×2 data da

$$\nabla f(z) = \begin{pmatrix} [2z] \\ [3z^2] \end{pmatrix} \ , \tag{3}$$

e siccome il minore $[2z]$ ha determinante $4|z|^2$ che è diverso da zero per $z \neq 0$, la matrice $\nabla f(z)$ ha rango massimo (cioè 2) per $z \neq 0$.
b) La formula (3) può essere riscritta come

$$\nabla f(z) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \\ a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } a_1 + ib_1 := 2z \text{ e } a_2 + ib_2 := 3z^2,$$

e quindi il quadrato del determinante Jacobiano di f è

$$\begin{aligned}
(Jf(z))^2 &= \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ -b_1 & a_1 & -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \\ a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \det \begin{pmatrix} a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 & 0 \\ 0 & a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \end{pmatrix} \\
&= (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)^2 = (|a_1 + ib_1|^2 + |a_2 + ib_2|^2)^2 = (4|z|^2 + 9|z|^4)^2
\end{aligned}$$

e quindi $Jf(z) = 4|z|^2 + 9|z|^4$.

c) Osserviamo che f non è una parametrizzazione regolare dell'insieme $S := f(\mathbb{C})$ perché ha gradiente nullo in 0, e dimostriamo che in effetti S non è una superficie di classe $\mathscr{C}^1$.

Supponendo per assurdo che lo sia, cominciamo col far vedere che il piano tangente a S nel punto $p = (0,0)$ deve essere il piano $\mathbb{C} \times \{0\}$: dato infatti $w \in \mathbb{C}$, il cammino $\gamma(t) := f(wt^{1/2}) = (w^2 t, w^3 t^{3/2})$ con $t \in [0, +\infty)$ è contenuto in S ed ha derivata in 0 pari a $(w^2, 0)$, e quindi $(w^2, 0)$ appartiene a $\mathrm{Tan}(S, p)$. Siccome questo è vero per ogni $w \in \mathbb{C}$, abbiamo che $\mathbb{C} \times \{0\}$ è contenuto nel piano $\mathrm{Tan}(S, p)$, e quindi con questo deve coincidere.

Ma se $\mathrm{Tan}(S, p) = \mathbb{C} \times \{0\}$, allora deve esistere un intorno U di p tale che per i punti di $S \cap U$ è possibile esplicitare le ultime due variabili reali in funzione delle prime due, cioè è possibile parametrizzarli come $(w, g(w))$ con g funzione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. Ma questo è chiaramente impossibile perché $S \cap U$ contiene sia (t^2, t^3) che $(t^2, -t^3)$ per ogni t reale sufficientemente piccolo.

8. a) Se A è diagonale ed indichiamo con $a_k := A_{kk}$ gli elementi della diagonale, allora

$$f(x) = \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 \Big) = \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2} a_k x_k^2} \ .$$

Quindi, indicando con $\mathscr{F}$ la trasformata di Fourier in dimensione 1 ed utilizzando la nota formula per la trasformata della Gaussiana (sempre in dimensione 1),

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-iy\cdot x}\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n e^{-\frac{1}{2} a_k x_k^2} e^{-iy_k x_k}\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} a_k x_k^2} e^{-iy_k x_k}\, dx_k \\
&= \prod_{k=1}^n \big[\mathscr{F}\big(e^{-\frac{1}{2} a_k x_k^2} \big) \big](y_k) \\
&= \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{2\pi}{a_k}}\, e^{-\frac{1}{2a_k} y_k^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\prod a_k}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} x_k^2 \Big) \ ,
\end{aligned}$$

e quindi

$$\widehat{f}(y) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\Big(-\frac{1}{2} \langle A^{-1} y \,;\, y \rangle \Big) \ .$$

b) Siccome A è simmetrica e definita positiva, possiamo scriverla come $A = M^t D M$ con D matrice diagonale definita positiva e $M \in SO(n)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2} \langle Ax \,;\, x \rangle \Big)\, e^{-iy\cdot x}\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2} \langle DMx \,;\, Mx \rangle \Big)\, e^{-i(My)\cdot(Mx)}\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2} \langle Dt \,;\, t \rangle \Big)\, e^{-i(My)\cdot t}\, dt_1 \dots dt_n
\end{aligned}$$

(nella terza uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $t = Mx$). Siccome l'ultimo integrale corrisponde al valore in My della trasformata di Fourier della funzione f associata alla matrice diagonale D, per quanto visto al punto precedente

$$\begin{aligned}\widehat{f}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle Dt\,;\,t\rangle\Big)\, e^{-i(My)\cdot t}\, dt_1\dots dt_n \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det D}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle D^{-1}My\,;\,My\rangle\Big) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\langle A^{-1}y\,;\,y\rangle\Big)\,.\end{aligned}$$

COMMENTI

- Esercizio 1. Tra coloro che hanno svolto questo esercizio sembra esserci una certa confusione su quale sia la relazione che lega i coefficienti di Fourier complessi a quelli reali.
- Esercizio 6c). Rifinendo quanto detto sopra, si può anche dimostrare che quella trovata è l'unica soluzione del problema $(*)$ nella classe delle funzioni continue su $\mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$ e derivabili rispetto alla variabile t con derivata continua. Questo mostra che questa e non quella delle funzioni $\mathscr{C}^1$ è la classe naturale in cui risolvere il problema $(*)$ (che infatti nella sua formulazione non coinvolge la derivata di u rispetto a x).
- Esercizio 7a). Sorprendentemente, quasi tutti i presenti hanno dato dimostrazioni relativamente complicate dell'iniettività della mappa f.
- Esercizio 7c). Riguardo a questa domanda, sottolineo che, a differenza di quello che molti hanno scritto, non basta verificare che f non è una parametrizzazione regolare per ottenere che S non è una superficie (la mappa $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ data da $f: t\mapsto(t^3,0)$ non è una parametrizzazione, ma la sua immagine è una retta, ovvero una superficie senza bordo di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$).
- Esercizio 7c). È stata proposta la seguente dimostrazione del fatto che S non è una superficie: ogni cammino che parte dal punto $p:=(0,0)$ ed è contenuto in S si può scrivere come $f\circ\gamma$ con $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$, e calcolandone la derivata in 0 si ottiene 0 (perché $\nabla f(x_0)=0$). Pertanto lo spazio tangente ad S in p conterrebbe solo il vettore nullo, e questo è assurdo. Questa dimostrazione è sbagliata, ma è interessante cercare di capire perché.

1. Osserviamo innanzitutto che $\|fg\|_1 \le \|f\|\,\|g\|_1 < +\infty$, e quindi la trasformata di Fourier di fg è ben definita. Detti c_n i coefficienti di Fourier (complessi) di f, sappiamo che $f(x)$ coincide con la serie di $c_n\,e^{inx}$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{aligned}\widehat{fg}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-ixy}\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,g(x)\,e^{inx-ixy}\,dx\\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n\,g(x)\,e^{-i(y-n)x}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\widehat{g}(y-n)\ .\end{aligned}$$

Nel terzo passaggio abbiamo scambiato l'integrale con la serie, e questo è giustificato dal fatto che l'integrale della serie dei valori assoluti degli addendi è finito: infatti, detta C la serie dei $|c_n|$ (che sappiamo essere finita, perché f è di classe $\mathscr{C}^1$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_n\,g(x)\,e^{inx-ixy}\right|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C\,|g(x)|\,dx = C\,\|g\|_1 < +\infty\ .$$

2. Usiamo i seguenti fatti noti: la trasformata di Fourier $e^{-|x|}$ è $2/(1+y^2)$ e la serie di Fourier di $\cos(x)$ è $\frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix}$. Usando l'esercizio precedente si ottiene quindi

$$\widehat{h}(y) = \frac{1}{1+(y-1)^2} + \frac{1}{1+(y+1)^2} = \frac{4+2y^2}{4+y^4}\ .$$

3. a) Basta utilizzare la seguente formula, dimostrata a lezione: data due applicazione multilineari alternanti φ_1 e φ_2 di ordine k_1 e k_2, si ha che $\varphi_2 \wedge \varphi_1 = (-1)^{k_1k_2}\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Prendendo quindi φ_1 e φ_2 uguali a φ si ottiene $\varphi \wedge \varphi = (-1)^{k^2}\varphi \wedge \varphi = -\varphi \wedge \varphi$, e dunque $\varphi \wedge \varphi = 0$.
b) Se k è pari non è detto che $\varphi \wedge \varphi = 0$, si consideri per esempio $\varphi := dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.

4. a) Una primitiva di $\omega = g\,dx_1 \wedge dx_2$ è $\varphi := G\,dx_2$ dove G è una primitiva di g rispetto alla variabile x_1.
b) Essendo $\partial S = \varnothing$, il teorema di Stokes ci dà $\displaystyle\int_S \omega = \int_S d\varphi = \int_{\partial S} \varphi = 0$.

5. Usiamo il fatto che le funzioni $\{\sin(nx) : n = 1, 2, \dots\}$ formano un sistema ortonormale massimale nello spazio X delle funzioni reali continue su $[0, \pi]$ e nulle agli estremi. Data u soluzione del problema, indichiamo con $\gamma_n(t)$ i coefficienti della funzione $u(t,\cdot)$ rispetto a detto sistema ortonormale, vale a dire

$$\gamma_n(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t,x)\,\sin(nx)\,dx\ ,$$

e con $\beta_n(t)$ i coefficienti di $b(t,\cdot)$. Dato $n = 1, 2, \dots$, prendiamo il prodotto scalare di entrambi i termini dell'equazione $u_{tt} = u_{xx} + au + b(t,x)$ per $\sin(nx)$: tramite passaggi noti otteniamo che la funzione γ_n è di classe $\mathscr{C}^2$ su $[0,T]$ e soddisfa l'equazione differenziale lineare (non omogenea)

$$\ddot{\gamma}_n = (a-n^2)\gamma_n + \beta_n\ ,$$

mentre le condizioni iniziali danno che $\gamma_n(0) = \dot{\gamma}_n(0) = 0$. Quindi ogni γ_n è univocamente determinata per via del teorema di unicità per le equazioni differenziali ordinarie.

Poiché inoltre una funzione in X è univocamente determinata dai suoi coefficienti, anche u è univocamente determinata (per ogni t).

6. a) Scriviamo S come controimmagine di $(1,1,1)$ secondo la mappa $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ data da
$$f(x_1, x_2) := (|x_1|^2, |x_2|^2, |x_1 - x_2|^2) \ .$$
Siccome f è di classe $\mathscr{C}^\infty$, ci basta far vedere che il suo gradiente ha rango massimo in tutti i punti di S. In effetti
$$\nabla f(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ x_1 - x_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$
(in questa formula x_1 e x_2 sono intesi come vettori riga) e supponendo per assurdo che questa matrice abbia rango inferiore a tre, ovvero che una delle righe si scriva come combinazione lineare delle altre due, si arriva alla conclusione che x_1 e x_2 sono linearmente dipendenti. Ma due vettori linearmente dipendenti di norma 1 sono uguali oppure sono uno l'opposto dell'altro, cioè $x_2 = \pm x_1$, e dunque $|x_1 - x_2|$ dovrebbe essere uguale a 0 oppure a 2, cosa che non è.
b) Siccome i tre vettori riga della matrice $\nabla f(x_1, x_2)$ sono linearmente indipendenti, definiscono un'orientazione dello spazio normale a S in (x_1, x_2), e chiaramente questa orientazione è continua. Questo ci dice che S è orientabile: è stato infatti visto a lezione che scegliere un'orientazione continua dello spazio tangente ad una superficie è equivalente a scegliere un'orientazione continua dello spazio normale.

7. a) Detta $\|h\|$ la norma del sup di h si ha che
$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \big|h(x_2 - x_1)\, f_1(x_1)\, f_2(x_2)\big|\, dx_1\, dx_2 \\ &\qquad \le \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \|h\|\, |f_1(x_1)|\, |f_2(x_2)|\, dx_1\, dx_2 \le \|h\|\, \|f_1\|_1\, \|f_2\|_1 < +\infty \ , \end{aligned}$$
e dunque l'integrale che definisce $Q(f_1, f_2)$ è ben definito e appartiene ad $\mathbb{R}$.
b) Per quanto visto nella dimostrazione del punto precedente, possiamo applicare il teorema di Fubini all'integrale che definisce $Q(f_1, f_2)$, e ricordando la definizione di prodotto di convoluzione otteniamo
$$\begin{aligned} Q(f_1; f_2) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} h(x_2 - x_1)\, f_1(x_1)\, dx_1 \right) \cdot f_2(x_2)\, dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} h * f_1(x_2) \cdot f_2(x_2)\, dx_2 = \langle h * f_1 \, ; \, f_2 \rangle \end{aligned}$$
e dunque $Q(f_1; f_2) = \langle Tf_1 \, ; \, f_2 \rangle$ dove si è posto $Tf := h * f$ per ogni $f \in X$. In maniera analoga, usando il fatto che h è una funzione pari, si ottiene anche che $Q(f_1; f_2) = \langle f_1 \, ; \, Tf_2 \rangle$, e questo dimostra che T è autoaggiunta.
c) Utilizzando l'identità di Parseval e fatti noti sulla trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione otteniamo che
$$Q(f; f) = \langle h * f \, ; \, f \rangle = \sqrt{2\pi}\, \langle \widehat{h * f} \, ; \, \widehat{f} \, \rangle = \sqrt{2\pi}\, \langle \widehat{h}\, \widehat{f} \, ; \, \widehat{f} \, \rangle = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}\, \big|\widehat{f}\,\big|^2\, dy \ ,$$
e quindi
$$Q(f; f) = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}\, \big|\widehat{f}\,\big|^2\, dy \ . \tag{1}$$

Ma per quanto visto nell'esercizio 2 la trasformata di Fourier di h è una funzione strettamente positiva, e quindi l'integrale in (1) risulta essere sempre maggiore o uguale a zero, e vale zero solo se la funzione $\widehat{f}$ è identicamente nulla, il che implica che pure f è nulla.

Ad essere precisi, l'uguaglianza (1) è stata dimostrata solo nell'ipotesi in cui vale l'identità di Parseval, vale a dire che la norma L^2 di f sia finita (da questo segue che anche quella di $h*f$ è finita). Tuttavia si può poi estendere la (1) a tutte le funzioni $f \in X$ per approssimazione.

d) L'applicazione lineare T non ha autovettori: applicando infatti la trasformata di Fourier all'equazione $Tf - \lambda f = 0$ otteniamo $(\widehat{h} - \lambda)\widehat{f} = 0$; quindi il supporto di $\widehat{f}$ è contenuto nel luogo di zeri di $\widehat{h} - \lambda$, e siccome quest'insieme è discreto per ogni λ e la trasformata di f è continua, quest'ultima deve essere identicamente nulla, e lo stesso vale per f.

8. a) Indichiamo con c_n i coefficienti di Fourier (complessi) della funzione f definita da $f(\theta) := u(e^{i\theta})$. Un semplice calcolo mostra che

$$|c_n| \le \|f\|_{\partial D} \quad \text{per ogni } n. \tag{2}$$

Abbiamo inoltre visto a lezione che per ogni $x \in D$ si ha

$$u(x) := c_0 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n\right)$$

dove la potenza x^n è intesa nel senso dei numeri complessi. Inoltre la serie ha raggio di convergenza maggiore o uguale a 1 e quindi risulta derivabile in senso complesso all'interno di D. Pertanto $\nabla u(x) = 2(\mathrm{Re}\, g(x), -\mathrm{Im}\, g(x))$ con

$$g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1} \ ,$$

e, tenuto conto della (2), per ogni $x \in D'$ si ha

$$|\nabla u(x)| = 2|g(x)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} n|c_n| 2^{2-n} \le \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{2-n}\right) \|f\|_{\partial D} \ ,$$

e quindi

$$\|\nabla u\|_{D'} \le C\|f\|_{\partial D} \quad \text{dove} \quad C := \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{2-n} \ .$$

b) Per ogni $x \in K$ posso trovare un disco chiuso D centrato in x e contenuto in A, e tramite riscalamenti e traslazioni, possiamo applicare quanto fatto nel punto precedente a D ottenendo così che le funzioni u_n hanno gradienti equilimitati su D. Essendo D convesso, ne segue che le funzioni u_n sono equi-Lipschitziane su D, ed in particolare sono equicontinue. Pertanto, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione di u_n (dipendente da D) che converge uniformemente su D.

Per concludere la dimostrazione basta osservare che, essendo compatto, K può essere ricoperto con un numero finito di (parti interne di) questi dischi D. Tramite il solito procedimento diagonale possiamo quindi trovare una sottosuccessione di u_n che converge uniformemente su tutti i dischi del ricoprimento, e quindi anche su K.

Commenti

- Esercizio 2. È anche possibile calcolare la trasformata di Fourier di $e^{-|x|}\cos x$ a partire da quella di $e^{-|x|}$ usando la nota formula per per cui la trasformata di $e^{iax}f(x)$ è $\widehat{f}(y-a)$.
- Esercizio 4b). Molti hanno applicato il teorema di Stokes in modo differente, utilizzando cioè il fatto, tutt'altro che ovvio e solo citato a lezione, che ogni superficie compatta S senza bordo (orientata) in $\mathbb{R}^3$ è il bordo di un compatto regolare A, per cui
$$\int_S \omega = \int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A 0 = 0 \ .$$
- Esercizio 6b). Al contrario di quanto affermato da molti, non è vero che ogni superficie compatta senza bordo in $\mathbb{R}^n$ sia orientabile (è vero solo per quelle di dimensione $n-1$, e comunque non si tratta di un fatto né ovvio né dimostrato a lezione).
- Esercizio 8a) Arrivati al momento di stimare il modulo di $g(x)$, molti hanno optato per la maggiorazione
$$\Big|\sum_n nc_n x^{n-1}\Big| \leq \frac{1}{2}\sum_n n|c_n| \ ,$$
che è certamente corretta, ma sfortunatamente inutile.
- Esercizio 8b). Si può in effetti dimostrare un risultato leggermente più forte, vale a dire che esiste una sottosuccessione di u_n che converge uniformemente su ogni compatto K contenuto in A.

1. Basta usare i seguenti fatti noti: se f è di classe $\mathscr{C}^k$ con $k = 1, 2, \dots$ allora $|c_n| = O(|n|^{-k})$, e viceversa se $|c_n| = O(|n|^{-k})$ allora f è di classe $\mathscr{C}^{k-2}$.

2. Dimostriamo direttamente il punto b). Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, indichiamo con $B(x,r)$ la palla di centro x e raggio r; detto allora ω_n il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$, per la proprietà della media si ha che
$$\begin{aligned} |u(x)| &\le \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} |u| \le \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u| \cdot 1_{B(x,r)} \\ &\le \frac{1}{\omega_n r^n} \|u\|_p \|1_{B(x,r)}\|_q = \frac{\|u\|_p}{(\omega_n r^n)^{1/p}} \end{aligned}$$
(nel terzo passaggio abbiamo applicato la disuguaglianza di Hölder), e passando al limite per $r \to +\infty$ in questa disuguaglianza si ottiene $u(x) = 0$.

3. Date $u, v \in X$, si ha che
$$\begin{aligned} \langle Su\,;\, v\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x)\,v(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(-x)\,v(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x)\,v(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u(x')\,v(-x')\,dx' = \langle u\,;\, Sv\rangle \end{aligned}$$
(nel secondo passaggio abbiamo applicato il cambio di variabile $x' = -x$ al secondo integrale), e quindi S è autoaggiunto.
Inoltre, ricordando che l'aggiunta di D è $-D$, si ha che l'aggiunta di SD è $(SD)^* = D^*S^* = -DS$ e quindi
$$(SD)^*u = \frac{\dot u(-x) - \dot u(x)}{2} \qquad \text{per ogni } u \in Y.$$

4. a) Scomponendo f come prodotto di due applicazioni lineari ($\mathrm{tr}(A)$ e A) si ottiene
$$df(A) : H \mapsto \mathrm{tr}(A)\,H + \mathrm{tr}(H)\,A\ . \tag{1}$$
Risolviamo direttamente il punto c). Dalla formula (1) segue che se $\mathrm{tr}(A) = 0$ allora l'immagine di $df(A)$ è lo spazio generato dalla matrice A, e quindi $\mathrm{rk}(df(A)) = 0$ se $A = 0$ e $\mathrm{rk}(df(A)) = 1$ se $A \ne 0$.
Dimostriamo infine che per tutte le matrici diagonali A con $\mathrm{tr}(A) \ne 0$ il differenziale $df(A)$ ha rango massimo (cioè 4), ovvero ha nucleo banale. Posto infatti
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a := \mathrm{tr}(A) = a_1 + a_2\ ,$$
si ha che
$$df(A) : H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (a+a_1)h_{11} + a_1 h_{22} & a h_{12} \\ a h_{21} & a_2 h_{11} + (a+a_2)h_{22} \end{pmatrix}\ .$$
Quindi l'equazione $\langle df(A)\,;\, H\rangle = 0$ si riduce a $h_{12} = h_{21} = 0$ e al sistema
$$\begin{cases} (a+a_1)h_{11} + a_1 h_{22} = 0 \\ a_2 h_{11} + (a+a_2)h_{22} = 0 \end{cases},$$
e siccome la matrice associata a tale sistema ha determinante uguale a $2a^2 \ne 0$, l'unica soluzione è $h_{11} = h_{22} = 0$, e quindi $H = 0$.

5. a) Indichiamo con ∇ il gradiente rispetto alla variabile spaziale x. Usando il fatto che $u_t = \Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ ed il teorema della divergenza otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_A u\,dx = \int_A u_t = \int_A \nabla\cdot(\nabla u) = \int_{\partial A} \nabla u \cdot \nu = \int_{\mathbf{A}} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ .$$

b) Analogamente, usando l'identità $\nabla\cdot(u\,\nabla u) = u\,\Delta u + |\nabla u|^2 \geq u\,\Delta u$,

$$\frac{d}{dt}\int_A \frac{u^2}{2}\,dx = \int_A u\,u_t = \int_A u\,\Delta u \leq \int_A \nabla\cdot(u\,\nabla u) \leq \int_{\partial A} u\,\nabla u\cdot\nu = 0 \ .$$

6. Come al solito, procediamo prima in modo formale scrivendo l'incognita u in termini di un sistema ortonormale di funzioni (della variabile x) i cui elementi soddisfano le condizioni al bordo del problema, vale a dire $\{\sin(nx) \ : \ n = 1, 2, \ldots\}$:

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\,\sin(nx) \ .$$

Fatto questo, l'equazione $u_t = 2u + u_{xx}$ si riduce a

$$\dot\gamma_n = (2-n^2)\,\gamma_n \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Osserviamo inoltre che il dato iniziale si riscrive come

$$\begin{aligned} 2\sin x\,\cos(2x) &= 2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} \\ &= \frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin(3x) - \sin x \ , \end{aligned}$$

e quindi γ_n deve soddisfare la condizione iniziale

$$\gamma_n(0) = 0 \text{ per } n \neq 1, 3, \quad \gamma_1(0) = -1 \ , \quad \gamma_3(0) = 1 \ .$$

Da questo e dalla (3) segue che

$$\gamma_n(t) = 0 \text{ per } n \neq 1, 3, \quad \gamma_1(t) = -e^t \ , \quad \gamma_3(0) = e^{-7t} \ ,$$

e dunque la soluzione cercata è

$$u(t,x) := e^{-7t}\sin(3x) - e^t \sin x \ .$$

Concludiamo osservando che questa funzione è effettivamente una soluzione del problema (trattandosi di una somma finita e non di una serie non c'è nulla da verificare) ed è l'unica (i coefficienti rispetto al sistema ortonormale $\sin(nx)$ di ogni soluzione del problema dovrebbero necessariamente essere uguali a quelli dati sopra, ed è noto che ogni funzione continua su $[0,\pi]$ e nulla agli estremi è univocamente determinata dai coefficienti).

7. a) Ricordando che $\mathscr{F}(e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}) = e^{-y^2/2}$ e che $(\mathscr{F} f)' = \mathscr{F}(-ix\,f(x)) =$, si ottiene

$$\mathscr{F}(x^2 e^{-x^2/2}) = -((ix)^2 e^{-x^2/2}) = -(\sqrt{2\pi}\,e^{-y^2/2})'' = \sqrt{2\pi}(1-y^2)\,e^{-y^2/2} \ ,$$

e quindi

$$\widehat{f} = -y^2\,e^{-y^2/2} \ .$$

b) Per l'iniettività della trasformata di Fourier si ha che $f = g * g$ se e solo se $\widehat{f} = \widehat{g * g} = \widehat{g}^2$, ovvero

$$\widehat{g}(y) = \pm iy\, e^{-y^2/4} \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Osserviamo ora che le funzioni *continue* su $\mathbb{R}$ che coincidono con $\pm iy\, e^{-y^2/4}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ sono solo quattro, vale a dire

$$\pm ip\ , \quad \pm i|p| \quad \text{con} \quad p(y) := y\, e^{-y^2/4}\ . \tag{5}$$

Inoltre l'ipotesi $\|x\, g(x)\|_1 < +\infty$ implica che $\widehat{g}$ è di classe $\mathscr{C}^1$, e questo permette di escludere le ultime due funzioni in (5). Per determinare esplicitamente g ricordiamo che $\mathscr{F}(e^{-x^2}/\sqrt{\pi}) = e^{-y^2/4}$ e che $\mathscr{F}(f') = iy\, \widehat{f}$, cosicché

$$\widehat{g} = \pm iy\, e^{-y^2/4} = \pm\mathscr{F}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-x^2})'\right) = \pm\mathscr{F}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}\right)\ ,$$

e per l'iniettività della trasformata di Fourier,

$$g(x) = \pm\frac{2}{\sqrt{\pi}}xe^{-x^2}\ .$$

c) Se non si suppone che $\|x\, g(x)\|_1 < +\infty$, la funzione $\widehat{g}$ è continua ma non necessariamente di classe $\mathscr{C}^1$, e questo significa che l'equazione (4) potrebbe ammettere altre due soluzioni oltre a quelle date al punto b), vale a dire

$$\widehat{g} = \pm q \quad \text{con} \quad q(y) := i|y|\, e^{-y^2/4}\ . \tag{6}$$

A questo punto si pone il problema se esistano o meno funzioni continue g con $\|g\|_1 < +\infty$ che soddisfano la (6).
A questo proposito osserviamo che $\|q'\|_1, \|q'\|_2 < +\infty$, per cui l'antitrasformata $\check{q}$ è una funzione continua tale che $\|x\, \check{q}(x)\|_2 < +\infty$, e com'è noto questo implica che $\|\check{q}\|_1 < +\infty$. Pertanto, per l'iniettività della trasformata di Fourier, la (6) equivale a

$$g = \pm\check{q}\ .$$

Si noti che quest'argomentazione presuppone che $\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}q = q$ per una funzione q continua e $\mathscr{C}^1$ a tratti tale che $\|q'\|_1, \|q'\|_2 < +\infty$; questa variante del teorema di inversione della trasformata di Fourier è vera, ma non è stata dimostrata a lezione (l'unico punto non ovvio è passare da una q di classe $\mathscr{C}^1$ ad una continua e $\mathscr{C}^1$ a tratti).

8. a) Consideriamo l'insieme D in $\mathbb{R}^2$ e la mappa $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ dati da

$$D := \big\{(t,u)\ :\ 1 \le \sqrt{t^2+u^2} \le 2\big\} \quad \text{e} \quad \varphi(t,u) = \big(t, u, \sqrt{t^2+u^2}\big)\ .$$

Si verifica facilmente che a) φ è di classe $\mathscr{C}^\infty$, b) φ è una bigezione da D in S, c) $d\varphi$ ha rango massimo (cioè 2) ovunque, d) D è un chiuso di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ con frontiera di classe $\mathscr{C}^\infty$. Da tutto questo segue che S è una superficie con bordo di classe $\mathscr{C}^\infty$ parametrizzata da φ (per la precisione dalla restrizione di φ a D).
b) Prendiamo φ come sopra. Siccome $\varphi^\#(z\, dz) = \frac{1}{2}\varphi^\#(dz^2) = \frac{1}{2}d(t^2+u^2) = t\, dt + u\, du$, abbiamo che

$$\varphi^\#\omega = \left(1 + \frac{u}{t^4+1} + t^2 - u^2\right)\, dt \wedge du\ .$$

Inoltre $\varphi^{\#}(d\omega) = d\varphi^{\#}\omega = 0$ perché il differenziale di una 2-forma in $\mathbb{R}^2$ è sempre nullo.
c) L'orientazione di S induce tramite φ un'orientazione sulla corona circolare D tale che il versore che orienta ∂D nel punto $(1,0)$ è $(0,1)$. Da questo segue che l'orientazione di D è opposta a quella canonica di $\mathbb{R}^2$, e quindi

$$\int_S \omega = \int_D \varphi^{\#}\omega = -\int 1 + \frac{u}{t^4+1} + t^2 - u^2 \, dt\, du = -\int_D 1 \, dt\, du = -3\pi$$

(nel terzo passaggio si è usato il fatto che essendo $\frac{u}{t^4+1}$ una funzione dispari in u, il suo integrale su un dominio D simmetrico rispetto all'asse delle t deve essere nullo, e per analoghe ragioni di simmetria risulta essere nullo anche l'integrale di $t^2 - u^2$).

Commenti

- Esercizio 2. Alcuni hanno risolto l'esercizio partendo dal presupposto che una funzione armonica ammette limite all'infinito in una qualche forma (cosa solitamente falsa: basti pensare alla parte reale di e^z).
- Esercizio 3. Nella verifica del fatto che S è autoaggiunto, diversi hanno sbagliato il cambio di variabile nell'integrale!
- Esercizio 4. Per dimostrare che il nucleo di $df(A)$ è banale, alcuni hanno risolto direttamente il sistema lineare $df(A)\,H = 0$, cosa che porta a calcoli relativamente complessi (a differenza del calcolo del determinante della matrice associata). Sempre a proposito di complicazioni, altri hanno calcolato direttamente la dimensione dell'immagine esibendo un insieme di generatori.
- Esercizio 6. Diverse persone hanno risolto l'esercizio utilizzando come sistema ortonormale le funzioni e^{-inx} con $n \in \mathbb{Z}$: il problema è che queste funzioni non costituiscono un sistema ortonormale di funzioni su $[0,\pi]$, e non soddisfano le condizioni al bordo del problema. Il fatto che alla fine la soluzione trovata sia quella giusta è una pura coincidenza (o meglio è la conseguenza di un principio di simmetria che però nessuno ha esplicitato).
- Esercizio 7. Nessuno si è reso conto del fatto che l'equazione $h(y)^2 = -y^2 e^{-y^2/2}$ ammette quattro soluzioni continue!
- Esercizio 8a). Alternativamente si può utilizzare il fatto che S è definito dall'equazione $f(x,y,z) := x^2+y^2-z^2 = 0$ e dalla disequazione $g(x,y,z) := (z-1)(z-2) \le 0$, e verificare a) f e g sono di classe $\mathscr{C}^\infty$, b) df ha rango 1 in ogni punto di S, c) $d(f,g)$ ha rango 2 in ogni punto di $\partial S := g^{-1}(0) \cap S$.
- Esercizio 8a). Alcuni hanno parametrizzato S tramite la mappa

  $$\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta, r) \quad \text{con } 1 \le r \le 2 \text{ e } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

  Questa parametrizzazione può essere usata per calcolare un integrale su S, ma non per verificare che S è una superficie con bordo regolare (φ non è una bigezione, e il suo dominio non è un chiuso con frontiera regolare).
- Esercizio 8c). In diversi hanno calcolato (o provato a calcolare) l'integrale di $1+\frac{u}{t^4+1}+t^2-u^2$ su D senza accorgersi che tutti i termini tranne il primo hanno integrale nullo per ragioni di simmetria.

1. Scriviamo $\rho := |x|$ e $dx := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Utilizzando le seguenti identità

$$\frac{\partial \rho}{dx_i} = \frac{x_i}{\rho} \quad , \quad dx_i \wedge \omega_i = (-1)^{i-1} dx \quad , \quad dx_j \wedge \omega_i = 0 \text{ per } j \neq i,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i d\big(f(\rho)\, x_i\big) \wedge (-1)^{i-1} \omega_i \\ &= \sum_i \Big[f(\rho)\, dx_i + \sum_j f'(\rho) \frac{x_j x_i}{\rho} dx_j \Big] \wedge (-1)^{i-1} \omega_i \\ &= \sum_i \Big[f(\rho) + f'(\rho) \frac{x_i^2}{\rho} \Big] dx = \big[n\, f(\rho) + \rho\, f'(\rho) \big]\, dx \ . \end{aligned}$$

2. Ricordando che $\mathscr{F}(e^{-|x|}) = 2/(1+y^2)$ e la formula $\mathscr{F}(f(ax)) = \frac{1}{a} \widehat{f}(y/a)$ si ottiene

$$\mathscr{F}(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2 + y^2} \ .$$

3. Detti $c(n)$ i coefficienti di Fourier complessi di $f(x)$, si verifica facilmente che quelli di $f(-x)$ sono $c(-n)$, mentre quelli di $\overline{f(x)}$ sono $\overline{c(-n)}$. Utilizzando quindi il fatto che due funzioni in X coincidono se e solo se hanno gli stessi coefficienti di Fourier, si ottiene che f è pari e reale se e solo se

$$c(n) = c(-n) \text{ e } c(n) = \overline{c(-n)} \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$c(n) \text{ è reale e } c(-n) = c(n) \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

4. Com'è noto, tutte le funzioni della forma $u(t,x) = v_+(x+2t) + v_-(x-2t)$ con $v_\pm$ funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ sono soluzioni dell'equazione delle onde $u_{tt} = 4u_{xx}$. p Per le soluzioni di questa forma, le condizioni iniziali assegnate si riducono a

$$v_+(x) + v_-(x) = \frac{2}{1+x^4} \ , \quad 2\dot{v}_+(x) - 2\dot{v}_-(x) = 0 \ .$$

Osserviamo che la seconda equazione è implicata da $v_+(x) - v_-(x) = 0$, che assieme alla prima equivale a imporre $v_+(x) = v_-(x) = 1/(1+x^4)$. Quindi una soluzione del problema (in realtà l'unica soluzione) è

$$u(t,x) = \frac{1}{1+(x+2t)^4} + \frac{1}{1+(x-2t)^4} \ .$$

5. Osserviamo che la proprietà della media (sulle palle), essendo definita tramite un integrale, passa al limite per convergenza uniforme. Dunque f è continua (in quanto limite uniforme di funzioni continue) ed ha la proprietà della media, e come si è visto a lezione questo implica che f è armonica.

6. Preso un qualunque punto $x_0 \in N$, per quanto visto a lezione possiamo trovare un intorno aperto U di x_0, una funzione $\tilde{g} : U \to \mathbb{R}$ e una mappa $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$, quest'ultime di classe $\mathscr{C}^1$, tali che $\tilde{g} = g$ su $S \cap U$, $S \cap U = f^{-1}(0)$ e $df(x_0)$ ha rango $n-d$.
Pertanto $N \cap U = h^{-1}(0)$ dove si è posto $h := (f, \tilde{g})$, e poiché la mappa $h : U \to \mathbb{R}^{n-d+1}$ è di classe $\mathscr{C}^1$, per concludere la dimostrazione basta far vedere che l'applicazione lineare $dh(x_0) = (df(x_0), d\tilde{g}(x_0))$ ha rango $n-d+1$, ovvero nucleo di dimensione al più $d-1$.

A questo proposito osserviamo che

$$\ker dh(x_0) = \ker df(x_0) \cap \ker d\tilde{g}(x_0) = \mathrm{Tan}(s, x_0) \cap \ker dg(x_0)$$

e l'ipotesi $dg(x_0) \neq 0$ implica quindi

$$\dim \ker dh(x_0) < \dim \mathrm{Tan}(s, x_0) = d \ .$$

7. a) Poniamo $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^3 - 2z - 4$. Chiaramente $S := f^{-1}(0) \cap \{z \geq 0\}$ è un insieme chiuso, ed è limitato perché data una qualunque successione (x_n, y_n, z_n) con $z_n \geq 0$ tale che almeno una delle componenti tende all'infinito in valore assoluto, si ha che $f(x_n, y, z_n) \to +\infty$.
Per vedere che S è una superfice con bordo di classe $\mathscr{C}^\infty$ basta osservare che f è una funzione $\mathscr{C}^\infty$ tale che Df ha rango 1 in ogni punto di S, mentre $D(f, z)$ ha rango 2 in ogni punto di $S \cap \{z = 0\}$ (la verifica è pressoché immediata).
b) Un semplice calcolo dà

$$d\omega = -2z(dx + a\, dy) \wedge (dx + dy) \wedge dz = 2(a-1)z\, dx \wedge dy \wedge dz \ ,$$

e dunque $d\omega = 0$ se e solo se $a = 1$.
c) Detta $h(t)$ una primitiva di e^{t^2}, per $a = 1$ si ottiene che

$$\begin{aligned} \omega &= e^{x^2}\, dx \wedge e^{y^2} dy - 2(y + x)\, d(x + y) \wedge z\, dz \\ &= dh(x) \wedge e^{y^2} dy - d(x + y)^2 \wedge z\, dz \\ &= d\big[\underbrace{h(x)\, e^{y^2} dy - (x + y)^2 z\, dz}_{\alpha}\big] \end{aligned}$$

d) Sia S' il disco definito da $z = 0$ e $x^2 + y^2 \leq 4$, orientato dal vettore normale $(0, 0, 1)$. Si verifica che i bordi di S e S' coincidono anche in termini di orientazione. Pertanto, ricordando che $\omega = d\alpha$ dove α è la forma definita al punto precedente, per il teorema di Stokes si ha

$$\int_S \omega = \int_{\partial S} \alpha = \int_{\partial S'} \alpha = \int_{S'} \omega$$

e quindi

$$\int_S \omega = \int_{S'} e^{x^2+y^2} dx \wedge dy = \int_0^2 e^{\rho^2} 2\pi\rho\, d\rho = \pi(e^4 - 1) \ .$$

8. a) Al solito, se u_1 e u_2 sono due soluzioni del problema $(*)$ con lo stesso dato al bordo u_0, allora la differenza $u := u_1 - u_2$ risolve $(*)$ con dato al bordo 0. Pertanto ci basta dimostrare che l'unica soluzione u di $(*)$ con $u_0 := 0$ è la funzione identicamente nulla.
Per ogni $r > 0$ indichiamo con A_r il semidisco aperto dato dall'intersezione del disco aperto di centro 0 e raggio r con il semipiano Ω. Osserviamo quindi che A_r è un insieme limitato, u è armonica in A_r e continua sulla sua chiusura, e detta R la retta di equazione $s = 0$, la restrizione di u ad R è nulla. Pertanto usando il principio del massimo si ottiene

$$\sup_{x \in A_r} u(x) = \sup_{x \in \partial A_r} u(x) := M_r = \sup_{x \in \partial A_r \setminus R} u(x) := m_r \ ,$$

e quindi, tenuto conto del fatto che m_r tende a 0 quando $r \to +\infty$ per via della terza riga in $(*)$,

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{r > 0} \sup_{x \in \partial A_r} u(x) = \lim_{r \to +\infty} \sup_{x \in \partial A_r} u(x) = \lim_{r \to +\infty} m_r = 0 \ .$$

Analogamente si dimostra che l'estremo inferiore di u su Ω è 0, e quindi u è identicamente nulla.
b) Detta $v(y,s)$ la trasformata di Fourier di $u(x,s)$ rispetto alla variabile x, si ha che l'equazione $\Delta u = u_{xx} + u_{ss} = 0$ equivale a $-y^2 v + v_{ss} = 0$, e risolvendo questa equazione lineare del secondo ordine rispetto alla variabile s si ottiene

$$v(y,s) = a(y)e^{-|y|s} + b(y)e^{|y|s} \ .$$

Ora, se u tende a 0 per $s \to +\infty$, è ragionevole supporre che anche v tenda a 0 quando $s \to +\infty$, e dunque $b(y) = 0$. Quindi, ricordando che la condizione al bordo $u(x,0) = u_0(x)$ equivale a $v(y,0) = \widehat{u}_0(y)$,

$$v(y,s) = \widehat{u}_0(y)\, e^{-|y|s} \ .$$

Infine, tenuto conto del fatto che

$$e^{-|y|s} = \mathscr{F}\left(\frac{s}{\pi(x^2+s^2)}\right)$$

(cosa che segue sostanzialmente dall'esercizio 2) e che il prodotto di due trasformate è la trasformata del prodotto di convoluzione, si ottiene

$$u(x,s) = u_0 * \frac{s}{\pi(x^2+s^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x-t)\frac{s}{\pi(t^2+s^2)}\, dt \ .$$

Osserviamo che tale formula è ben posta per ogni u_0 continua perché la funzione $1/(x^2+s^2)$ ha norma L^1 finita, e si verifica facilmente che la funzione u così definita soddisfa $\Delta u = 0$ su Ω. Leggermente più complicato è far vedere che u soddisfa le giuste condizioni al bordo e all'infinito (ma questo non era richiesto).

Commenti

- Esercizio 3. Molti hanno risolto l'esercizio supponendo in prima istanza che f sia pari e reale, e derivandone quindi le corrette identità sui coefficienti. Così facendo bisogna però far vedere che vale anche il viceversa, ovvero che se i coefficienti soddisfano queste identità allora la funzione è pari e reale. Nel caso di una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ questa implicazione la si ottiene facilmente usando la formula di rappresentazione; il caso generale lo si può ottenere tramite un argomento di continuità.

- Esercizio 4. Il fatto che ogni funzione della forma $u(t,x) := v_+(x+ct) - v_-(x-ct)$ risolve l'equazione delle onde $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ è stato visto a lezione nel caso di funzioni 2π-periodiche rispetto alla variabile x, ma vale chiaramente più in generale. Quasi nessuno si è però ricordato di questo fatto.

- Esercizio 5. Qualcuno ha sostenuto che la convergenza uniforme delle funzioni implica la convergenza dei laplaciani. Questo non è vero, e anzi, com'è noto dal corso di analisi del secondo anno, il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni di classe $\mathscr{C}^\infty$ potrebbe non essere neanche $\mathscr{C}^1$.

- Esercizio 7d). Nella soluzione data sopra, si afferma senza dimostrarlo che l'orientazione da assegnare al disco S' in modo che il suo bordo coincida con quello di S anche in termini di orientazione è quella indotta dalla normale $(0,0,1)$. Che quest'affermazione sia corretta lo si verifica facilmente facendo un disegno, ma questa non è una vera dimostrazione.
  Il punto è verificare ∂S, come curva sul piano xy, è orientata in senso antiorario. Questo lo si può dimostrare rigorosamente esibendo una parametrizzazione regolare di S.

- Esercizio 7d). In teoria si potrebbe ottenere l'integrale di ω su S calcolando direttamente l'integrale di α sul bordo di S, vale a dire la circonferenza di centro l'origine e raggio 2 sul piano $z = 0$. Tuttavia questo porte ad un integrale che non si calcola facilmente (almeno quando α è la forma che abbiamo considerato noi).
- Esercizio 7d). È possibile calcolare direttamente l'integrale di ω su S utilizzando la parametrizzazione $\varphi : [0,2] \times [0,2\pi] \to S$ data da

$$\varphi(s,t) := (g(s)\,\cos t, g(s)\,\sin t, s) \quad \text{con } g(s) := \sqrt{4 + 2s - s^3}\ .$$

  Si osservi che, analogamente a quel che succede per la parametrizzazione in coordinate cilindriche della sfera, φ è regolare (cioè iniettiva, $\mathscr{C}^1$, e con gradiente di rango due) solo nell'insieme $[0,2) \times [0,2\pi)$. Tuttavia questo basta a calcolare l'integrale di ω su S.

1. a) Al solito, sia X lo spazio delle funzioni continue e 2π-periodiche da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, dotato della norma del sup. Se $f \in X$ è di classe $\mathscr{C}^1$ allora coincide con il suo sviluppo in serie di Fourier, e quindi
$$f(x+a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(x+a)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{ina} c_n e^{inx} \ ,$$
da cui segue, per l'unicità dello sviluppo in serie di Fourier, che l'n-esimo coefficiente di Fourier di $f(x+a)$ è $e^{ina}c_n$.
Questa identità si estende a tutte le funzioni in X usando il fatto che le funzioni di classe $\mathscr{C}^1$ sono dense in X, e che sia la traslazione (come applicazione da X in X) che l'n-esimo coefficiente di Fourier (come applicazione da X in $\mathbb{C}$) sono continue.
b) Si procede come al punto a): se f è di classe $\mathscr{C}^1$ allora
$$f(kx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inkx} \ ,$$
da cui segue, sempre per l'unicità dello sviluppo in serie di Fourier, che l'n-esimo coefficiente di Fourier di $f(kx)$ è $c_{n/k}$ se n è un multiplo di k, ed è 0 nei rimanenti casi. Questa identità si estende a tutte le funzioni in X per continuità.

2. Si tratta di calcoli standard: scrivendo dx per $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ si ha
$$d\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = dx \ ;$$
usando poi che
$$\begin{aligned} f^\#(dx_1) &= d(t_1^2 - t_2^2) = 2t_1\,dt_1 - 2t_2\,dt_2 \ , \\ f^\#(dx_2) &= d(2t_1t_2) = 2t_2\,dt_1 + 2t_1\,dt_2 \ , \\ f^\#(dx_3) &= d(t_1^2 + t_2^2) = 2t_1\,dt_1 + 2t_2\,dt_2 \ , \end{aligned}$$
si ottiene
$$\begin{aligned} f^\#\omega = {} & 4(t_1^2 - t_2^2)\,(t_2\,dt_1 + t_1\,dt_2) \wedge (t_1\,dt_1 + t_2\,dt_2) \\ & - 8t_1t_2\,(t_1\,dt_1 + t_2\,dt_2) \wedge (t_1\,dt_1 - t_2\,dt_2) \\ & + 4(t_1^2 + t_2^2)\,(t_1\,dt_1 - t_2\,dt_2) \wedge (t_2\,dt_1 + t_1\,dt_2) \\ = {} & \big[4(t_1^2 - t_2^2)(t_2^2 - t_1^2) - 8t_1t_2(-2t_1t_2) \ + 4(t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 + t_2^2)\big]\, dt_1 \wedge dt_2 \\ = {} & 32\, t_1^2 t_2^2\, dt_1 \wedge dt_2 \ ; \end{aligned}$$
infine $f^\#(d\omega) = 0$ perché una 3-forma in $\mathbb{R}^2$ è sempre nulla.

3. Sapendo che $2\sin y/y$ è la trasformata di Fourier della funzione indicatrice χ dell'intervallo $[-1,1]$, abbiamo che
$$\mathscr{F}(\sin x/x) = \pi\chi$$
e quindi, ricordando che la trasformata del prodotto coincide (a meno di un fattore 2π) con il prodotto di convoluzione delle trasformate
$$\mathscr{F}(\sin^2 x/x^2) = \frac{1}{2\pi}(\pi\chi) * (\pi\chi) = \frac{\pi}{2}(2 - |y|)^+$$
(a^+ sta per la parte positiva di del numero reale a).

4. Al solito, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(nx) \ .$$

Le condizioni al bordo $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ sono soddisfatte (se tutto va bene) grazie alla scelta della base $\{\sin(nx)\}$, l'equazione $u_{tt} = u_{xx} + 5u$ riscritta nei termini dei coefficienti c_n diventa

$$\ddot{c}_n = (5-n^2)c_n \quad \text{per ogni } n, \tag{2}$$

mentre le condizioni iniziali diventano

$$\begin{cases} c_2(0) = c_3(0) = 2\,,\ c_n(0) = 0 \text{ per ogni } n \neq 2,3, \\ \dot{c}_n(0) = 0 \text{ per ogni } n. \end{cases} \tag{3}$$

Risolvendo l'equazione (2) con le condizioni iniziali (3) otteniamo

$$\begin{cases} c_2(t) = e^t + e^{-t}\,, \\ c_3(t) = 2\cos(2t)\,, \\ c_n(t) = 0 \text{ per ogni } n \neq 2,3. \end{cases}$$

e quindi

$$u(t,x) = (e^t + e^{-t})\sin(2x) + 2\cos(2t)\sin(3x) \ .$$

5. a) Scrivendo dx per $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, si ha

$$d\omega = d(3x_1^2 + ax_3)\wedge dx_1 \wedge dx_2 + d(x_1 + 2ax_3)\wedge dx_2 \wedge dx_3 = (a+1)\,dx \ ,$$

e quindi la forma ω è chiusa se e solo se $a = -1$.
b) Per $a = -1$, cerchiamo $\sigma = \sigma_1 dx_1 + \sigma_2 dx_2 + \sigma_3 dx_3$ tale che $d\sigma = \omega$. Facendo l'ipotesi aggiuntiva che $\sigma_1 = 0$, l'equazione $d\sigma = \omega$ equivale alle seguenti tre equazioni:

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial x_1} = 3x_1^2 - x_3 \ , \quad \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_1} = 0 \ , \quad -\frac{\partial\sigma_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_2} = x_1 - 2x_3 \ . \tag{1}$$

La prima equazione è soddisfatta se $\sigma_2 = x_1^3 - x_1x_3 + c$ con c funzione arbitraria che dipende solo dalle variabili x_2 e x_3, mentre la seconda equazione è soddisfatta se anche σ_3 dipende solo da x_2 e x_3. A questo punto l'ultima equazione in (1) diventa

$$-\frac{\partial c}{\partial x_3} + \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_2} = -2x_3$$

ed è soddisfatta, per esempio, prendendo $\sigma_3 = 0$ e $c = x_3^2$. Pertanto una 1-forma σ tale che $d\sigma = \omega$ è

$$\sigma = (x_1^3 - x_1x_3 + x_3^2)\,dx_2 \ .$$

6. a) Indichiamo con X_s il sottospazio di X dato dalle matrici simmetriche, e con S l'applicazione lineare da X in X_s che porta A in $A + A^t$. Fissata $A \in X$, si ha che

$$f(A+H) = f(A) + (I+A^t)H + (I+A)H^t + H^tH$$

e quindi

$$df(A) : H \mapsto (I+A^t)H + (I+A)H^t = S((I+A^t)H) \ .$$

In particolare l'immagine di $df(A)$ è contenuta in X_s e quindi $df(A)$ ha rango inferiore alla dimensione di X_s, che è appunto $d := \frac{1}{2}n(n+1)$.
b) Se la matrice $I + A^t$ è invertibile, l'applicazione $H \mapsto (I + A^t)H$ è surgettiva su X, quindi l'applicazione $H \mapsto S((I + A^t)H)$ è surgettiva su X_s, e pertanto $df(A)$ ha rango d. In particolare $df(aI)$ ha rango d per $a \neq -1$. Per $a = -1$, invece, $df(A)$ è l'applicazione nulla, e ha rango 0.
c) Consideriamo ora f come una mappa da X in X_s. Siccome $f(A) = (I + A)(I + A^t) - I$, se $f(A) = 0$ allora $(I + A)(I + A^t) = I$, da cui segue che $I + A^t$ è invertibile, e per quanto visto al punto precedente $df(A)$ ha rango massimo come applicazione lineare da X in X_s. Pertanto l'insieme $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare (di classe $\mathscr{C}^\infty$) e senza bordo in X, con dimensione $n^2 - d = \frac{1}{2}n(n-1)$.

7. a) Sia $p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la mappa data da $p(x, y) := (|x|, |y|)$. Poiché questa mappa è continua e C è un sottoinasieme chiuso di $\mathbb{R} \times R$ (in quanto compatto), $S = p^{-1}(C)$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Inoltre C è limitato, e da questo segue immediatemente che anche S è limitato. Pertanto S è compatto.
Mostriamo ora che S si può scrivere localmente come luogo di zeri di una funzione reale di classe $\mathscr{C}^1$ con gradiente diverso da zero.
Preso un punto $q \in S$, $p(q)$ appartiene a C e quindi esistono un intorno aperto U di $p(q)$ ed una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^1$ tali che $C \cap U = f^{-1}(0)$ e $Df \neq 0$ in U; inoltre, poiché $p(q)$ appartiene all'aperto $Q := (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, si può supporre che anche U sia contenuto in Q.
Pertanto $V := p^{-1}(U)$ è un intorno aperto di q contenuto in $A := p^{-1}(Q)$, e $S \cap V = g^{-1}(0)$ dove $g := f \circ p$. Osserviamo che $g : V \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathscr{C}^1$ perché tali sono sia f che la restrizione di p ad A. Concludiamo la dimostrazione verificando che il gradiente di g, vale a dire
$$Dg(x, y) = \Big(\partial_1 f \, \frac{x}{|x|}, \partial_2 f \, \frac{y}{|y|}\Big) \ ,$$
non si annulla mai su V perché il gradiente di f non si annulla mai su U.
b) Sia γ una parametrizzazione di C non necessariamente regolare, vale a dire un cammino di classe $\mathscr{C}^1$, iniettivo all'interno di I, la cui immagine è C. Pertanto la mappa $\varphi : I \times [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ data da
$$\varphi(t, u_1, u_2) := (\gamma_1(t)\, \cos u_1, \gamma_1(t)\, \sin u_1, \gamma_2(t)\, \cos u_2, \gamma_2(t)\, \cos u_2)$$
è iniettiva all'interno di $I \times [0, 2\pi]^2$, e ha immagine uguale a S, e può quindi essere utilizzata per calcolare il volume di S. In effetti
$$D\varphi(t, u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t)\, \cos u_1 & -\gamma_1(t)\, \sin u_1 & 0 \\ \dot\gamma_1(t)\, \sin u_1 & \gamma_1(t)\, \cos u_1 & 0 \\ \dot\gamma_2(t)\, \cos u_2 & 0 & -\gamma_2(t)\, \sin u_2 \\ \dot\gamma_2(t)\, \sin u_2 & 0 & \gamma_2(t)\, \cos u_2 \end{pmatrix} \ ,$$
da cui si ottiene che
$$J\varphi(t, u_1, u_2) = \sqrt{\det(D^t\varphi\, D\varphi)} = \gamma_1\, \gamma_2\, |\dot\gamma| \ ,$$
e quindi
$$\mathrm{Vol}(S) = 4\pi^2 \int_I \gamma_1\, \gamma_2\, |\dot\gamma|\, dt \ .$$

8. a) Posto $\tilde u := f \circ u$, un semplice calcolo dà
$$\Delta \tilde u = f''(u)\, |\nabla u|^2 \ . \tag{4}$$

Se f è affine allora $f'' = 0$, e dalla (4) segue che $\Delta\tilde{u} = 0$, cioè che $\tilde{u}$ è armonica.
b) Se $\tilde{u}$ è armonica e ∇u non si annulla mai, allora la funzione $f''(u)$ deve essere identicamente nulla, e quindi f'' si annulla su $I := u(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, poiché I è un intervallo (in quanto immagine di un connesso secondo una funzione continua e non costante) questa condizione implica che f' è costante su I, e quindi f è affine su I.
c) L'enunciato è ancora vero. Questo è ovvio quando I consiste di un solo punto (ovvero quando u è costante), e va dimostrato nel caso in cui I sia un intervallo proprio.
Sia A l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ dove $\nabla u \neq 0$: siccome $\tilde{u}$ è armonica, dalla (4) segue che f'' si annulla su $u(A)$, e per continuità anche sulla chiusura di $u(A)$. Non ci resta quindi che dimostrare che la chiusura di $u(A)$ coincide con I per poi concludere la dimostrazione come nel punto b).
Supponiamo dunque per assurdo che la chiusura di $u(A)$ non coincida con I. Allora esiste un intervallo aperto e non vuoto J contenuto in I che non interseca $u(A)$. Questo significa che $\nabla u = 0$ sull'aperto $B := u^{-1}(J)$, e quindi u è costante su ogni componente connessa di B. Ma siccome le componenti connesse di un qualunque aperto di $\mathbb{R}^n$ sono in quantità al più numerabile, $u(B)$ è numerabile, contraddicendo il fatto che $u(B) = J$.

COMMENTI

- Esercizio 1. Tutti i presenti hanno proposto per il punto a) una soluzione diversa da quella data sopra: detti infatti c'_n i coefficienti di $f(x+a)$, un semplice calcolo dà

  $$c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)\, e^{-in(t-a)}\, dt = e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = e^{ina}c_n$$

  (la prima uguaglianza segue per cambio di variabile dalla definizione di c'_n, la seconda segue dal fatto che l'integrale di una funzione T-periodica su tutti gli intervalli di lunghezza T è lo stesso).
  Purtroppo questo approccio non funziona per il punto b), che infatti nessuno ha risolto.
- Esercizio 5b). Porre $\sigma_1 = 0$ può sembrare a prima vista una scelta arbitraria che funziona solo per caso, ma non è così: per ogni 2-forma chiusa ω in $\mathbb{R}^3$ è possibile trovare una 1-forma σ tale che $d\sigma = \omega$ e $\sigma_1 = 0$.
- Esercizio 6. Poiché $f(A) = (I+A)(I+A)^t - I$, allora $f(A) = 0$ se e solo se $(I+A)(I+A)^t = I$, ovvero $I + A$ appartiene a $O(n)$. Dunque $f^{-1}(0)$ è una traslazione di $O(n)$, e da questo segue immediatamente che si tratta di una superficie compatta di dimensione $\frac{1}{2}n(n-1)$.
- Esercizio 7. Piuttosto soprendentemente, nessuno ha svolto il punto b).
- Esercizio 8b). Un punto che nessuno ha adeguatamente sottolineato è il seguente: se la derivata seconda di f è nulla su un certo sottoinsieme chiuso E di $\mathbb{R}$, è corretto dedurne che f coincide su E con una funzione affine solo nel caso che E sia connesso (per E non connesso si possono trovare dei facili controesempi). Ovviamente l'immagine di u è connessa, ma andava fatto notare che questo è rilevante ai fini della dimostrazione.
- Esercizio 8. Si può dimostrare (anche se non è rilevante per la risoluzione dell'esercizio) che se u non è costante allora l'intervallo I – l'immagine di u – non contiene gli estremi (perché u non ammette punti di massimo o di minimo) e quindi è aperto. In realtà non solo I è aperto ma coincide con $\mathbb{R}$.